Rappels et notations

On travaille dans le plan complexe $\mathbb{C}$. On note $\bar{z}$ le conjugué de $z \in \mathbb{C}$, $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ son module et $\Re(z), \Im(z)$ ses parties réelle et imaginaire. Soit $D(z,r) = \{w \in \mathbb{C}\,,\ |z-w| < r\}$ le disque ouvert centré en z et de rayon r. On note plus simplement $D_r = D(0,r)$ et $D = D(0,1)$. Soient $\mathcal{S}^1$ le cercle $\{|z| = 1\}$ et $\Omega = \{z \in \mathbb{C}\,,\ |z| > 1\}$. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels et des entiers relatifs. On note e^z l'exponentielle de $z \in \mathbb{C}$ et $\ln(x)$ le logarithme népérien du réel $x > 0$.

Soient des réels $a < b$ et $\rho : [a,b] \to \mathbb{C}$ un arc paramétré de classe C^∞. Le *support* de ρ est l'ensemble $\mathrm{supp}(\rho) = \rho([a,b])$. Lorsque ρ est injectif, la *longueur* de son support est égale à $\int_a^b |\rho'(t)|\,dt$. On suppose à présent $\rho(a) = \rho(b)$. L'*indice* de ρ par rapport à un point $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\rho)$ est alors défini par :

$$\mathsf{ind}(\rho, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\rho \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\rho'(t)}{\rho(t) - z}\,dt.$$

L'indice est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. La fonction $z \mapsto \mathsf{ind}(\rho, z)$ est *constante* sur les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\rho)$.

Nous adopterons la terminologie suivante. Un *lacet* est un arc paramétré $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ de classe C^∞, *injectif* sur $[0, 2\pi[$, vérifiant $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, et qui se prolonge en une application $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ et 2π-périodique. Les cercles concentriques $\gamma_r(t) = re^{it}$ sont bien sûr des lacets. On dispose du :

Théorème de Jordan : *Si γ est un lacet, alors $\mathbb{C} \setminus supp(\gamma)$ possède exactement deux composantes connexes, une étant bornée et l'autre non.*

On note ces composantes $\mathcal{B}(\gamma)$ (celle qui est bornée) et $\mathcal{U}(\gamma)$ (celle non bornée). La fonction $z \mapsto \mathsf{ind}(\gamma, z)$ est nulle sur $\mathcal{U}(\gamma)$ et constante sur $\mathcal{B}(\gamma)$, égale à 1 ou -1. Un lacet γ est orienté dans le sens direct (resp. indirect) si l'indice vaut 1 (resp. -1) sur $\mathcal{B}(\gamma)$. La formule suivante permet de calculer l'aire de l'ouvert $\mathcal{B}(\gamma)$. Cette aire est par définition égale à $\iint_{\mathcal{B}(\gamma)} d\lambda$, où λ désigne la mesure de Lebesgue.

Formule de Green-Riemann : *Pour tout lacet γ orienté dans le sens direct,*

$$Aire(\mathcal{B}(\gamma)) = \frac{1}{2i} \int_\gamma \bar{z} dz = \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \overline{\gamma(t)}\, \gamma'(t) dt.$$

On rappelle enfin que si $h : D \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe qui *ne s'annule pas* sur D, alors h possède un logarithme, c'est à dire qu'il existe une fonction holomorphe $L : D \to \mathbb{C}$ telle que $h(z) = e^{L(z)}$ sur D.

L'épreuve comporte deux parties (9 pages). La partie II est une application du théorème B que l'on démontre dans la partie I. Il est conseillé de lire attentivement les parties explicatives 1.1 et 2.1.

