

## A. PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

*Aucun document personnel n'est autorisé*

*L'usage de toute calculatrice est interdit*

**Le sujet comporte 6 pages**

-I-

Soit  $S$  un ensemble de cardinal fini  $d$ . Soit  $Q$  la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur  $S$ . Nous supposons que cette chaîne est irréductible, apériodique et qu'elle est réversible par rapport à une mesure de probabilité  $\pi$  sur  $S$ , soit que pour tout  $x$  et  $y$  dans  $S$ ,

$$\pi(x)Q(x, y) = \pi(y)Q(y, x).$$

Nous munissons  $\mathbb{R}^S$ , l'ensemble des applications de  $S$  dans  $\mathbb{R}$ , du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_\pi = \sum_{x \in S} u(x)v(x)\pi(x),$$

pour  $u$  et  $v$  dans  $\mathbb{R}^S$ . Nous notons  $\|u\|_\pi = \langle u, u \rangle_\pi^{1/2}$ , la norme de  $u$  associée à ce produit scalaire. Pour  $u \in \mathbb{R}^S$ , on définit  $Qu \in \mathbb{R}^S$  et  $\pi(u) \in \mathbb{R}$  par

$$Qu(x) = \sum_{y \in S} Q(x, y)u(y) \quad \text{et} \quad \pi(u) = \sum_{x \in S} u(x)\pi(x).$$

Nous notons  $\mathbf{1}$  la fonction de  $\mathbb{R}^S$  définie par  $\mathbf{1}(x) = 1$  pour tout  $x \in S$ .

- I-1) a) Montrer que  $\pi$  est une mesure de probabilité invariante pour  $Q$ . Peut-on avoir  $\pi(x) = 0$ ?
- b) Vérifier que  $\varphi : \mathbb{R}^S \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(u, v) = \langle Qu, v \rangle_\pi$  est une forme bilinéaire symétrique. En déduire qu'il existe une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  de  $\mathbb{R}^S$ , orthonormée pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$  et une suite croissante de réels  $(\beta_i)_{1 \leq i \leq d}$  telles que pour tout  $i$ ,  $Qe_i = \beta_i e_i$ .
- c) Montrer que  $\beta_d = 1$ ,  $e_d = \mathbf{1}$  et que pour tout  $i \leq d - 1$ ,  $|\beta_i| < 1$ .

**I-2)** Posons  $\lambda(Q) = 1 - \sup\{|\beta_1|, \beta_{d-1}\}$ . Soient  $x \in S$  et  $X_n^x$  une chaîne de Markov de matrice de transition  $Q$  et de position initiale  $x$ . Pour tout  $u \in \mathbb{R}^S$ , on pose  $u_n(x) = \mathbb{E}[u(X_n^x)]$

a) Exprimer  $u_n(x)$  en fonction de  $u$ , de  $x$  et de  $Q$ . En déduire que

$$\|u_n - \pi(u)\mathbf{1}\|_\pi \leq (1 - \lambda(Q))^n \|u - \pi(u)\mathbf{1}\|_\pi.$$

b) Pour  $n \geq 1$  et  $x \in S$ , trouver  $v_{n,x} \in \mathbb{R}^S$  tel que

$$u_n(x) - \pi(u) = \langle v_{n,x}, u_{n-1} - \pi(u)\mathbf{1} \rangle_\pi.$$

En déduire que pour tout  $x \in S$  et tout  $n \geq 1$ ,

$$|u_n(x) - \pi(u)| \leq \left( \frac{Q^2(x,x)}{\pi(x)} \right)^{1/2} (1 - \lambda(Q))^{n-1} \|u - \pi(u)\mathbf{1}\|_\pi.$$

c) On pose  $c = \sup_{x \in S} \left( \frac{Q^2(x,x)}{\pi(x)} \right)^{1/2}$ . Soit  $X_n$  une chaîne de Markov de matrice de transition  $Q$ . Montrer que pour tout  $y \in S$ ,

$$|\mathbb{P}(X_n = y) - \pi(y)| \leq c(1 - \lambda(Q))^{n-1}.$$

**I-3) a)** Montrer que pour tout  $u \in \mathbb{R}^S$ ,

$$\|u - \pi(u)\mathbf{1}\|_\pi^2 = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in S^2} (u(x) - u(y))^2 \pi(x)\pi(y).$$

b) Montrer que pour  $x$  et  $y$  dans  $S$ , il existe un chemin  $\gamma_{x,y} = (x_0, \dots, x_k)$  tel que  $k \leq d$ ,  $x_0 = x$ ,  $x_k = y$ ,  $x_i \neq x_j$  pour  $i \neq j$  et  $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Montrer que pour tout  $u \in \mathbb{R}^S$ ,

