

Intégration et Probabilités

Examen du 4 novembre 2011

durée 3h

Les documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ deux suites de nombres réels. On suppose que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq 1 \text{ et que } \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} v_n \geq 1.$$

1. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Que peut on dire de l'ensemble des entiers n tels que $u_n \geq 1 - \varepsilon$? de l'ensemble des entiers n tels que $v_n < 1 - \varepsilon$? En déduire que $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n \geq 1$.
2. Donner un exemple de suites de nombres réels $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ avec $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$ et $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 3$.

Exercice 2

1. Soit f une fonction mesurable, intégrable sur $[0, 1]$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer soigneusement que

$$\int_{[0,1]} f(x) d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{]1/n, 1]} f(x) d\lambda(x).$$

2. On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer qu'il existe une constante réelle γ telle que l'on ait le développement asymptotique lorsque n tend vers l'infini :

$$H_n = \log n + \gamma + o(1).$$

3. Pour x réel, on note $\{x\}$ l'unique réel de $[0, 1[$ tel que $x - \{x\} \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'intégrale $\int_{]0,1]} \{\frac{1}{x}\} d\lambda(x)$ a une valeur finie et que

$$\int_{]0,1]} \{\frac{1}{x}\} d\lambda(x) = 1 - \gamma,$$

Exercice 3

Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} des tribus sur Ω , $X \subset \Omega$ et $Y \subset \Omega$.

Dites pour chacune des affirmations suivantes si elle est vérifiée quels que soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}, X, Y$.

On demande simplement de répondre par OUI ou NON.

1. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est une tribu.
2. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{E \subset \Omega; \exists(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \ E = A \cap B\}$.
3. $\sigma(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \sigma(\{E \subset \Omega; \exists(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \ E = A \cap B\})$.
4. $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \sigma(\{E \subset \Omega; \exists(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \ E = A \cup B\})$.
5. X est dans la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$
6. Si X est infini, les parties finies de X forment une tribu.
7. Si $X \subset Y$ et $Y \in \mathcal{A}$, alors $X \in \mathcal{A}$.
8. Si $X \subset Y$ et $X \in \mathcal{A}$, alors $Y \in \mathcal{A}$.
9. Si $X \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, alors $X \in \mathcal{B}$.

Exercice 4

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq 1 - \cos t \leq \min(\frac{t^2}{2}, 2)$, puis que pour tout $t > 0$, on a $0 \leq \frac{1 - \cos t}{t} \leq 1$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On pose alors

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_{]0, +\infty[} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} d\lambda(t).$$

3. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $F'(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$.
Indication : on pourra commencer par prendre $x \in]a, +\infty[$, où on a choisi un réel $a > 0$ quelconque.
4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = 0$. En déduire que

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2} \log(1 + x^{-2}).$$

5. On pose pour $x > 0$:

$$G(x) = \int_{]0, +\infty[} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} d\lambda(t).$$

Vérifier que G est bien définie, puis montrer que G est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $G' = -F$.

6. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0 \quad G(x) = C - \frac{x}{2} \log(1 + x^{-2}) - \operatorname{atan} x.$$

7. Déterminer la valeur de C .

8. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

(On commencera par montrer que l'intégrale converge.)

FIN