Université de Nancy I **Licence 3**

Intégration et Probabilités

Examen du 22 octobre 2010

Commentaires généraux

43 étudiants ont composé, aucune copie vide n'a été rendue. Le sujet était un peu long, aussi le barème était-il sur 31.5. Les notes ont en suite été multipliées par 1.1, puis arrondies au demi-entier le plus proche. Ainsi la meilleure note possible était de 35. La meilleure note observée est 31, ramenée à 20 ainsi que 29 et 21,5. De près suivent un 20 et un 19. La médiane est de 6,5 le premier quartile de 12,5 et le troisième quartile de 4,5. La moyenne des notes (après écrétage à 20) est de 8,43.

Exercice 1

Le premier exercice est la seule partie de l'épreuve qui portait exclusivement sur le programme de L3. La première question s'est révélée discriminante, puisque seule une dizaine de personnes l'a traitée correctement. On a trouvé l'erreur suivante dans plusieurs copies : des personnes pensent que pour montrer qu'un ensemble $\mathcal{A}$ est une tribu, il n'est pas nécessaire de vérifier que $\varnothing \in \mathcal{A}$, puisque $\mathcal{A}$ est dans toutes les tribus. C'est évidemment un raisonnement circulaire et une erreur.

1. Bien sûr les singletons sont dans la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Réciproquement, pour A dans $\mathcal{P}(\Omega)$, on peut écrire $A = \cup_{x\in A}\{x\}$ et A apparaît comme réunion finie d'éléments de la tribu engendrée par les singletons, donc est dans la tribu engendrée par les singletons.
2. (a) Il faut vérifier
   - que $\varnothing \in \mathcal{A}$: c'est évident, car pour tout x, les deux termes de l'équivalence sont toujours faux.
   - que $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire. Supposons $A \in \mathcal{A}$. On a
   $$\forall x \in \{1,\dots,2n\} \quad (x \in A) \iff (2n+1-x) \in A.$$
   soit
   $$\forall x \in \{1,\dots,2n\} \quad (x \notin A) \iff (2n+1-x) \notin A,$$
   soit
   $$\forall x \in \{1,\dots,2n\} \quad (x \in A^c) \iff (2n+1-x) \in A^c,$$
   ce qui montre que $A^c \in \mathcal{A}$.
   - Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Montrons que $A = \cup_{in\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$. Soit $x \in A$: il existe n tel que $x \in A_n$. Mais $A_n \in \mathcal{A}$, donc $2n+1-x \in A_n$, d'où $2n+1-x \in A$. On a donc montré
   $$\forall x \in \{1,\dots,2n\} \quad (x \in A) \Longrightarrow (2n+1-x) \in A.$$
   Mais si $(2n+1-x) \in A$, l'implication qu'on vient de montrer donne $2n+1-(2n+1-x) = x \in A$, ce qui donne l'implication réciproque. Ainsi $A \in \mathcal{A}$

   On a donc montré que $\mathcal{A}$ est une tribu.

(b) Comme $\mathcal{P}(\Omega)$ est engendrée par les singletons, il suffit de montrer que pour tout $y \in \Omega$, $\psi^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{A}$. Or $\psi^{-1}(\{y\}) = \{y, 2n+1-y\}$ et il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned}(x \in \{y, 2n+1-y\}) &\iff (x = y)\text{ou } (x + y = 2n+1) \\ &\iff (2n+1-x \in \{y, 2n+1-y\}),\end{aligned}$$

donc $\psi^{-1}(\{y\}) = \{y, 2n+1-y\} \in \mathcal{A}$.

Exercice 2

L'exercice 2 portait sur les probabilités de base, telles qu'enseignées en L2 et révisées au début de L3. La principale difficulté était le petit nombre d'indications, qui demandait au candidat de prendre un certain nombre d'initiatives.

Le maniement des inégalités semble poser difficulté à de nombreux candidats ; par exemple l'inégalité $1 - \frac{1}{(i+1)^2} \geq 1 - \frac{1}{i(i+1)}$ a fait couler beaucoup plus d'encre que nécessaire. Il faut apprendre à reconnaitre les inégalités faciles, qui rapportent souvent peu (voire pas) de points, mais servent d'aide à la résolution des questions suivantes.