$$(u(y) - u(x))^2 \leq d \sum_{i=1}^k (u(x_i) - u(x_{i-1}))^2.$$

c) Soit  $A(Q) = \{(s_1, s_2) \in S^2 : Q(s_1, s_2) > 0 \text{ et } s_1 \neq s_2\}$ . On dit que  $(s_1, s_2) \in \gamma_{x,y} = (x_0, \dots, x_k)$  si il existe  $i$  tel que  $s_1 = x_{i-1}$  et  $s_2 = x_i$ . On pose

$$C = d \times \sup_{\{(s_1, s_2) \in A(Q)\}} \left\{ \frac{1}{\pi(s_1)Q(s_1, s_2)} \sum_{\{x,y \in S : (s_1, s_2) \in \gamma_{x,y}\}} \pi(x)\pi(y) \right\}.$$

Montrer que

$$\|u - \pi(u)\mathbf{1}\|_\pi^2 \leq \frac{C}{2} \sum_{\{(s_1, s_2) \in A(Q)\}} (u(s_1) - u(s_2))^2 \pi(s_1)Q(s_1, s_2).$$

d) Montrer que

$$\langle u - Qu, u \rangle_\pi = \frac{1}{2} \sum_{\{(s_1, s_2) \in A(Q)\}} (u(s_1) - u(s_2))^2 \pi(s_1) Q(s_1, s_2).$$

e) Montrer que  $\beta_{d-1} \leq 1 - 1/\sqrt{C}$ , puis que  $\lambda(Q) \geq \inf\{1 - |\beta_1|, 1/\sqrt{C}\}$ .

-II-

Soit  $S$  un ensemble de cardinal fini  $d$  et  $A$  un ensemble d'arêtes de  $S$ . Une arête  $a$  est la donnée de deux points distincts  $x$  et  $y$  de  $S$ . On notera alors  $a = (x, y)$ . Nous supposons que si  $(x, y) \in A$  alors  $(y, x) \in A$ . La donnée de  $S$  et de  $A$  est un graphe. Une partie  $C$  de ce graphe est dite connexe si pour tout  $x$  et  $y$  dans  $C$  il existe une suite  $s_0, \dots, s_n$  dans  $C$  telle que  $s_0 = x$ ,  $s_n = y$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $(s_{i-1}, s_i) \in A$ . Nous supposons que  $S$  est connexe. On dit  $x$  et  $y$  sont voisins si  $(x, y) \in A$ . Pour tout  $x \in S$ , on note  $n(x)$  le nombre de voisins de  $x$ . Nous supposons qu'il existe un entier  $r > 0$  tel que pour tout  $x \in S$ ,  $n(x) = r$ . On note  $\mathcal{V}(x) = \{x^1, \dots, x^r\}$ , l'ensemble des voisins de  $x$ .

On se donne une fonction  $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ . On note  $H_{min} = \inf_{x \in S} H(x)$ ,  $H_{max} = \sup_{x \in S} H(x)$  et  $S_m = \{x \in S : H(x) = H_{min}\}$ . Nous supposons que  $H_{min} = 0$  et que  $H_{max} > 0$ .

Soient  $X_0$  une variable aléatoire à valeurs dans  $S$ ,  $(U_n)_{n \geq 1}$  et  $(V_n)_{n \geq 1}$  deux suites de variables aléatoires indépendantes. Nous supposons que pour tout  $n$ , la loi de  $U_n$  est la loi uniforme sur  $\{1, \dots, r\}$ , la loi de  $V_n$  est la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Nous supposons également que la variable aléatoire  $X_0$ , la suite  $(U_n)$  et la suite  $(V_n)$  sont indépendantes.

Soit  $(T_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels strictement positifs. On définit une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 0}$  telle que pour tout  $n \geq 0$ , sur l'événement  $\{U_{n+1} = i\}$ ,

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n^i & \text{si } H(X_n^i) \leq -T_n \log(V_{n+1}) + H(X_n); \\ X_{n+1} = X_n & \text{si } H(X_n^i) > -T_n \log(V_{n+1}) + H(X_n). \end{cases}$$