Première partie

1.1 Présentation

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions holomorphes $f : D \to \mathbb{C}$ **injectives**, vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Le développement en série entière d'une fonction $f \in \mathcal{S}$ vérifie donc :

$$\forall z \in D \ , \ f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n.$$

Nous montrons dans cette partie le résultat suivant :

Théorème A (Bieberbach) : *Pour tout $f \in \mathcal{S}$, $|a_2| \leq 2$.*

Nous en déduirons le :

Corollaire : *Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$ et tout $z = re^{i\theta} \in D$, on a :*

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

Nous montrerons ensuite le :

Théorème B *: Soit $g : D(a,R) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe injective. Soient $\tau \in]0,1[$ et $r \leq \tau R$. Les inclusions suivantes sont vérifiées avec $K_\tau = (\frac{1+\tau}{1-\tau})^4$:*

$$D\left(g(a), \frac{|g'(a)|}{K_\tau} r\right) \subset g(D(a,r)) \subset D\Big(g(a), K_\tau |g'(a)| r\Big).$$

Nous appliquerons le théorème B dans la deuxième partie du problème.

1.2 Un résultat sur la classe $\mathcal{H}$

Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \ , \ |z| > 1\}$. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions holomorphes $h : \Omega \to \mathbb{C}$ **injectives** ayant un développement de Laurent de la forme :

$$\forall z \in \Omega \ , \ h(z) = z + \sum_{n \geq 0} b_n z^{-n}.$$

On rappelle que cette série de fonctions converge normalement sur $\Omega_r = \{z \in \mathbb{C} \ , \ |z| \geq r\}$, ceci pour tout $r > 1$. Les questions qui suivent sont destinées à montrer le

Théorème de l'aire *: Pour tout $h \in \mathcal{H}$, on a $|b_n| \leq n^{-1/2}$.*

Fixons à cet effet $h \in \mathcal{H}$. Pour tout $r > 1$, on définit $h_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ par $h_r = h \circ \gamma_r$, où le lacet $\gamma_r : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ est le cercle $\gamma_r(t) = re^{it}$. Puisque h est injective, l'application h_r définit clairement un lacet. On note

$$\mathcal{P}^+ = \{r > 1 \ \text{ tel que le lacet } h_r \text{ est orienté dans le sens direct}\},$$

$$\mathcal{P}^- = \{r > 1 \ \text{ tel que le lacet } h_r \text{ est orienté dans le sens indirect}\}.$$

Nous commençons par montrer que $\mathcal{P}^+$ et $\mathcal{P}^-$ sont des ouverts de $]1, +\infty[$. Fixons à cet effet $r_0 > 1$ et posons $r_1 = \frac{1+r_0}{2}$.

1.2.1) Soit $C(r_1) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{n|b_n|}{r_1^{n+1}}$. Vérifier que :

$$\sup_{|z| \geq r_1} |h'(z)| \leq C(r_1) < +\infty.$$

Montrer ensuite : $\forall r \geq r_1 \ , \ \forall t \in [0, 2\pi] \ , \ |h_r(t) - h_{r_0}(t)| \leq C(r_1)|r - r_0|$.

Soit z dans l'ouvert $\mathcal{B}(h_{r_0})$ et $\rho > 0$ tel que $D(z,\rho) \subset \mathcal{B}(h_{r_0})$.

1.2.2) Montrer qu'il existe un intervalle I_{r_0} de la forme $]r_0 - \alpha_0, r_0 + \alpha_0[$ (avec $\alpha_0 > 0$), inclus dans $]1, +\infty[$ et tel que :

$$\forall r \in I_{r_0}\ ,\ \forall t \in [0, 2\pi]\ ,\ |h_r(t) - h_{r_0}(t)| < |z - h_{r_0}(t)|.$$

1.2.3) Montrer que $\mathsf{ind}(h_r, z) = \mathsf{ind}(h_{r_0}, z)$ pour tout $r \in I_{r_0}$. On pourra introduire les lacets $\gamma_1 = h_r - z$, $\gamma_2 = h_{r_0} - z$ et établir une relation entre les indices (par rapport à l'origine) de γ_1, γ_2 et γ_1/γ_2.

1.2.4) En déduire que les ensembles $\mathcal{P}^+$ et $\mathcal{P}^-$ sont des ouverts de $]1, +\infty[$.

Nous montrons à présent qu'il existe $R > 0$ tel que $\mathsf{ind}(h_r, 0) = 1$ pour tout $r \geq R$. Ecrivons $h(z) = z + \varphi(z)$, ou encore $\varphi(z) = b_0 + \sum_{n\geq 1} b_n z^{-n}$.

