Université de Nancy I **Licence 3**

Intégration et Probabilités

Examen du 12 janvier 2010

durée 3h

Exercice 1 ($\approx$ 7 points)

1. On sait que pour tout $u \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$. En particulier, pour $x \in [0,1[$, $-x^3 \in]-1,1[$ et on a $\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n}$. Posons pour $x \in [0,1]$ et $N \geq 1$: $f_N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n}$. On a $f_N(x) = \frac{1-(-x^3)^{N+1}}{1+x^3}$, d'où $|f_N(x)| \leq \frac{|1|+|x|^{3(N+1)}}{1+x^3} \leq \frac{2}{1+x^3} = g(x)$. Comme g est bornée sur $[0,1]$, g y est intégrable. On sait que pour $x \in [0,1[$, $\lim_{N\to+\infty} f_N(x) = \frac{1}{1+x^3}$. Ainsi sur $[0,1]$ $f_N(x)$ converge λ-presque sûrement vers $\frac{1}{1+x^3}$ lorsque N tend vers l'infini. D'après le théorème de convergence dominée, on a donc
$$\int_{[0,1]} \frac{1}{x^3+1}\, d\lambda(x) = \lim_{N\to+\infty} \int_{[0,1]} f_N(x)\, d\lambda(x).$$
Comme les fonctions considérées sont toutes continues sur un compact, on peut réécrire cela en
$$\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\, dx = \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 f_N(x)\, dx.$$
Un calcul facile donne $\int_0^1 f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{3n+1}$, d'où
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}.$$

2. On admet que
$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right).$$
Notons que
$$\frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x-4}{x^2-x+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1-3}{x^2-x+1}\right)$$
(On a fait apparaître la dérivée du dénominateur au numérateur.) Ainsi
$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} - \frac{x-2}{x^2-x+1} &= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{(x-1/2)^2+3/4} \\
&= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + 2\frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2+1} \\
&= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \sqrt{3}\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, une primitive de $\frac{1}{1+x} - \frac{x-2}{x^2-x+1}$ est

$$F(x) = \log(1+x) - \frac{1}{2}\log(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}),$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\, dx &= F(1) - F(0) \\ &= (\log 2 + \sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}) - (-\sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}) \\ &= \log 2 + 2\sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \log 2 + 2\sqrt{3}\frac{\pi}{6} = \log 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

En effet $\tan\pi/6 = \frac{\sin\pi/6}{\cos\pi/6} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Et finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+x} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\, dx = \frac{3\log 2 + \sqrt{3}\pi}{9}.$$

Exercice 2 ($\approx$ 4 points)

1.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n \geq 1) &= \mathbb{P}_{X_n}([1,+\infty[) \\ &= \int_{[1,+\infty[} d\mathbb{P}_{X_n} \\ &= \int_{[1,+\infty[} 2\log(1+n)\exp(-(2\log(1+n)x)\, d\lambda(x) \\ &= \exp(-(2\log(1+n)) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

donc $A = 1$ convient

2. La série de terme général $\mathbb{P}(X_n \geq 1)$ converge, donc d'après le lemme de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(\overline{\lim}_{n\to+\infty} \{X_n \geq 1\}) = 0$, d'où $\mathbb{P}(\underline{\lim}_{n\to+\infty} \{X_n < 1\}) = 1$, ce qui veut dire que $\mathbb{P}$-presque sûrement, les X_n sont strictement inférieurs à 1 à partir d'un certain rang.

Problème ($\approx$ 19 points)

Soit $p_0 > 1$ et X une variable aléatoire positive telle que $X \in L^{p_0}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour $p \in]0, p_0]$, on pose $N(p) = (\mathbb{E}[X^p])^{1/p}$.

1. On sait que si on a sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ une fonction g sur Ω et $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ avec
   – Pour tout $t \in I$, $|f(x,t)| \leq g(x)$ μ presque partout
   – $t \mapsto f(x,t)$ continue pour μ presque tout x
   – $\int g(x)\, d\mu(x) < +\infty$
   Alors $t \mapsto \int f(x,t)\, d\mu(x)$ est bien définie et continue sur I. Ici, il suffit de prendre $f(.,t) = X_t$, $g = Y$ et $\mu = \mathbb{P}$.
2. Supposons $0 < p < p' \leq p_0$. Soient α, β avec $\alpha > 1$ et $1/\alpha + 1/\beta = 1$. D'après l'inégalité de Hölder

$$\mathbb{E}[X^p.1] \leq \mathbb{E}[X^{p\alpha}]^{1/\alpha}\mathbb{E}[1^\beta]^{1/\beta},$$

soit $\mathbb{E}[X^p] \leq \mathbb{E}[X^{p\alpha}]^{1/\alpha}$, ou encore $(\mathbb{E}[X^p])^{1/p} \leq \mathbb{E}[X^{p\alpha}]^{1/(p\alpha)}$. Il suffit de prendre α tel que $p\alpha = p'$, soit $\alpha = p'/p > 1$, et on obtient $N(p) \leq N(p')$, ce qui est le résultat voulu.