-II-A-

On suppose dans cette partie que  $T_n = T$ , où  $T$  est un paramètre strictement positif. Posons  $Z_T = \sum_{x \in S} \exp(-H(x)/T)$ . Soit  $\pi_T$ , la mesure de probabilité sur  $S$ , définie par

$$\pi_T(x) = \frac{1}{Z_T} \exp\left(-\frac{H(x)}{T}\right).$$

**A-1) a)** Montrer que  $X_n$  est une chaîne de Markov. La matrice de transition de cette chaîne sera notée  $Q_T$ .

**b)** Montrer que  $Q_T(x, y) = 0$  si  $(x, y) \notin A$ . Montrer que si  $(x, y) \in A$ ,

$$Q_T(x, y) = \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{1}{T}(H(y) - H(x))\right) \quad \text{si } H(y) > H(x);$$

$$Q_T(x, y) = \frac{1}{r} \quad \text{si } H(y) \leq H(x).$$

Montrer qu'il existe  $x \in S$  tel que  $Q_T(x, x) > 0$ .

**c)** Montrer que cette chaîne est réversible par rapport à la mesure  $\pi_T$ .

**d)** Montrer que cette chaîne est irréductible et apériodique.

**e)** Montrer que cette chaîne est récurrente positive et que  $X_n$  converge en loi quand  $n$  tend vers  $\infty$ .

**A-2) a)** Montrer que  $\pi_T$  converge étroitement quand  $T \rightarrow +\infty$ . Calculer  $Q_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} Q_T$ . Est-ce une matrice de transition? Décrire la chaîne associée. Admet-elle une mesure de probabilité invariante? Est-elle récurrente? Est-elle irréductible?

**b)** Soient  $x$  et  $y$  tels que  $H(x) < H(y)$ . Montrer que  $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\pi_T(y)}{\pi_T(x)} = 0$ .

**c)** Montrer que  $\pi_T$  converge étroitement quand  $T \rightarrow 0$  vers la mesure de probabilité uniforme sur l'ensemble  $S_m$ . Calculer  $Q_0 = \lim_{T \rightarrow 0} Q_T$ . Est-ce une matrice de transition? Décrire la chaîne associée. Admet-elle une mesure de probabilité invariante? Est-elle récurrente? Est-elle irréductible?

**A-3)** Montrer que les valeurs propres de  $Q_0$  sont toutes positives. En déduire qu'il existe  $T_0 > 0$  tel que pour tout  $T < T_0$ , les valeurs propres de  $Q_T$  sont toutes supérieures à  $-1/2$ .

**A-4)** Soit  $T \in ]0, T_0[$ . Nous reprenons les notations de la question I-3: Pour tout  $x$  et  $y$  dans  $S$ , on définit un chemin  $\gamma_{x,y} = \{x_0, \dots, x_k\}$ .

**a)** Vérifier que  $A(Q_T) = A$ .

**b)** Montrer que pour tout  $(s_1, s_2) \in A$ ,

$$\frac{1}{\pi_T(s_1)Q_T(s_1, s_2)} \leq dZ_T \exp\left(\frac{H_{max}}{T}\right).$$

**c)** Soit  $(s_1, s_2) \in A$ , montrer que

$$\frac{1}{\pi_T(s_1)Q_T(s_1, s_2)} \sum_{\{(x,y) \in S^2: (s_1, s_2) \in \gamma_{x,y}\}} \pi_T(x)\pi_T(y) \leq d^2 \exp\left(\frac{H_{max}}{T}\right).$$

d) Montrer que  $\lambda(Q_T) \geq \inf \{1/2, d^{-3/2} \exp(-\frac{H_{max}}{2T})\}$ .

-II-B-

Pour  $k \geq 1$ , notons  $n_k$  la partie entière de  $e^{kL}$ , où  $L$  est une constante strictement supérieure à  $\frac{1}{2}H_{max}$ . Dans cette partie, la suite  $T_n$  est définie telle que  $T_n = 1/k$  si  $n_{k-1} < n \leq n_k$ .

**B-1)** Pour tout entier  $k$ , on pose  $c_k = \sup_{x \in S} \left( \frac{1}{\pi_{1/k}(x)} \right)^{1/2}$ . Montrer qu'il existe un entier  $k_0$  tel que pour tout  $(x, y) \in S^2$  et tout  $k \geq k_0$ ,

$$|P(X_{n_k} = y | X_{n_{k-1}} = x) - \pi_{1/k}(y)| \leq c_k \left(1 - d^{-3/2} e^{-kH_{max}/2}\right)^{(n_k - n_{k-1} - 1)}$$