1.2.5) Vérifier que $\mathsf{ind}(h_r, 0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{1+\varphi'(\xi)}{\xi+\varphi(\xi)} d\xi$.

1.2.6) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $|z| \geq 2$: $|\varphi(z)| \leq M$ et $|\varphi'(z)| \leq M/|z|$. En déduire l'existence de R vérifiant la propriété demandée.

1.2.7) Pourquoi $\mathcal{P}^+ =]1, +\infty[$?

1.2.8) Calculer l'aire de $\mathcal{B}(h_r)$ pour tout $r > 1$.

1.2.9) En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} n|b_n|^2 \leq 1$ et terminer la preuve du théorème de l'aire.

1.3 Preuve du théorème de Bieberbach

Soit $f \in \mathcal{S}$ et notons $f(z) = z + \sum_{n\geq 2} a_n z^n$ son développement en série entière. Il s'agit d'établir l'inégalité $|a_2| \leq 2$.

1.3.1) Montrer soigneusement qu'il existe une fonction $g : D \to \mathbb{C}$ impaire, élément de $\mathcal{S}$, telle que $g(z)^2 = f(z^2)$ pour tout $z \in D$.

Soit $g(z) = z + \sum_{p\geq 1} \alpha_{2p+1} z^{2p+1}$ le développement en série entière de g sur D.

1.3.2) Exprimer α_3 en fonction de a_2.

1.3.3) Vérifier que la fonction $h(z) = 1/g(z^{-1})$ définit un élément de $\mathcal{H}$.

Soit $h(z) = z + \sum_{n\geq 0} b_n z^{-n}$ le développement en série de Laurent de h sur Ω.

1.3.4) Exprimer b_1 en fonction de α_3 et conclure.

1.4 Preuve du corollaire

Soient $f \in \mathcal{S}$ et $z \in D$. Pour tout $w \in D$ on note :

$$\varphi_z(w) = \frac{z+w}{1+\bar{z}w} \quad , \quad f_z(w) = \frac{f \circ \varphi_z(w) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)}.$$

On rappelle que φ_z est un biholomorphisme de D.

1.4.1) Calculez f_z' en fonction de f' et vérifier que $f_z \in \mathcal{S}$.

1.4.2) Calculer $f_z''(w)$ en fonction de f' et f''. Montrer que :

$$\forall z = \rho e^{i\theta} \in D \quad , \quad \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2\rho^2}{1-\rho^2} \right| \leq \frac{4\rho}{1-\rho^2}.$$

On pourra utiliser le théorème de Bieberbach démontré dans la partie 1.3.

1.4.3) Vérifier les inégalités suivantes :

$$\forall z = \rho e^{i\theta} \in D \quad , \quad \frac{2\rho^2 - 4\rho}{1-\rho^2} \leq \Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \leq \frac{2\rho^2+4\rho}{1-\rho^2}.$$

1.4.4) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $L : D \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall z \in D \ , \ L'(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} \quad \text{et} \quad \Re(L(z)) = \ln|f'(z)|.$$

1.4.5) On note $\tilde{L} : [0,1[\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction $\tilde{L}(\rho,\theta) = L(\rho e^{i\theta})$. Montrer que :

$$\forall z = \rho e^{i\theta} \in D \quad , \quad \rho \, \frac{\partial\,(\Re\tilde{L})}{\partial\rho}(z) = \rho \times \Re\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\rho}(z)\right) = \Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right).$$

1.4.6) Déduire de 1.4.3 un encadrement de $\frac{\partial}{\partial\rho}\ln|f'(\rho e^{i\theta})|$ pour tout $\rho e^{i\theta} \in D$.

1.4.7) Montrer pour conclure :

$$\forall z = re^{i\theta} \in D \quad , \quad \frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

1.5 Preuve du théorème B

Soient $g : D(a,R) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe injective et $\tau \in]0,1[$. On rappelle que $K_\tau = (\frac{1+\tau}{1-\tau})^4$.

