

**B. ANALYSE NUMÉRIQUE**

*Aucun document personnel n'est autorisé*

*L'usage de toute calculatrice est interdit*

**Le sujet comporte 9 pages**

Le problème consiste en un prologue, suivi de trois parties. Les deux premières parties sont indépendantes. La troisième partie utilise les notations et certains résultats des parties précédentes.

**Notations et rappels** Pour tout entier  $p \geq 1$ , on note  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  l'ensemble des matrices  $p \times p$  à coefficients complexes, et  $I$  la matrice identité, sans préciser sa dimension. On rappelle que le spectre d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  est l'ensemble de ses valeurs propres, et que le rayon spectral de  $A$  est le maximum des modules des valeurs propres. Pour  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ ,  $A^*$  désigne la matrice transposée conjuguée, définie par :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad (A^*)_{i,j} = \overline{A_{j,i}}.$$

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  est dite unitaire si  $A^*A = I$ , hermitienne si  $A^* = A$ , et normale si  $A^*A = AA^*$ . L'espace vectoriel  $\mathbb{C}^p$  est muni du produit hermitien :

$$\forall u, v \in \mathbb{C}^p, \quad \langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^p \overline{u_j} v_j,$$

dont la norme correspondante est notée  $\| \cdot \|$ . On munit l'espace  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  de la norme matricielle induite :

$$\|A\| = \sup_{u \in \mathbb{C}^p, \|u\|=1} \|Au\|.$$

Une matrice hermitienne  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  est dite positive si pour tout  $u \in \mathbb{C}^p$ , le nombre (réel)  $\langle u, Au \rangle$  est positif ou nul.

Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction continue,  $2\pi$ -périodique, on notera  $c_k(f)$  son  $k$ -ième coefficient de Fourier :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} f(\theta) d\theta.$$

## Prologue

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ . Montrer que l'on a

$$\|A\| = \sup_{u, v \in \mathbb{C}^p, \|u\|=\|v\|=1} |\langle v, Au \rangle|.$$

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  une matrice normale. Montrer que la norme de  $A$  est égale au rayon spectral de  $A$ .

## I. Familles de matrices de puissances uniformément bornées

Soit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ . On dira que la famille  $\mathcal{A}$  est de puissances uniformément bornées s'il existe un réel positif  $C_1$  tel que

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|A^k\| \leq C_1. \quad (1)$$

On dira que  $\mathcal{A}$  est de résolvante uniformément bornée si pour toute matrice  $A \in \mathcal{A}$ , le spectre de  $A$  est contenu dans le disque unité  $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ , et si, de plus, il existe un réel positif  $C_2$  tel que

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| > 1, \quad \|(zI - A)^{-1}\| \leq \frac{C_2}{|z| - 1}. \quad (2)$$

Le but de cette partie est de montrer qu'une famille de matrices  $\mathcal{A}$  est de puissances uniformément bornées si, et seulement si elle est de résolvante uniformément bornée. A la question 5, on explicitera une condition qui implique ces deux propriétés.

1. Soit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  une famille de matrices de puissances uniformément bornées, et soit alors  $C_1$  un réel positif tel que (1) ait lieu. On se donne une matrice  $A \in \mathcal{A}$ .

a) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Montrer que  $|\lambda| \leq 1$ .

b) Soit  $z \in \mathbb{C}$ , tel que  $|z| > 1$ . Montrer que la série de terme général  $z^{-k} A^k$  est convergente.

On définit :

$$B(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} A^k.$$

Montrer que l'on a :

$$\|B(z)\| \leq \frac{C_1}{|z| - 1}.$$

c) Montrer que  $(zI - A)B(z) = I$ , et en déduire que la famille  $\mathcal{A}$  est de résolvante uniformément bornée.

2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , une fonction  $2\pi$ -périodique, de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad |c_k(f)| \leq \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi} |f'(\theta)| d\theta.$$

3. a) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction  $2\pi$ -périodique de la forme :

$$f(\theta) = \sum_{j=0}^m a_j \cos(j\theta) + b_j \sin(j\theta),$$

où  $m \in \mathbb{N}$ , et  $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_m$  sont des nombres réels. Montrer que si  $f$  n'est pas identiquement nulle, alors  $f$  possède au plus  $2m$  zéros sur l'intervalle ouvert  $]0, 2\pi[$ .

b) On considère maintenant  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction  $2\pi$ -périodique de la forme :

$$g(\theta) = \frac{\sum_{j=0}^{m_1} \alpha_j \cos(j\theta) + \beta_j \sin(j\theta)}{\sum_{k=0}^{m_2} \delta_k \cos(k\theta) + \gamma_k \sin(k\theta)},$$

où  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ , et où les coefficients  $\alpha_j, \beta_j, \delta_k, \gamma_k$  sont réels. On suppose de plus que le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe une subdivision :