**B-2)** Montrer que  $\pi_{1/k}(x) \geq \frac{1}{d} e^{-kH_{max}}$ .

**B-3)** Montrer que  $X_{n_k}$  converge en loi quand  $k \rightarrow \infty$ . Quelle est la loi limite?

**B-4)** Montrer que si  $S_m = \{x^*\}$ , alors  $X_{n_k}$  converge en probabilité vers  $x^*$ .

-II-C-

Soit  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $(x, y) \in A$ , on a  $|H(x) - H(y)| \geq \alpha$  si  $H(x) \neq H(y)$ . Dans cette partie,  $(T_n)$  est une suite telle que pour tout  $n \geq 1$ ,  $T_n \leq \alpha$  et  $\sum_n e^{-\alpha/T_n} < \infty$ . Pour tout  $n \geq 0$ , on pose  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k : 0 \leq k \leq n)$ . On pose  $S_{loc}$ , l'ensemble des minima locaux de  $H$ :

$$S_{loc} = \{x \in S : H(x) \leq H(y) \quad \forall y \in \mathcal{V}(x)\}.$$

On note  $A_X$ , l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $X_n$  (on rappelle que  $x \in A_X$  si et seulement si  $X_n = x$  infiniment souvent).

**C-1)** Montrer que  $A_X$  est connexe.

**C-2) a)** Montrer que pour tout  $v \geq \alpha$  et tout  $T \leq \alpha$ , on a  $ve^{-v/T} \leq \alpha e^{-\alpha/T}$ .

**b)** Montrer que  $Z_n = H(X_n) - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha e^{-\alpha/T_k}$  est une surmartingale relativement à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ . En déduire que  $H(X_n)$  converge presque sûrement et dans  $L^1(P)$ .

**C-3)** Soit  $x \notin S_{loc}$ . Définissons la suite de temps d'arrêt  $\tau_n$  par (on utilise la convention  $\inf \emptyset = \infty$ )

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \inf\{n \geq 0 : X_n = x \text{ et } \forall k \geq n, H(X_k) = H(x)\} \\ \tau_{n+1} &= \inf\{k \geq \tau_n + 1 : X_k = x\} \quad \text{pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

- a) Montrer que presque sûrement,  $x \in A_X \implies \forall n \geq 1, \tau_n < \infty$ .
- b) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $P(H(X_{\tau_{n+1}}) < H(x)) \geq \frac{1}{r}$ .
- c) Montrer que presque sûrement,  $x \notin A_X$ . En déduire que presque sûrement,  $A_X \subset S_{loc}$ .

C-4) Montrer que si pour tout  $x \in S_{loc}$ , et tout  $y \in \mathcal{V}(x)$ , on a  $H(y) > H(x)$ , alors  $X_n$  converge presque sûrement.

-III-

Soit  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  telle que

$$\sup_{\{x \in \mathbb{R}\}} |H''(x)| < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} H(x) = \infty.$$

On note  $E = \{x \in \mathbb{R} : H'(x) = 0\}$ . On suppose que  $E$  est un ensemble fini. Soient  $\gamma_n$  et  $\sigma_n$  deux suites de réels positifs décroissantes vers 0. Nous supposons que

$$\sum_n \gamma_n = \infty \quad \text{et} \quad \sum_n \sigma_n^2 < \infty.$$

Soit  $X_0$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $(\epsilon_n)$  une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que  $X_0$  est indépendante de la suite  $(\epsilon_n)$ . Nous supposons que  $E[X_0^2] < \infty$  et que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\epsilon_n$  est une variable aléatoire centrée de variance  $\sigma_n^2$ . On pose  $\mathcal{F}_n = \sigma(\epsilon_k : k \leq n)$ . On définit une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 1}$  telle que

$$X_{n+1} = X_n - \gamma_{n+1}H'(X_n) + \epsilon_{n+1}.$$

III-1) a) Montrer qu'il existe une constante  $A \in ]0, \infty[$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|H(x)| \leq A(1 + x^2)$ .

b) En déduire que pour tout  $n \geq 1$ ,  $H(X_n) \in L^1(\mathbb{P})$ .

III-2) Montrer qu'il existe une constante  $C \in ]0, \infty[$  et un entier  $N$  tels que pour tout  $n \geq N$ ,

$$E[H(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \leq H(X_n) - \frac{\gamma_{n+1}}{2}(H'(X_n))^2 + C\sigma_{n+1}^2.$$

III-3) Montrer que  $H(X_n)$  converge presque sûrement.

III-4) Montrer que  $E[\sum_n \gamma_{n+1}(H'(X_n))^2] < \infty$ . En déduire que presque sûrement,  $\sum_n \gamma_{n+1}(H'(X_n))^2 < \infty$ .

III-5) Montrer que  $X_n$  converge presque sûrement et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \in E$ .

**Fin de l'épreuve**