

Université d'Orléans

Deug MIAS et SM

Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

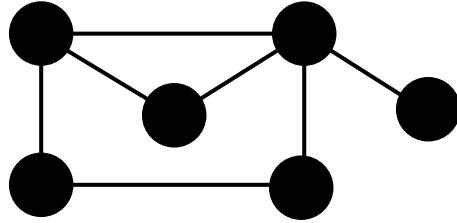
Examen du 19 décembre 2000

durée: 2h

Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.

Exercice I

Déterminer le polynôme chromatique du graphe suivant ainsi que son nombre chromatique. Donner un exemple de coloriage propre de ce graphe avec un nombre minimal de couleur et calculer le nombre de coloriages propres de ce graphe lorsque l'on dispose d'une palette de 4 couleurs.



Exercice II

Soit A un réel. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = Ax(2-x)\mathbb{1}_{[0,2]}(x).$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de A f est-elle la densité d'une loi de probabilité ?
2. On suppose maintenant que A a été choisi de telle manière que f soit la densité d'une loi de probabilité.
Soit donc X une variable aléatoire admettant f comme densité.
Calculer $\mathbb{E}X$, puis $\text{Var } X$.

Problème

Toutes les variables aléatoires considérées ici seront supposées définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) . Pour tout événement $A \subset \Omega$, on notera A^c l'événement complémentaire.

Soit $S = \{1, 2, 3, 4\}$. À chaque $i \in S$ est associé une variable aléatoire C_i à valeurs dans $\{1, 2\}$. On suppose que les variables $(C_i)_{1 \leq i \leq 4}$ sont indépendantes et vérifient

$$\forall i \in S \quad P(C_i = 1) = p \text{ et } P(C_i = 2) = 1 - p,$$

où p est un réel fixé appartenant à $]0, 1[$.

Pour $i \in S$, on définit l'événement $B_i = \{C_i = 1\}$. On pose alors

$$N_1 = \sum_{i=1}^4 \mathbb{1}_{B_i}.$$

- Déterminer la loi de N_1 .

On pose, pour i et j entiers vérifiant $1 \leq i < j \leq 4$: $A_{i,j} = \{C_i \neq C_j\}$.

- Combien d'événements a-t-on ainsi défini ?
 - Montrer que pour i et j entiers vérifiant $1 \leq i < j \leq 4$, on a

$$A_{i,j} = (B_i \cap B_j^c) \cup (B_i^c \cap B_j).$$

- Montrer que pour i et j entiers vérifiant $1 \leq i < j \leq 4$, on a

$$P(A_{i,j}) = 2p(1 - p).$$

- Justifier brièvement le fait que si i, j, k, l sont quatre éléments de S deux à deux distincts, alors $A_{i,j}$ et $A_{k,l}$ sont indépendants.

- Soient i, j, k trois éléments de S vérifiant $i < j < k$.

- Montrer $P(A_{i,j} \cap A_{i,k}) = p(1 - p)$.
- En déduire la valeur de $P(A_{i,j} | A_{i,k})$.
- Pour quelle(s) valeur(s) de p les événements $A_{i,j}$ et $A_{i,k}$ sont-ils indépendants ?

Pour i et j entiers vérifiant $1 \leq i < j \leq 4$, on pose $Y_{i,j} = \mathbb{1}_{A_{i,j}}$.

On définit également $N_A = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} Y_{i,j}$.

- Pour i et j entiers vérifiant $1 \leq i < j \leq 4$, calculer $\mathbb{E}Y_{i,j}$.
 - En déduire la valeur de $\mathbb{E}N_A$.
 - Pour quelle(s) valeur(s) de p l'espérance de N_A est-elle maximale ?

- Dans cette question, on prend $p = 1/2$.

- Soient $\{i, j\}$ et $\{k, l\}$ deux paires distinctes d'éléments de S . On suppose que $i < j$ et $k < l$. Montrer que $\text{Covar}(Y_{i,j}, Y_{k,l}) = 0$.
- En déduire que $\text{Var } N_A = 3/2$.

7. Le but de cette question est d'étudier les propriétés de *graphes aléatoires* associés aux variables aléatoires étudiées dans ce problème.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose
 $A(\omega) = \{\{i, j\} \in \mathcal{B}_2(S) \ ; Y_{i,j} = 1\}$.
On définit alors le graphe non-orienté $G(\omega) = (S, A(\omega))$.

- (a) Dessiner le graphe $G(\omega)$ lorsque $C_1(\omega) = C_2(\omega) = 1$ et $C_3(\omega) = C_4(\omega) = 2$.
- (b) Montrer que $N_A(\omega)$ est le nombre d'arêtes du graphe $G(\omega)$.
- (c) Montrer que $G(\omega)$ est un graphe biparti complet de type $\mathcal{K}_{N_1(\omega), 4-N_1(\omega)}$.
(Indication: on pourra introduire les ensembles $H(\omega) = \{i \in S; C_i(\omega) = 1\}$ et $F(\omega) = \{i \in S; C_i(\omega) = 2\}$.)
- (d) Déterminer la probabilité pour que $G(\omega)$ soit le graphe biparti complet $\mathcal{K}_{2,2}$.
Indication: utiliser la première question du problème.
- (e) Montrer $P(G \supset \mathcal{K}_3) = 0$.