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_\ell < \theta_{\ell+1} = 2\pi,$$

avec  $0 \leq \ell \leq 2(m_1 + m_2)$ , et telle que  $g$  est monotone sur chacun des intervalles  $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, \ell$ . Montrer enfin l'inégalité :

$$\int_0^{2\pi} |g'(\theta)| d\theta \leq (4m_1 + 4m_2 + 2) \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |g(\theta)|.$$

4. Dans cette question, on se donne  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  une famille de matrices de résolvante uniformément bornée, et un réel positif  $C_2$  tel que les inégalités (2) aient lieu. Soit  $A \in \mathcal{A}$ , et soit  $d$  le degré de son polynôme minimal  $P_A$  :

$$P_A(z) = \sum_{k=0}^d \mu_k z^k, \quad \mu_d = 1.$$

Soient  $u, v \in \mathbb{C}^p$  de norme 1, et soit finalement un nombre réel  $r > 1$ . On définit les fonctions  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $2\pi$ -périodiques suivantes :

$$\varphi(\theta) = \operatorname{Re} \langle v, (re^{i\theta}I - A)^{-1}u \rangle, \quad \psi(\theta) = \operatorname{Im} \langle v, (re^{i\theta}I - A)^{-1}u \rangle.$$

a) Expliquer pourquoi on a  $d \leq p$ , et pourquoi les racines de  $P_A$  se situent dans le disque unité  $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ .

b) Montrer que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on a les inégalités :

$$|\varphi(\theta)| \leq \frac{C_2}{r-1}, \quad |\psi(\theta)| \leq \frac{C_2}{r-1}.$$

c) Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , et pour tout entier  $j = 0, \dots, d$ , on a :

$$P_A^{(j)}(z) = \sum_{k=j}^d \mu_k \frac{k!}{(k-j)!} z^{k-j},$$

où  $P_A^{(j)}$  désigne le polynôme  $P_A$  dérivé  $j$  fois. En déduire que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on a :

$$\sum_{j=1}^d \frac{1}{j!} P_A^{(j)}(z) (A - zI)^j = -P_A(z) I.$$

d) Justifier que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| > 1$ , on a la relation :

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1}{P_A(z)} \sum_{j=1}^d \frac{1}{j!} P_A^{(j)}(z) (A - zI)^{j-1}.$$

e) Montrer que les fonctions  $\varphi(\theta)$  et  $\psi(\theta)$  sont de la forme :

$$\frac{\sum_{j=0}^d \alpha_j \cos(j\theta) + \beta_j \sin(j\theta)}{\sum_{k=0}^d \delta_k \cos(k\theta) + \gamma_k \sin(k\theta)},$$

où les coefficients  $\alpha_j, \beta_j, \delta_k, \gamma_k$  sont réels, et où le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . (On ne cherchera pas une expression exacte des coefficients, mais seulement à montrer que  $\varphi(\theta)$  et  $\psi(\theta)$  s'écrivent sous cette forme.) Déduire des questions 2 et 3 l'inégalité suivante sur les coefficients de Fourier de  $\varphi$  et  $\psi$  :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad |c_k(\varphi)| \leq \frac{4d+1}{\pi k} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |\varphi(\theta)|, \quad |c_k(\psi)| \leq \frac{4d+1}{\pi k} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |\psi(\theta)|.$$

f) On admettra que pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , on a la relation :

$$\langle v, A^k u \rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \zeta^k \langle v, (\zeta I - A)^{-1} u \rangle d\zeta,$$

où  $\Gamma$  désigne le cercle de centre 0 et de rayon  $r$ . On rappelle que  $r$  a été fixé strictement supérieur à 1, de sorte que  $\Gamma$  ne contient aucun élément du spectre de  $A$ . En paramétrant l'intégrale curviligne, et en exploitant le résultat de la question 4e), montrer que l'on a :

$$|\langle v, A^k u \rangle| \leq \frac{(4d+1)r^{k+1}}{\pi(k+1)} \left[ \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |\varphi(\theta)| + \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |\psi(\theta)| \right].$$

g) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . A l'aide des questions 4a), 4b), et 4f), en choisissant  $r = 1 + 1/(k+1)$ , montrer que :

$$|\langle v, A^k u \rangle| \leq \frac{2(4d+1)e^1 C_2}{\pi}.$$

Conclure que  $\mathcal{A}$  est une famille de matrices de puissances uniformément bornées.