1.5.1) Montrer les inégalités suivantes. On pourra se ramener à une fonction de $\mathcal{S}$ en “reparamétrant” convenablement la fonction g.

$$\forall (w_1, w_2) \in D(a, \tau R) \times D(a, \tau R) \quad , \quad \frac{1}{K_\tau} \leq \frac{|g'(w_1)|}{|g'(w_2)|} \leq K_\tau.$$

1.5.2) Montrer pour tout $r \leq \tau R$:

$$D\left(g(a), \frac{|g'(a)|}{K_\tau} r\right) \subset g(D(a,r)) \subset D\Big(g(a), K_\tau |g'(a)| r\Big).$$

On fera un dessin pour accompagner la démonstration. Pour la première inclusion, on pourra considérer un point $b \in \partial D(a,r)$ vérifiant

$$|g(b) - g(a)| = \min_{c \in \partial D(a,r)} |g(c) - g(a)|$$

et introduire le segment $\sigma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\sigma(t) = (1-t)g(a) + tg(b)$. Une partie du raisonnement consiste à comparer les longueurs des supports de σ et $g^{-1} \circ \sigma$.

Deuxième partie

2.1 Présentation

On considère le polynôme $P_a(z) = z^2 + a$, où $a \in \mathbb{C}$ est un paramètre complexe. Pour tout $n \geq 0$, on note P_a^n le polynôme :

$$P_a^n = P_a \circ \ldots \circ P_a \quad , \quad \text{où } P_a \text{ est composé } n \text{ fois,}$$

avec la convention $P_a^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. On s'intéresse au comportement des suites $(P_a^n(z_0))_{n \geq 0}$, celui-ci dépend évidemment du point z_0 fixé dans $\mathbb{C}$.

Commençons par le cas $a = 0$, on note $Q = P_0$. Un calcul immédiat donne $Q^n(z) = z^{2^n}$ pour tout $n \geq 1$ et donc

- si $z_0 \in D = \{|z| < 1\}$, $\lim_{n\to\infty} |Q^n(z_0)| = 0$,
- si $z_0 \in \mathcal{S}^1 = \{|z| = 1\}$, $\lim_{n\to\infty} |Q^n(z_0)| = 1$,
- si $z_0 \in \Omega = \{|z| > 1\}$, $\lim_{n\to\infty} |Q^n(z_0)| = +\infty$.

Il apparaît naturellement la **partition** suivante de $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = D \cup \mathcal{S}^1 \cup \Omega. \tag{1}$$

Observons que $|Q'(z)| = 2$ pour tout $z \in \mathcal{S}^1$. On notera $\lambda_0 = 2$, $\omega_0 = D$, $\mathcal{J}_0 = \mathcal{S}^1$ et $\Omega_0 = \Omega$.

Nous **admettrons** les propriétés suivantes. Il existe $\nu > 0$ tel que si a appartient au disque D_ν, la dynamique du polynôme P_a "ressemble" à celle de P_0. Plus précisément, pour tout $a \in D_\nu$, il existe un compact $\mathcal{J}_a \subset \mathbb{C}$ qui partage $\mathbb{C}$ en deux ouverts connexes non vides ω_a (borné) et Ω_a (non borné), avec $0 \in \omega_a$. De plus,

- $\mathcal{J}_a$ est d'intérieur vide et

- il existe $\lambda_a > 1$ tel que $|P_a'(z)| \geq \lambda_a$ pour tout $z \in \mathcal{J}_a$.

Le compact $\mathcal{J}_a$ est une "déformation" du cercle $\mathcal{S}^1$, cet ensemble induit une **partition** de $\mathbb{C}$ comme dans (1) :

$$\mathbb{C} = \omega_a \cup \mathcal{J}_a \cup \Omega_a.$$

Précisons que $\mathcal{J}_a$ (pour $a \neq 0$) n'est pas une courbe lisse comme le cercle $\mathcal{S}^1$, mais un ensemble très irrégulier. On dit que $\mathcal{J}_a$ est un ensemble "fractal".

L'objectif de cette partie est d'établir que $\mathcal{J}_a$ est un ensemble "poreux".

Définition : *Soient $c \in]0,1[$. $\mathcal{J}_a$ est c-poreux si pour tout $z \in \mathcal{J}_a$ et pour tout $R \in]0,1]$ il existe $w \in D(z,R)$ tel que :*

$$D(w, cR) \subset D(z,R) \setminus \mathcal{J}_a.$$

On dit que $\mathcal{J}_a$ est poreux si il existe $c \in]0,1[$ tel que $\mathcal{J}_a$ est c-poreux.

