

## B. ANALYSE NUMÉRIQUE

*Aucun document personnel n'est autorisé*

*L'usage de toute calculatrice est interdit*

### 1 Recherche de valeurs propres pour une matrice tridiagonale hermitienne

Soit  $n$  un entier naturel strictement positif. On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients complexes et  $I_n$  la matrice identité d'ordre  $n$ .

Considérons  $a_1, \dots, a_n$  et  $b_1, \dots, b_{n-1}$  des nombres complexes tels que  $a_i = \bar{a}_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$  (en désignant par  $\bar{a}_i$  le complexe conjugué de  $a_i$ ) et  $b_i \neq 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n-1$ . On note  $T_n$  la matrice à coefficients complexes d'ordre  $n$  suivante :

$$T_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ \bar{b}_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \bar{b}_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & \bar{b}_{n-1} & a_n & \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

La matrice  $T_n$  est dite tridiagonale hermitienne.

1. Pour  $1 \leq k \leq n$  et  $t \in \mathbb{R}$ , on note  $P_k(t)$  le déterminant de la matrice  $T_k - tI_k$  ( $P_k$  est appelé polynôme caractéristique de la matrice  $T_k$ ) et on pose  $P_0 = 1$ .

- (a) Calculer  $P_1$ .  
 (b) Démontrer, pour tout  $k$  tel que  $2 \leq k \leq n$ , la relation suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P_k(t) = (a_k - t)P_{k-1}(t) - |b_{k-1}|^2 P_{k-2}(t). \quad (1.2)$$

- (c) Montrer que le polynôme  $P_k$  est à coefficients réels pour tout  $1 \leq k \leq n$ .  
 (d) Montrer que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} P_k(t) = +\infty$ , pour tout  $1 \leq k \leq n$ .  
 (e) Montrer que pour  $1 \leq k \leq n$ , les zéros du polynôme  $P_k$  sont réels.  
 (f) Montrer que pour  $2 \leq k \leq n$ , les polynômes  $P_k$  et  $P_{k-1}$  n'ont pas de zéro commun. Plus précisément, montrer que pour tout  $2 \leq k \leq n-1$ , si  $\lambda$  est un zéro de  $P_k$ , alors  $P_{k-1}(\lambda)P_{k+1}(\lambda) < 0$ .  
 (g) En déduire que pour  $1 \leq k \leq n-1$ , le polynôme  $P_k$  possède  $k$  racines distinctes qui séparent les  $k+1$  racines du polynôme  $P_{k+1}$ .
2. Nous allons déterminer un minorant de la plus petite valeur propre de  $T_n$  et un majorant de la plus grande. Soit  $\|\cdot\|_\infty$  la norme vectorielle sur  $\mathbb{C}^n$  par :

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

On définit la norme matricielle associée pour tout  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  par :

$$\|P\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Px\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

- (a) Soient  $P$  et  $Q$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\lambda$  une valeur propre de la matrice  $P$  qui n'est pas valeur propre pour la matrice  $Q$ .  
 Montrer que :

$$1 \leq \|(\lambda I_n - Q)^{-1}(P - Q)\|_\infty \leq \|(\lambda I_n - Q)^{-1}\|_\infty \|P - Q\|_\infty.$$

- (b) Notons  $p_{i,j}$  pour  $1 \leq i, j \leq n$  les coefficients de la matrice  $P$ . En choisissant pour  $Q$  la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} p_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_{nn} \end{pmatrix},$$

montrer que les valeurs propres de  $P$  sont localisées dans une réunion de  $n$  disques dont on précisera le centre et le rayon.

- (c) En déduire que les valeurs propres de  $T_n$  appartiennent à l'intervalle  $[m, M]$  où :

$$m = \min_{j=1, \dots, n} (a_j - |b_{j-1}| - |b_j|) \text{ et } M = \max_{j=1, \dots, n} (a_j + |b_{j-1}| + |b_j|),$$

avec la convention  $b_0 = 0$  et  $b_n = 0$ .

3. La suite de polynômes à coefficients réels  $Q_0, Q_1, \dots, Q_m$  est dite suite de Sturm pour le polynôme  $Q_0$  si elle vérifie les conditions suivantes :

- Toutes les racines de  $Q_0$  sont réelles,
- Si  $\lambda$  est une racine de  $Q_0$ , alors  $Q_1(\lambda)$  et  $Q_0'(\lambda)$  sont de signe opposé,
- Pour tout  $1 \leq k \leq m-1$ , si  $\lambda$  est une racine de  $Q_k$ , alors  $Q_{k-1}(\lambda)Q_{k+1}(\lambda) < 0$ .
- Le polynôme  $Q_m$  n'a pas de racine réelle.