5. Dans cette question, on se donne  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  une famille de matrices vérifiant la condition suivante :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \forall u \in \mathbb{C}^p, \quad |\langle u, Au \rangle| \leq \|u\|^2. \quad (3)$$

a) Montrer que pour toute matrice  $A \in \mathcal{A}$ , le spectre de  $A$  est contenu dans le disque unité  $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ .

b) Soit  $A \in \mathcal{A}$ , et soit  $z \in \mathbb{C}$ , tel que  $|z| > 1$ . Soit enfin  $v \in \mathbb{C}^p$ . Montrer que le système linéaire :

$$(zI - A)u = v$$

a une unique solution, et que cette solution, que l'on notera  $u$ , satisfait :

$$(|z| - 1) \|u\| \leq \|v\|.$$

c) En déduire que  $\mathcal{A}$  est de résolvante uniformément bornée, puis que  $\mathcal{A}$  est de puissances uniformément bornées. Donner un majorant de la quantité :

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \sup_{k \in \mathbb{N}} \|A^k\|.$$

## II. Etude d'une équation aux dérivées partielles

On note  $L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$  l'espace des fonctions intégrables de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{C}^p$ , la mesure sur  $\mathbb{R}^2$  étant la mesure de Lebesgue. La transformée de Fourier d'une fonction  $u \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$  est définie par la formule :

$$\mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dx,$$

où  $\langle x, \xi \rangle$  désigne le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^2$  (restriction à  $\mathbb{R}^2$  du produit hermitien sur  $\mathbb{C}^2$ ), et où l'intégration se fait "coordonnée par coordonnée", car on intègre ici une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}^p$ . On rappelle que si  $u \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$ , et si de plus  $\mathcal{F}u \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$ , alors pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^2$  on a :

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle x, \xi \rangle} \mathcal{F}u(\xi) d\xi. \quad (\text{Formule d'inversion de Fourier})$$

On rappelle également que pour tout  $u \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p) \cap L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$ , on a  $\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$ , avec l'égalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \|\mathcal{F}u(\xi)\|^2 d\xi = (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \|u(x)\|^2 dx, \quad (\text{Théorème de Plancherel})$$

ce qui permet de prolonger, de manière unique, la transformée de Fourier en une application linéaire continue, et bijective sur l'espace  $L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$ . Ce prolongement est encore noté  $\mathcal{F}$ , et la formule d'inversion de Fourier reste valable pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$  vérifiant  $\mathcal{F}u \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$ .

On désigne par  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$  l'espace des fonctions  $u \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$  qui vérifient :

$$\left( \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \|\xi\|^2)^3 \|\mathcal{F}u(\xi)\|^2 d\xi \right)^{1/2} < +\infty.$$

Cette quantité définit une norme sur  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$ , notée  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ , et l'espace  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$  muni de cette norme est complet.

On considère deux matrices  $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ , que l'on suppose hermitiennes, et on se propose d'étudier l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, & t, x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \\ u(0, x_1, x_2) = a(x_1, x_2), & x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4)$$

où  $a \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$ . On prendra garde que l'inconnue  $u(t, x_1, x_2)$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}^p$ . Pour alléger les notations, on note  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

1. Soit  $H \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  une matrice hermitienne. En notant  $\exp(iH)$  l'exponentielle de la matrice  $iH$ , montrer que  $\exp(iH)$  est une matrice unitaire.
2. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Montrer que l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\xi}{(1 + \|\xi\|^2)^\alpha}$$

est finie si, et seulement si  $\alpha > 1$ . Dans ce cas, quelle est la valeur de l'intégrale ?

3. a) Etant donnée  $a \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$ , montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^p \\ \xi &\longmapsto \exp[-it(\xi_1 A_1 + \xi_2 A_2)] \mathcal{F}a(\xi), \end{aligned}$$

appartient à  $L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p) \cap L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , et tout  $x \in \mathbb{R}^2$ , on note alors :

$$v(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x, \xi)} \exp[-it(\xi_1 A_1 + \xi_2 A_2)] \mathcal{F}a(\xi) d\xi. \quad (5)$$

- b) Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la fonction  $(v(t, \cdot) : x \mapsto v(t, x))$  appartient à  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$ , et que la norme  $\|v(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}}$  ne dépend pas de  $t$ . Que vaut  $v(0, \cdot)$  ?
- c) Montrer que  $v$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^3$ , et que  $v$  est solution de l'équation aux dérivées partielles (4). (On pourra montrer que les dérivées partielles de  $v$  existent et sont continues sur  $\mathbb{R}^3$ .)
- d) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p) \\ t &\longmapsto (v(t, \cdot) : x \mapsto v(t, x)), \end{aligned}$$

est continue.