2.1.1) Montrer que $\mathcal{J}_0 = \mathcal{S}^1$ est 1/2-poreux.

Nous terminons cette introduction avec la notion d'invariance. Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{C}$ est *P_a-invariant* si $P_a^{-1}(A) = A$, où $P_a^{-1}(A)$ désigne l'image réciproque $\{w \in \mathbb{C}\ ,\ P_a(w) \in A\}$. Un sous-ensemble P_a-invariant vérifie $P_a(A) = A$. Nous **admettrons** que pour tout $a \in D_\nu$, les sous-ensembles ω_a, $\mathcal{J}_a$ et Ω_a sont P_a-invariants.

Pour toute la suite on se fixe : $a \in D_\nu$ non nul , $\tau \in]0,1[$ et $K_\tau = (\frac{1+\tau}{1-\tau})^4$.

On note $P = P_a$, $\mathcal{J} = \mathcal{J}_a$ et $\lambda = \lambda_a$.

2.2 Questions préliminaires

On définit pour tout $\eta \geq 0$ l'ensemble

$$\mathcal{J}(\eta) = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ d(z, \mathcal{J}) \leq \eta\},$$

où $d(z,\mathcal{J}) = \inf_{w \in \mathcal{J}} |z - w|$.

2.2.1) Justifiez la définition $L(\eta) = \max_{z\in\mathcal{J}(\eta)} |P'(z)|$. Pourquoi $L(\eta) > 1$?

2.2.2) Montrer qu'il existe $\delta_{\mathsf{inj}} \in]0,1[$ tel que $0 \notin \mathcal{J}(\delta_{\mathsf{inj}})$. Vérifier que pour tout $z \in \mathcal{J}$, la restriction de P à $D(z, \delta_{\mathsf{inj}})$ est injective.

On note pour toute la suite ($\tau \in]0,1[$ étant fixé) :

$$\delta_1 = \frac{\delta_{\mathsf{inj}}}{K_\tau^2} \in]0,1[\quad , \quad \delta_0 = \min\left\{\delta_1 \ , \ \frac{\delta_1}{L(\delta_{\mathsf{inj}})} \quad , \quad \frac{\delta_1}{L(\delta_{\mathsf{inj}})K_\tau^2}\right\} \ \in]0,1[.$$

L'expression de δ_0 comme un minimum sera utile (on a en fait $\delta_0 = \delta_{\mathsf{inj}}/L(\delta_{\mathsf{inj}})K_\tau^4$).

2.3 $\mathcal{J}$ est poreux pour les disques de rayon supérieur à δ_0.

2.3.1) Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $\{z_1, \ldots, z_q\} \in \mathcal{J}^q$ tels que $\mathcal{J} \subset \cup_{i=1}^q D(z_i, \delta_0/2)$.

2.3.2) Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$, il existe $w_i \in D(z_i, \delta_0/2)$ et $c_i > 0$ tels que $D(w_i, c_i) \subset D(z_i, \delta_0/2) \setminus \mathcal{J}$. On utilisera les propriétés topologiques de $\mathcal{J}$ (partie 2.1).

On note désormais $W = \{w_1, \ldots, w_q\}$ et $c = \min\{c_1, \ldots, c_q\}$.

2.3.3) Montrer que pour tout $z \in \mathcal{J}$ et tout $R \in [\delta_0, 1]$, il existe $w \in W$ tel que

$$D(w, cR) \subset D(z, R) \setminus \mathcal{J}.$$

Nous avons vérifié la définition de c-porosité pour les disques rayon $R \in [\delta_0, 1]$. Il reste à l'établir pour les rayons $R \in]0, \delta_0[$.

2.4 $\mathcal{J}$ est poreux pour les disques de rayon inférieur à δ_0.

Considérons un disque centré en $z \in \mathcal{J}$ et de rayon $R < \delta_0$. On note

$$\mathcal{D} = D(z, R) \ \text{ et } \ \mathcal{D}_\tau = D(z, \tau R) \subset \mathcal{D}.$$

On a défini δ_1 à la partie 2.2.