En revanche, à d'autres endroits, on a revelé des raisonnements extravagants du type "tous les termes du produit sont plus grands que 1/2, donc le produit est plus grand que 1/2". Il est bon de réserver quelques minutes pour relire la copie et y retirer de telles bévues qui nuisent énormément au crédit que le correcteur accorde à la copie.

Quelques candidats pensent que pour montrer que $f \geq g$ sur $[a, b]$, il suffit de mondrer que $f(a) \geq g(a)$ et $f(b) \geq g(b)$. En toute généralité, ce n'est pas vrai, même si f et g sont croissantes. Ce sera vrai par exemple si $f - g$ est monotone ou si $f - g$ est convexe.

Quelques candidats laissent penser qu'une limite de nombres strictement positifs est toujours strictement positive. C'est bien sûr faux. Rappelons que les conditions qui "passent à la limite" sont celles qui traduisent l'appartenance à un fermé (les inégalités larges). A l'inverse, les conditions ouvertes permettent, à partir des propriétés de la limite, d'obtenir des propriétés des termes de la suite d'index suffisamment grand.

On déplore enfin quelques écritures absurdes confondant probabilités et événements ($\mathbb{P}(A)^c$ par exemple).

1. Comme $A_{n+1} \subset A_n$, on a $\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) = \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n)/\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n+1})/\mathbb{P}(A_n)$: ainsi

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) = \left(1 - \mathbb{P}(A_{n+1}^c|A_n)\right)\mathbb{P}(A_n),$$

d'où par récurrence

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(A_1) \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \mathbb{P}(A_{i+1}^c|A_i)\right) \\ &\geq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right) \\ &\geq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{i(i+1)}\right)\end{aligned}$$

2. Posons $f(x) = 2x + \log(1-x)$. On a $f(0) = 0$ et $f'(x) = 2 - \frac{1}{1-x} \geq 0$ pour $x \in [0, 1/2]$, d'où $f(x) \geq 0$ pour $x \in [0, 1/2]$

$$\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{i(i+1)}\right) = \exp(-\left(\sum_{i=1}^{n-1} - \log(1 - \frac{1}{i(i+1)})\right)$$

Or pour $i \geq 1$, $\frac{1}{i(i+1)} \leq \frac{1}{2}$, donc $-\log(1-\frac{1}{i(i+1)}) \leq \frac{2}{i(i+1)}$, ce qui nous fait

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{i(i+1)}\right) &\geq \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{2}{i(i+1)}\right)\right)\\ &\geq \exp(-(2-\frac{2}{n})) \geq \exp(-2),\end{aligned}$$

d'où $\mathbb{P}(A_n) \geq \frac{1}{2}\exp(-2) = \frac{1}{2e^2}$.

3. D'après le théorème de continuité séquentielle décroissante,

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n) \geq \frac{1}{2e^2} > 0.$$

Problème

Le problème testait la familiarité avec les limites supérieures (questions 3,6,7a,7b,8) et avec les techniques de majoration et de minoration en analyse. Pour la majorité des candidats, l'habileté calculatrice s'est malheureusement souvent révélée en deça des attentes, avec même des erreurs sur le sens des inégalités. Seule une pratique régulière du calcul (en particulier en TD, mais pas seulement) permettra d'éviter ces erreurs.

Rappelons que des réponses partielles peuvent obtenir des points. Par exemple, un candidat ayant donné à la première question une majoration double de la réponse attendue s'est vu attribuer la totalité des points, étant donné que cette majoration aurait elle aussi suffit à démontrer le résultat final du problème. En revanche, les tentatives de bluff ont comme principal effet de contrarier le correcteur.

Un gros effort doit être porté sur la rédaction : trop souvent, on ne lit qu'une suite d'inégalités sans justification, parfois séparées par des connecteurs logiques hasardeux. Rappelons le : ce n'est pas au correcteur de deviner quels arguments permettent de passer d'une ligne à l'autre. Si le correcteur ne comprend pas, la note attribuée à la question est égale à zéro.