3. $p \mapsto N(p)$ est croissante, minorée par 0, donc admet une limite lorsque p tend vers 0 par valeurs supérieures. Dans le cas où X suit la loi uniforme sur $[0,1]$, on a pour $p > 0$, avec le théorème de transfert : $\mathbb{E}[X^p] = \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{[0,1]}(x) x^p \, d\lambda(x) = \int_0^1 x^p \, dx = \frac{1}{p+1}$, d'où $N(p) = (1/(p+1))^{1/p}$, d'om

$$\log N(p) = \frac{1}{p} \log(\frac{1}{p+1}) = -\frac{1}{p} \log(1+p).$$

Or $\log(1+p) \sim p$, donc $\lim\limits_{p \to 0} \log N(p) = -1$, d'où par continuité de l'exponentielle

$$\lim_{p \to 0} N(p) = e^{-1}.$$

4. Si $X(\omega) \leq 1$, alors $0 \leq X(\omega)^p \leq 1$. Si $X(\omega) > 1$, alors $0 \leq X(\omega)^p \leq X(\omega)^{p_0}$. Dans les deux cas, $X(\omega) \leq 1 + X(\omega)^{p_0}$, soit $X^p \leq 1 + X^{p_0}$. On va alors appliquer le 1) avec $X_p = X^p$ et $Y = 1 + X^{p_0}$. En effet, il est facile de voir que pour tout $\omega \in \Omega$, $p \mapsto X(\omega)^p$ est continue sur $]0, p_0]$. Or $|X_p| = |X^p| = X^p \leq 1 + X^{p_0}$ et $\mathbb{E}[1 + X^{p_0}] = 1 + \mathbb{E}[X^{p_0}] < + \times \infty$. Ainsi $p \mapsto \mathbb{E}[X^p]$ est continue sur $]0, p_0]$. Par suite, l'application $p \mapsto (\mathbb{E}[X^p], p)$ est continue sur $]0, p_0]$ Comme $(x, y) \mapsto x^{1/y}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, par composition $p \mapsto N(p)$ est aussi continue sur $]0, p_0]$.

5. Comme F est mesurable positive, on peut appliquer le théorème de Tonelli.

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} F(x,t) \, d(\mathbb{P}_X \otimes \lambda)(x,t) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}_+} F(x,t) \, d\lambda(t) \right) \, d\mathbb{P}_X(x)$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} F(x,t) \, d\lambda(t) &= \int_{\mathbb{R}_+} pt^{p-1} 1\!\!1_{\{t \leq x\}} \, d\lambda(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} pt^{p-1} 1\!\!1_{[0,x]}(t) \, d\lambda(t) \\
&= \int_0^x pt^{p-1} \, dt = x^p
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}_+} F(x,t) \, d\lambda(t) \right) \, d\mathbb{P}_X(x) &= \int_{\mathbb{R}_+} x^p \, d\mathbb{P}_X(x) \\
&= \int_{\Omega} X^p \, d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \mathbb{E}[X^p] \leq 1 + \mathbb{E}[X^{p_0}] < +\infty
\end{aligned}$$

ce qui donne la première assertion. D'un autre côté, toujours avec Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} F(x,t) \, d(\mathbb{P}_X \otimes \lambda)(x,t) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}_+} F(x,t) \, d\mathbb{P}_X(x) \right) \, d\lambda(t).$$

Or

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+} F(x,t)\; d\mathbb{P}_X(x) &= \int_{\mathbb{R}_+} pt^{p-1}1\!\!1_{\{t\leq x\}}\; d\mathbb{P}_X(x)\\ &= pt^{p-1}\int_{\mathbb{R}_+} 1\!\!1_{\{t\leq x\}}\; d\mathbb{P}_X(x)\\ &= pt^{p-1}\int_{\mathbb{R}_+} 1\!\!1_{[t,+\infty[}(x)\; d\mathbb{P}_X(x)\\ &= pt^{p-1}\mathbb{P}_X([t,+\infty[)\\ &= pt^{p-1}\mathbb{P}(X\geq t)\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_{[0,+\infty[} pt^{p-1}\mathbb{P}(X\geq t)\; d\lambda(t).$$