4. Dans cette question, on suppose que les matrices  $A_1$ , et  $A_2$  sont diagonales à coefficients réels :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_p \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_p \end{pmatrix}.$$

Montrer que la  $k$ -ième coordonnée de la solution  $v$  définie par (5), vérifie :

$$v_k(t, x_1, x_2) = a_k(x_1 - \alpha_k t, x_2 - \beta_k t),$$

où  $a_k$  est la  $k$ -ième coordonnée de  $a$ .

5. Dans cette question, on suppose que les matrices  $A_1$ , et  $A_2$  sont hermitiennes, et qu'elles commutent. Donner une expression simple de la solution  $v$  définie par (5).

### III. Stabilité de schémas aux différences finies

Dans cette partie, on étudie des approximations des solutions de (4). On garde les notations de la partie II. En particulier,  $\mathcal{F}$  désigne la transformée de Fourier, et  $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  sont deux matrices hermitiennes. On introduit des pas de discrétisation  $\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2$ , tous strictement positifs, et on définit :

$$\lambda_1 = \frac{\Delta t}{\Delta x_1}, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta t}{\Delta x_2}.$$

On approche la solution de (4) par une fonction constante par morceaux  $v$  :

$$\forall (t, x) \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t[ \times \Omega_{j,k}, \quad v(t, x) = v_{j,k}^n, \\ \text{où } \Omega_{j,k} = [j\Delta x_1, (j+1)\Delta x_1[ \times [k\Delta x_2, (k+1)\Delta x_2[,$$

avec  $n \in \mathbb{N}$ , et  $j, k \in \mathbb{Z}$ . On se fixe  $a \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$ , et on "initialise" la solution approchée  $v$  en posant :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, \quad v_{j,k}^0 = \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2} \int_{\Omega_{j,k}} a(x) dx. \quad (6)$$

1. Dans cette question, on suppose que les  $v_{j,k}^n$  sont définis par la récurrence suivante :

$$\forall (n, j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad v_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{4} (v_{j-1,k}^n + v_{j+1,k}^n + v_{j,k-1}^n + v_{j,k+1}^n) \\ - \frac{\lambda_1}{2} A_1 (v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{\lambda_2}{2} A_2 (v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n). \quad (7)$$

a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $v^n$  la fonction constante par morceaux sur  $\mathbb{R}^2$ , valant  $v_{j,k}^n$  sur le pavé  $\Omega_{j,k}$ . Montrer que l'on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \|v^0(x)\|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \|a(x)\|^2 dx,$$

et que pour tout entier  $n$ , on a  $v^n \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$ .

b) Vérifier qu'il existe neuf matrices  $A_{\ell,m}$ ,  $\ell, m \in \{-1, 0, 1\}$ , telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad v^{n+1}(x) = \sum_{\ell, m=-1}^1 A_{\ell,m} v^n(x + (\ell\Delta x_1, m\Delta x_2)),$$

et donner l'expression des matrices  $A_{\ell,m}$  en fonction de  $\lambda_1, \lambda_2, A_1$ , et  $A_2$ .

c) Montrer que si  $u \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^p)$  et si  $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ , alors  $\mathcal{F}(Mu) = M\mathcal{F}u$ . En déduire qu'il existe une application  $G_{\sharp} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  vérifiant :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{F}v^{n+1}(\xi) = G_{\sharp}(\xi) \mathcal{F}v^n(\xi).$$

d) Montrer que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^2$ , la matrice  $G_{\sharp}(\xi)$  est normale.

e) Montrer que si  $\alpha$  est un réel positif, et si  $H$  est une matrice hermitienne telle que  $\|H\| \leq \alpha$ , alors  $\alpha I - H$  est une matrice hermitienne positive. Donner une condition suffisante sur  $\lambda_1$ , et  $\lambda_2$  pour que  $I - G_{\sharp}(\xi)^* G_{\sharp}(\xi)$  soit une matrice hermitienne positive pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^2$ . On pourra utiliser, après l'avoir justifiée, la formule suivante :

$$1 - \frac{1}{4} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)^2 = \frac{1}{2} (\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2) + \frac{1}{4} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)^2.$$

- f) Sous la condition trouvée à la question 1e), montrer que  $\|G_{\#}(\xi)\| \leq 1$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^2$ .  
En déduire que pour tout entier  $n$ , on a l'inégalité :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \|v^n(x)\|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \|a(x)\|^2 dx.$$

On dit alors que le schéma (7) est  $L^2$ -stable.

2. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ , telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ , la matrice hessienne  $D^2f(x)$  soit positive. Montrer que pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^2$ , on a :

$$\max_{x \in K} f(x) = \max_{x \in \partial K} f(x).$$

3. Soit  $H \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  une matrice hermitienne, et soit alors  $U \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  une matrice unitaire qui diagonalise  $H$  :

$$U^* H U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_p \end{pmatrix}.$$

On définit une matrice, notée  $|H|$ , par la formule suivante :

$$U^* |H| U = \begin{pmatrix} |\alpha_1| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\alpha_p| \end{pmatrix}.$$

Montrer que cette définition ne dépend pas du choix de la matrice unitaire  $U$  diagonalisant  $H$ . Montrer que  $|H|$ ,  $|H| - H$ , et  $|H| + H$  sont des matrices hermitiennes positives.

4. Dans cette question, on suppose que les  $v_{j,k}^n$  sont définis par la récurrence suivante :

$$\forall (n, j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

$$\begin{aligned} v_{j,k}^{n+1} &= v_{j,k}^n - \frac{\lambda_1}{2} A_1 (v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{\lambda_2}{2} A_2 (v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n) \\ &\quad - \frac{\lambda_1}{2} |A_1| (2v_{j,k}^n - v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{\lambda_2}{2} |A_2| (2v_{j,k}^n - v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n), \end{aligned} \quad (8)$$

où les matrices  $|A_1|$ ,  $|A_2|$  sont définies comme à la question 3, et les  $v_{j,k}^0$  sont donnés par (6).

- a) Montrer, comme à la question 1, qu'il existe neuf matrices  $\mathbb{B}_{\ell,m}$ ,  $\ell, m \in \{-1, 0, 1\}$ , telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad v^{n+1}(x) = \sum_{\ell, m=-1}^1 \mathbb{B}_{\ell,m} v^n(x + (\ell \Delta x_1, m \Delta x_2)),$$

et donner l'expression des matrices  $\mathbb{B}_{\ell,m}$  en fonction de  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $A_1$ , et  $A_2$ .

- b) En déduire qu'il existe une application  $G_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{F}v^n(\xi) = G_b(\xi)^n \mathcal{F}v^0(\xi),$$

et donner l'expression de la matrice  $G_b(\xi)$ . Pour simplifier cette expression, on introduira les angles moitié :

$$\eta_1 = \frac{\xi_1 \Delta x_1}{2}, \quad \eta_2 = \frac{\xi_2 \Delta x_2}{2}.$$

c) Soit  $u \in \mathbb{C}^p$  de norme 1. En définissant les quantités :

$$y_1 = \lambda_1 \langle u, |A_1|u \rangle, \quad y_2 = \lambda_2 \langle u, |A_2|u \rangle,$$

montrer que l'on a l'inégalité :

$$\left[ \lambda_1 \sin(2\eta_1) \langle u, A_1 u \rangle + \lambda_2 \sin(2\eta_2) \langle u, A_2 u \rangle \right]^2 \leq (y_1 |\sin(2\eta_1)| + y_2 |\sin(2\eta_2)|)^2,$$

puis que l'on a :

$$\begin{aligned} |\langle u, G_b(\xi)u \rangle|^2 \leq & 1 + 4(y_1^2 - y_1) \sin^2 \eta_1 + 4(y_2^2 - y_2) \sin^2 \eta_2 \\ & + 2y_1 y_2 (4 \sin^2 \eta_1 \sin^2 \eta_2 + |\sin(2\eta_1) \sin(2\eta_2)|). \end{aligned}$$

d) En utilisant la question 2, montrer que pour tout couple de réels  $(x_1, x_2)$  vérifiant  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ , et  $x_1 + x_2 \leq 1$ , on a :

$$4(x_1^2 - x_1) \sin^2 \eta_1 + 4(x_2^2 - x_2) \sin^2 \eta_2 + 2x_1 x_2 (4 \sin^2 \eta_1 \sin^2 \eta_2 + |\sin(2\eta_1) \sin(2\eta_2)|) \leq 0.$$

e) Montrer que si  $\lambda_1$ , et  $\lambda_2$  vérifient :

$$\lambda_1 \|A_1\| + \lambda_2 \|A_2\| \leq 1,$$

alors la famille  $\mathcal{A} = \{G_b(\xi), \xi \in \mathbb{R}^2\}$  vérifie la propriété (3) de la partie I. En déduire qu'il existe un réel positif  $C$  tel que pour tout entier  $n$ , on a l'inégalité :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \|v^n(x)\|^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \|a(x)\|^2 dx.$$

On dira que le schéma (8) est  $L^2$ -stable.

**Fin de l'épreuve**