1. Comme h est croissante,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{h(k)}{k(k+1)} &\geq \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{h(n)}{k(k+1)}\\ &= h(n)\sum_{k=n}^{2n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = h(n)(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}) = \frac{h(n)}{2n},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. On a

$$\frac{h(n)}{n} \leq 2\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{h(k)}{k(k+1)} \leq 2r_n \text{ avec } r_n = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{h(k)}{k(k+1)}$$

Comme r_n est le reste d'une série convergente, il est de limite nulle, d'où le résultat voulu.

3. L'équation de presque-sous-additivité donne

$$\phi(pN+r) \leq \phi(pN) + \phi(r) + h(pN+r).$$

Or h est croissante et $pN + r \leq pN + N = (p+1)N$, d'où

$$\phi(pN+r) \leq \phi(pN) + \phi(r) + h((p+1)N).$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\phi(pN+r)}{pN+r} &\le \frac{\phi(pN)}{pN+r}+\frac{\phi(r)}{pN+r}+\frac{h((p+1)N)}{pN+r}\\ &= \frac{\phi(pN)}{pN+r}+\frac{\phi(r)}{pN+r}+\frac{(p+1)N}{pN+r}\frac{h((p+1)N)}{(p+1)N}\end{aligned}$$

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\phi(r)}{pN+r}+\frac{(p+1)N}{pN+r}\frac{h((p+1)N)}{(p+1)N}=0+\frac{p+1}{p}.0=0,$$

d'où

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{N\to+\infty}}\frac{\phi(pN+r)}{pN+r} &\le \overline{\lim_{N\to+\infty}}\frac{\phi(pN)}{pN+r}\\ &= \overline{\lim_{N\to+\infty}}\frac{\phi(pN)}{pN}\frac{pN}{pN+r}\\ &= \overline{\lim_{N\to+\infty}}\frac{\phi(pN)}{pN}.\end{aligned}$$

4. On note

$$(H_n):\forall N\in\mathbb{N}\quad \frac{\phi(2^nN)}{2^n}\le\phi(N)+\sum_{i=1}^{n}\frac{h(2^iN)}{2^i}.$$

(H_0) est immédiat. Comme $2^{n+1}N=2^nN+2^nN$, on a

$$\phi(2^{n+1}N)\le\phi(2^nN)+\phi(2^nN)+h(2^{n+1}N),$$

$$\text{d'où }\frac{\phi(2^{n+1}N)}{2^{n+1}}\le\frac{\phi(2^nN)}{2^n}+\frac{h(2^{n+1}N)}{2^{n+1}}$$

Ainsi $(H_n)\Longrightarrow(H_{n+1})$, ce qui donne le résultat par récurrence.

5. (a) On a $s_n=s_{n-1}+a_n2^n$, de sorte que si $a_n=0$, $s_n=s_{n-1}$, et l'inégalité découle immédiatement de la positivité de h. Si $a_n=1$, on a

$$\begin{aligned}\phi(s_nN) &= \phi(s_{n-1}N+2^nN)\\ &\le \phi(s_{n-1}N)+\phi(2^nN)+h(s_NN)\\ &\le \phi(s_{n-1}N)+\phi(2^nN)+h(2^{n+1}N),\end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient de la croissance de h et de

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}2^ka_k\le\sum_{k=0}^{n}2^k=2^{n+1}-1\le 2^{n+1}.$$

Cela donne l'inégalité voulue.