2.4.1) Vérifier que $\mathcal{D} \subset D(z, \delta_0)$ et $P(\mathcal{D}) \subset D(P(z), \delta_1)$.

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des entiers $n \geq 1$ vérifiant :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \ , \ P^k(\mathcal{D}) \subset D(P^k(z), \delta_1).$$

La question 2.4.1 montre en particulier que l'ensemble $\mathcal{L}$ n'est pas vide.

2.4.2) Montrer que si $n \in \mathcal{L}$, alors pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$D\left(P^k(z), \frac{|(P^k)'(z)|}{K_\tau}\tau R\right) \subset P^k(\mathcal{D}_\tau) \subset D\Big(P^k(z), |(P^k)'(z)|K_\tau \tau R\Big).$$

2.4.3) En déduire que $\mathcal{L}$ est une partie majorée de $\mathbb{N}$.

Soit N le plus grand élément de $\mathcal{L}$. On note

$$\alpha = |(P^N)'(z)|\tau R/K_\tau \quad \text{et} \quad \beta = |(P^N)'(z)|\tau R K_\tau.$$

2.4.4) Vérifier que l'on a :

$$D(P^N(z), \alpha) \subset P^N(\mathcal{D}_\tau) \subset D(P^N(z), \delta_1).$$

2.4.5) Montrer l'inclusion $P^{N+1}(\mathcal{D}_\tau) \subset D\left(P^{N+1}(z), L(\delta_{\mathsf{inj}})\beta\right)$.

2.4.6) En déduire $L(\delta_{\mathsf{inj}})\beta > \delta_1$, puis que $\alpha > \delta_0$.

Par définition de l'entier N, la restriction de P^N à $\mathcal{D}_\tau$ est *injective*. Soit g_N l'*inverse* de cette fonction. Autrement dit, g_N est la bijection holomorphe :

$$g_N : \begin{array}{ccc} P^N(\mathcal{D}_\tau) & \longrightarrow & \mathcal{D}_\tau \\ y & \longmapsto & g_N(y) = ({P^N}_{|\mathcal{D}_\tau})^{-1}(y). \end{array}$$

Observons que $P^N(z) \in \mathcal{J}$, car $z \in \mathcal{J}$ et $\mathcal{J}$ est P-invariant. Les questions 2.4.4 et 2.4.6 entraînent respectivement $\alpha \leq \delta_1 < 1$ et $\alpha > \delta_0$. La question 2.3.3 montre alors qu'il existe $w' \in W$ tel que $D(w', c\alpha) \subset D(P^N(z), \alpha) \setminus \mathcal{J}$. Notons que $D(w', c\alpha) \subset D(P^N(z), \alpha) \setminus \mathcal{J} \subset P^N(\mathcal{D}_\tau) \setminus \mathcal{J}$.

2.4.7) Montrer les deux inclusions :

$$D\left(g_N(w'), \frac{|g_N'(w')|}{K_\tau} c\alpha\tau\right) \subset g_N(D(w', c\alpha\tau)) \subset \mathcal{D}_\tau \setminus \mathcal{J}.$$

2.4.8) On pose $w = g_N(w') \in \mathcal{D}_\tau$. Vérifier que l'on a :

$$\frac{|g_N'(w')|}{K_\tau} c\alpha\tau = \frac{\tau^2 c}{K_\tau^2} \frac{|(P^N)'(z)|}{|(P^N)'(w)|} R.$$

En déduire que $D(w, c'R) \subset \mathcal{D} \setminus \mathcal{J}$, où $c' = \tau^2 c/K_\tau^3 < 1$. On utilisera ici la question 1.5.1.

On a montré dans cette partie que pour tout $z \in \mathcal{J}$ et pour tout $R \in]0, \delta_0[$, il existe $w \in D(z, R)$ tel que $D(w, c'R) \subset D(z, R) \setminus \mathcal{J}$. Cela montre que $\mathcal{J}$ est c'-poreux pour les disques de rayon $R \in]0, \delta_0[$.

2.4.9) Pourquoi $\mathcal{J}$ est-il poreux ?

FIN DE L'ÉPREUVE