6. (a) $\log x = \frac{1}{p_0-p_2}\log x^{p_0-p_2} \leq \frac{1}{p_0-p_2}x^{p_0-p_2}$ car pour tout $y>0$,

$$\log(y)\leq \log(1+y)\leq y.$$

De même pour $x<1$,

$$-\log x = \log\frac{1}{x} = \frac{1}{p_1/2}\log(\frac{1}{x})^{p_1/2} \leq \frac{1}{p_1/2}(\frac{1}{x})^{p_1/2} = \frac{2}{p_1}x^{-p_1/2}.$$

(b) D'après ce qui précède,

$$\Psi(x)\leq x^{p_1-1}(1+p_2Bx^{-p_1/2})1\!\!1_{[0,1]}(x)+(1+p_2Ax^{p_0-p_2})x^{p_2-1}\mathbb{P}(X\geq x)1\!\!1_{]1,+\infty[}(x).$$

Il n'est pas difficile de voir que

$$\int_{]0,+\infty[} x^{p_1-1}(1+p_2Bx^{-p_1/2})1\!\!1_{[0,1]}(x) = \int_0^1 x^{p_1-1}+p_2Bx^{p_1/2-1}\; dx = \frac{2Bp_2+1}{p_1}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\int_{]0,+\infty[} x^{p_2-1}\mathbb{P}(X\geq x)1\!\!1_{]1,+\infty[}(x)\; d\lambda(x) &\leq \int_{]0,+\infty[} x^{p_2-1}\mathbb{P}(X\geq x)\; d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{p_2}\int_{]0,+\infty[} p_2x^{p_2-1}\mathbb{P}(X\geq x)\; d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{p_2}\mathbb{E}[X^{p_2}]\end{aligned}$$

De même,

$$\int_{]0,+\infty[} x^{p_0-1}\mathbb{P}(X\geq x)1\!\!1_{]1,+\infty[}(x)\; d\lambda(x) \leq \frac{1}{p_0}\mathbb{E}[X^{p_0}],$$

ce qui nous donne finalement

$$\int_{]0,+\infty[}\Psi(x)\; d\lambda(x) \leq \frac{2Bp_2+1}{p_1} + \frac{p_2}{p_0}A\mathbb{E}[X^{p_0}] + \frac{1}{p_2}\mathbb{E}[X^{p_2}].$$

(c) On applique le théorème “de dérivation sous le signe somme”. On sait que

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_{[0,+\infty[} pt^{p-1}\mathbb{P}(X\geq t)\; d\lambda(t).$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p}\left(pt^{p-1}\mathbb{P}(X\geq t)\right) &= \mathbb{P}(X\geq t)\frac{\partial}{\partial p}\left(pt^{p-1}\right)\\
&= \mathbb{P}(X\geq t)\frac{\partial}{\partial p}\left(p\exp((p-1)\log t)\right)\\
&= \mathbb{P}(X\geq t)\left(\exp((p-1)\log t)+p\log t\exp((p-1)\log t)\right)\\
&= \mathbb{P}(X\geq t)t^{p-1}(1+p\log t)
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
|\frac{\partial}{\partial p}\left(pt^{p-1}\mathbb{P}(X\geq t)\right)| &\leq \mathbb{P}(X\geq t)t^{p-1}(1+p|\log t|)\\
&\leq \mathbb{P}(X\geq t)t^{p-1}(1+p_2|\log t|)
\end{aligned}$$

Sur $]0,1]$,on a la majoration

$$\mathbb{P}(X\geq t)t^{p-1}(1+p_2|\log t|)\leq \mathbb{P}(X\geq t)t^{p_1-1}(1+p_2|\log t|)=\mathbb{P}(X\geq t)t^{p_1-1}(1-p_2\log t)$$

tandis que sur $]1,+\infty$, on a la majoration

$$\mathbb{P}(X\geq t)t^{p-1}(1+p_2|\log t|)\leq \mathbb{P}(X\geq t)t^{p_2-1}(1+p_2|\log t|)=\mathbb{P}(X\geq t)t^{p_1-1}(1+p_2\log t),$$

d'où finalement dans tous les cas

$$|\frac{\partial}{\partial p}\left(pt^{p-1}\mathbb{P}(X\geq t)\right)|\leq \Psi(t).$$