(b) On somme l'inégalité du (a) pour n variant de 0 à ℓ : le membre de gauche est égal à $\phi(s_\ell N)-\phi(s_{-1}N)=\phi(pN)-\phi(0)=\phi(pN)$ tandis que le membre de droite vaut

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\ell}\left(a_n\phi(2^nN)+h(2^{n+1}N)\right)\\ \le\;&\sum_{n=0}^{\ell}\left(a_n\left(2^n\phi(N)+\sum_{i=1}^{n}\frac{h(2^iN)}{2^i}2^n\right)+h(2^{n+1}N)\right)\\ \le\;&\sum_{n=0}^{\ell}\left(\left(a_n2^n\phi(N)+\sum_{i=1}^{n}\frac{h(2^iN)}{2^i}2^n\right)+h(2^{n+1}N)\right)\\ &=\left(\sum_{n=0}^{\ell}a_n2^n\right)\phi(N)+\sum_{n=0}^{\ell}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{h(2^iN)}{2^i}2^n\right)+h(2^{n+1}N)\right)\\ &=p\phi(N)+2^{\ell+1}\sum_{i=1}^{\ell+1}\frac{h(2^iN)}{2^i},\end{aligned}$$

vu l'identité admise

$$\sum_{n=0}^{\ell}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{h(2^iN)}{2^i}2^n+h(2^{n+1}N)\right)=2^{\ell+1}\sum_{i=1}^{\ell+1}\frac{h(2^iN)}{2^i}.$$

Comme $p\geq 2^\ell$, on a alors $\phi(pN)\leq p\phi(N)+2p\sum_{i=1}^{\ell+1}\frac{h(2^iN)}{2^i}$.

(c) On a $\phi(pN)\leq p\phi(N)+2pN\sum_{i=1}^{\ell+1}\frac{h(2^iN)}{2^iN}$. Cependant, en injectant dans (2), on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\ell+1}\frac{h(2^iN)}{2^iN} &\leq 2\sum_{i=1}^{\ell+1}\sum_{k=2^iN}^{2^{i+1}N-1}\frac{h(k)}{k(k+1)}\\ &=2\sum_{k=2N}^{2^{\ell+2}N-1}\frac{h(k)}{k(k+1)}\\ &\leq 2\sum_{k=2N}^{+\infty}\frac{h(k)}{k(k+1)},\end{aligned}$$

$$\text{d'où } \phi(pN)\leq p\phi(N)+4pN\sum_{k=2N}^{+\infty}\frac{h(k)}{k(k+1)}. \qquad (1)$$

6. En prenant $N=1$ dans l'inégalité (1), on a

$$\phi(p)\leq p\phi(1)+4p\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{h(k)}{k(k+1)}\leq p\phi(1)+4pS,$$

d'où $L\leq\phi(1)+4S<+\infty$.

7. (a) Comme la série de terme général $\frac{h(k)}{k(k+1)}$ converge, les restes r_{2N} tendent vers zéro : il existe N_0 tel que $N\geq N_0$ entraîne $\sum_{k=2N}^{+\infty}\frac{h(k)}{k(k+1)}\leq\varepsilon$. Maitenant, la définition de la limite inférieure d'une suite entraîne qu'il existe $N\geq N_0$ tel que $\frac{\phi(N)}{N}\leq L'$. N vérifie les conditions voulues.

(b) En divisant l'inégalité (1) par N, on a

$$\frac{\phi(pN)}{pN}\leq\frac{\phi(N)}{N}+4\sum_{k=2N}^{+\infty}\frac{h(k)}{k(k+1)}\leq L'+4\varepsilon,$$

d'où en passant à la limite supérieure :

$$\overline{\lim_{p\to+\infty}}\frac{\phi(pN)}{pN}\leq L'+4\varepsilon.$$

8. Comme $\varepsilon>0$ est quelconque, on peut le faire tendre vers 0 dans l'inégalité, et on a

$$\overline{\lim_{p\to+\infty}}\frac{\phi(pN)}{pN}\leq L'.$$

Comme

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\phi(n)}{n}\leq\overline{\lim_{p\to+\infty}}\frac{\phi(pN)}{pN},$$

on obtient bien

$$\forall L'>L\qquad\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\phi(n)}{n}\leq L'.$$

En prenant la borne inférieure sur tous les $L'>L$, on a

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\phi(n)}{n}\leq L=\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\phi(n)}{n}\leq\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\phi(n)}{n}$$

(la dernière inégalité est toujours réalisée.) Finalement

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\phi(n)}{n} = \underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\phi(n)}{n} = L,$$

qui est donc la limite de $\frac{\phi(n)}{n}$.

FIN