

Intégration et Probabilités

corrigé de l'examen du 2 décembre 2010

I

1. La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc localement intégrale sur $]0, +\infty[$. Reste à étudier l'intégrabilité en 0 et en l'infini. En 0, $e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1}$, et comme $x - 1 > -1$ et que t^{x-1} est de signe constant au voisinage de 0, l'intégrabilité en 0 découle du critère d'équivalence avec une intégrale "de type Riemann" classique. En l'infini, $e^{-t}t^{x-1} = o(e^{-t/2})$, ce qui donne la convergence en l'infini.
2. Soient a, b réels avec $0 < a < b < +\infty$. Pour tout $t > 0$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^{-t}t^{x-1}) = \log t e^{-t}t^{x-1}.$$

Comme pour tout $t > 0$ et tout $x \in]a, b[$, on a

$$\begin{aligned} |\log t e^{-t}t^{x-1}| &= (-\log t)e^{-t}t^{x-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(t) + \log t e^{-t}t^{x-1}\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(t) \\ &= (-\log t)e^{-t}t^{x-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(t) + \log t e^{-t}t^{x-1}\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(t) \\ &\leq (-\log t)e^{-t}t^{a-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(t) + \log t e^{-t}t^{b-1}\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(t), \end{aligned}$$

on pourra appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme dès qu'il sera acquis que $t \mapsto (-\log t)e^{-t}t^{a-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(t) + \log t e^{-t}t^{b-1}\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

La fonction est continue, donc localement intégrable. En 0, on a $\log t = o(t^{-a/2})$ et $e^{-t} \sim 1$, d'où $(-\log t)e^{-t}t^{a-1} = o(t^{a/2-1})$, ce qui donne l'intégrabilité en 0. En $+\infty$, comme $\log t = o(t)$, on a $\log t e^{-t}t^{b-1} = o(e^{-t}t^b)$, mais $t^b = o(e^{t/2})$, donc finalement $\log t e^{-t}t^{b-1} = o(e^{-t/2})$, ce qui donne l'intégrabilité en l'infini.

Ainsi, la fonction Γ est dérivable sur $]a, b[$, avec

$$\forall x \in]a, b[\quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t t^{x-1} d\lambda(t).$$

Mais comme la dérivabilité est une propriété locale et que tout point de $]0, +\infty[$ admet un voisinage de la forme $]a, b[$, avec a, b réels vérifiant $0 < a < b < +\infty$, le résultat s'ensuit.

II

1.

$$\begin{aligned}
 u_n - u_{n-1} &= (H_n - H_{n-1}) - (\log n - \log(n-1)) \\
 &= \frac{1}{n} + \log(1 - 1/n) \\
 &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
 &= O\left(\frac{1}{n^2}\right).
 \end{aligned}$$

Ainsi la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge, mais $\sum_{k=2}^n (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_1$, donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

2. Pour tout $v \in]0, 1[$, on a

$$1 + (1-v) + \dots + (1-v)^{n-1} = \frac{1 - (1-v)^n}{1 - (1-v)} = \frac{1 - (1-v)^n}{v}.$$

En intégrant entre 0 et 1, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-v)^k dv = \int_0^1 \frac{1 - (1-v)^n}{v} dv.$$

Or $\int_0^1 (1-v)^k dv = \int_0^1 v^k dv = \frac{1}{k+1}$, d'où

$$\int_0^1 \frac{1 - (1-v)^n}{v} dv = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = H_n.$$

3. On fait une intégration par parties : pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}
 \int_{\varepsilon}^1 \log v (1-v)^n dv &= \left[\log v \frac{1 - (1-v)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1 - (1-v)^{n+1}}{v} dv \right] \\
 &= -\log \varepsilon \frac{1 - (1-\varepsilon)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1 - (1-v)^{n+1}}{v} dv
 \end{aligned}$$

Cependant, on a l'équivalent en 0 : $-\log \varepsilon \frac{1 - (1-\varepsilon)^{n+1}}{n+1} \sim -\varepsilon \log \varepsilon$, d'où en faisant tendre ε vers 0 :

$$\int_0^1 \log v (1-v)^n dv = -\frac{1}{n+1} \int_1^0 \frac{1 - (1-v)^{n+1}}{v} dv = -\frac{H_{n+1}}{n+1}$$

grâce à la question précédente.

4. On pose $f(t) = 1 - t - e^{-t}$. f est dérivable sur \mathbb{R} , avec $f'(t) = -1 + e^{-t}$. Ainsi f' est négative sur \mathbb{R}_+ , et donc f est décroissante sur \mathbb{R}_+ , avec pour tout $t \geq 0$, $f(t) \leq f(0) = 0$, d'où l'inégalité voulue.

5. Posons, pour $t > 0$ et $n \geq 1$, $f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n \log \mathbb{1}_{[0, n]}(t)$. Comme f_n est de signe constant, continue par morceaux, on a

$$\int_{]0, +\infty[} f_n(x) d\lambda(x) = \int_{]0, n]} f_n(x) d\lambda(x) = \int_0^n f_n(t) dt = I_n.$$

Pour $n \geq t$, on a $f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n \log t$.

Mais $(1 - \frac{t}{n})^n = \exp(\log(1 - \frac{t}{n})^n) = \exp(n \log(1 - t/n))$: lorsque n tend vers l'infini $\log(1 - t/n) \sim -t/n$, d'où $n \log(1 - t/n) \sim -t$: ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \log(1 - t/n) = -t/n$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - t/n)^n = e^{-t}$.

Finalement, pour tout $t > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = e^{-t} \log t$.

On a pour t entre 0 et n

$$0 \leq (1 - \frac{t}{n})^n (-\log t) \leq (e^{-t/n})^n (-\log t) = (-\log t) e^{-t},$$

d'où $0 \leq -f_n(t) \leq (-\log t) e^{-t}$. La dernière inégalité est encore vérifiée pour $t > n$: les termes sont tous nuls. Ainsi, on a sur $]0, +\infty[$ l'inégalité $0 \leq -f_n(t) \leq (-\log t) e^{-t}$: comme, on l'a vu au I, cette fonction est intégrable, on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t dt.$$

6. Un simple changement de variable affine donne

$$\begin{aligned} \int_0^n f_n(t) dt &= n \int_0^1 f_n(ny) dy = n \int_0^1 \log(ny) (1-y)^n dy. \\ &= n \log n \int_0^1 (1-y)^n dy + n \int_0^1 \log y (1-y)^n dy. \\ &= \frac{n \log n}{n+1} - n \frac{H_{n+1}}{n+1}, \end{aligned}$$

soit $I_n = \frac{n}{n+1} (\log n - H_{n+1}) = \frac{n}{n+1} (\log n - H_n - \frac{1}{n+1})$ Comme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n - \log n = \gamma$, cela nous donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = -\gamma$. Or, d'après

la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t dt$, qui d'après le I, est égal à $\Gamma'(1)$: on obtient donc l'identité $\gamma = -\Gamma'(1)$.

FIN