Or, d'après la question précédente, Ψ est intégrable : on obtient donc que $p\mapsto \mathbb{E}[X^p]$ est C^1 sur $]p_1,p_2[$. Par composition avec la fonction C^1 : $x\mapsto x^{1/p}$, $p\mapsto N(p)$ est C^1 sur $]p_1,p_2[$. Cependant, comme la régularité C^1 est une propriété locale et que $]0,p_0[$ est réunion des intervalles $]p_1,p_2[$, où p_1,p_2 décrivent tous les couples possibles avec $0<p_1<p_2<p_0$, on obtient finalement que $p\mapsto \mathbb{E}[X^p]$ est C^1 sur $]0,p_0[$. Par suite, l'application $p\mapsto(\mathbb{E}[X^p],p)$ est C^1 sur $]0,p_0]$ Comme $(x,y)\mapsto x^{1/y}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$, par composition $p\mapsto N(p)$ est aussi C^1 sur $]0,p_0]$.

7. (a) Par définition de $\|X\|_{\infty,\text{ess}}$, on a $\mathbb{P}(X\geq M)=0$, d'où $0\leq X\leq M$ $\mathbb{P}$ presque sûrement, $0\leq X^p\leq M^p$ $\mathbb{P}$ presque sûrement, d'où $0\leq \mathbb{E}[X^p]\leq M^p$, d'où en élevant à la puissance $1/p$: $N(p)\leq M<+\infty$ ce qui entraîne que X est dans L^p. Soit $M>\|X\|_{\infty,\text{ess}}$. Montrer que pour tout $p>1$, $X\in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ avec $N(p)\leq M$.

   (b) Soit $M>\|X\|_{\infty,\text{ess}}$. Comme pour tout $p>0$, on a $N(p)\leq M$, il s'ensuit que $\overline{\lim\limits_{p\to+\infty}}\ N(p)\leq M$. En passant à la borne inférieure sur tous les $M>\|X\|_{\infty,\text{ess}}$, on obtient $\overline{\lim\limits_{p\to+\infty}}\ N(p)\leq\|X\|_{\infty,\text{ess}}$.

   (c) Par définition de $\|X\|_{\infty,\text{ess}}$, il existe $M'\geq M$ tel que $\mathbb{P}(X\geq M')>0$, ce qui entraîne $\mathbb{P}(X\geq M)>0$. D'après l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(X\geq M)=\mathbb{P}((X^p\geq M^p)\leq\frac{\mathbb{E}[X^p]}{M^p},$$

soit $\mathbb{E}[X^p]\geq M^p\mathbb{P}(X\geq M)$, soit encore $N(p)\geq M\mathbb{P}(X\geq M)^{1/p}$. On en déduit

$$\underline{\lim}_{p\to+\infty}\ N(p)\geq \underline{\lim}_{p\to+\infty}\ M\mathbb{P}(X\geq M)^{1/p}.$$

Cependant $\lim_{p\to+\infty} M\mathbb{P}(X \geq M)^{1/p} = M$ (en effet pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{p\to+\infty} \alpha^{1/p} = 1$) , d'où

$$\varliminf_{p\to+\infty} N(p) \geq M.$$

Ainsi, pour tout $M < \|X\|_{\infty,\text{ess}}$, $\varliminf_{p\to+\infty} N(p) \geq M$. En passant à la borne supérieure sur tous les $M < \|X\|_{\infty,\text{ess}}$, on obtient $\varliminf_{p\to+\infty} N(p) \geq \|X\|_{\infty,\text{ess}}$.
Soit $M < \|X\|_{\infty,\text{ess}}$. Montrer que pour tout $p > 1$,

$$N(p) \geq M\mathbb{P}(X \geq M)^{1/p},$$

puis que $\varliminf_{p\to+\infty} N(p) \geq M$.

(d) On a

$$\|X\|_{\infty,\text{ess}} \leq \varliminf_{p\to+\infty} N(p) \leq \varlimsup_{p\to+\infty} N(p) \leq \|X\|_{\infty,\text{ess}},$$

d'où

$$\|X\|_{\infty,\text{ess}} = \varliminf_{p\to+\infty} N(p) = \varlimsup_{p\to+\infty} N(p),$$

soit $\lim_{p\to+\infty} N(p) = \|X\|_{\infty,\text{ess}}$.

FIN