- (a) Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $w(x)$  le nombre de changements de signe de la suite de polynômes  $Q_0(x), \dots, Q_m(x)$  avec la convention que lorsque  $Q_i(x) = 0$ , le signe de  $Q_i(x)$  est celui de  $Q_{i+1}(x)$ . Montrer que le nombre de racines du polynôme  $Q_0$  sur l'intervalle  $[a, b]$  est égal à  $w(b) - w(a)$ .
- (b) Montrer que la suite  $P_n, P_{n-1}, \dots, P_1, P_0$  est une suite de Sturm pour le polynôme  $P_n$ .
4. Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les  $n$  valeurs propres de  $T_n$  rangées par ordre croissant. Pour tout  $j = 1, \dots, n$ , construire des suites réelles adjacentes  $(c_k^j)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(d_k^j)_{k \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $\lambda_j$  quand  $k \rightarrow +\infty$  et telles que  $d_k^j - c_k^j = \frac{d_0^j - c_0^j}{2^k}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
5. Qu'en est-il si l'un des coefficients  $b_j$  pour  $1 \leq j \leq n-1$ , de la matrice  $T_n$  s'annule ?

## 2 Intégration numérique

On considère une fonction  $f$  indéfiniment dérivable sur  $[a, b]$ . On cherche à donner une bonne approximation de  $\int_a^b f(x)dx$ . Pour cela, on se donne une subdivision de  $[a, b]$  :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b.$$

1. (a) Proposer deux méthodes d'intégration numérique qui soient exactes pour les polynômes de degré 1.
- (b) Posons  $h_i = x_{i+1} - x_i$  pour tout  $i = 0, \dots, k-1$ . En effectuant un changement de variables, montrer que  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h_i}{2} \int_{-1}^1 f_i(s)ds$  avec une fonction  $f_i$  que l'on précisera.
- (c) Plaçons-nous sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , fixons  $l > 0$  et définissons les points  $\tau_j = -1 + \frac{2j}{l}$  pour  $j = 0, \dots, l$ . Montrer que pour tout  $i = 0, \dots, l$ , il existe un unique polynôme  $L_i$  de degré  $l$  tel que, pour tout  $0 \leq j \leq l$ ,

$$L_i(\tau_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donner l'expression des polynômes  $L_i$ , appelés polynômes de Lagrange. Notons  $P_f$  le polynôme :

$$P_f = \sum_{j=0}^l f(\tau_j) L_j.$$

En approchant  $f$  par  $P_f$ , on approche  $\int_{-1}^1 f(x)dx$  par

$$\sum_{j=0}^l \omega_j f(\tau_j) \text{ avec } \omega_j = \int_{-1}^1 L_j(x)dx. \quad (2.1)$$

Que vaut  $\sum_{j=0}^l \omega_j$  ? Montrer que  $\omega_{l-j} = \omega_j$  pour  $j = 0, \dots, l$ . En déduire que

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{j=0}^l \omega_j f(\tau_j)$$

quand  $f$  est un polynôme de degré  $l$  si  $l$  est impair et de degré  $l+1$  si  $l$  est pair.

- (d) Définissons les points  $x_{i,j} = \frac{x_i + x_{i+1} + h_i \tau_j}{2}$ . On définit la formule de quadrature composée :

$$T_{kl}(f) := \sum_{i=0}^{k-1} \frac{h_i}{2} \sum_{j=0}^l \omega_j f(x_{i,j}). \quad (2.2)$$

Montrer que  $T_{kl}(f)$  converge vers  $\int_a^b f(x) dx$  lorsque  $\max_{0 \leq i \leq k-1} h_i$  tend vers zéro.

- (e) Calculer les formules d'intégration numérique obtenues pour  $l = 1$  et  $l = 2$ .
2. Considérons une fonction  $g$  indéfiniment dérivable sur  $[0, 1]$ .

- (a) Montrer que

$$\frac{1}{2}(g(0) + g(1)) = \int_0^1 g(x) dx + \int_0^1 B_1(x) g'(x) dx \text{ avec } B_1(x) = x - \frac{1}{2}.$$

- (b) Pour tout  $j \geq 2$ , on définit le polynôme  $B_j$  sur  $[0, 1]$  par

$$B_j'(x) = j B_{j-1}(x) \text{ et } \int_0^1 B_j(x) dx = 0.$$

Calculer  $B_2$ .

Montrer que  $B_j(0) = B_j(1)$  pour tout  $j \geq 2$ .

On note  $b_j = B_j(0)$  pour  $j \geq 2$  et on définit  $b_0 = 1$  et  $b_1 = -\frac{1}{2}$ .

- (c) Montrer que pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(g(0) + g(1)) &= \int_0^1 g(x) dx + \sum_{j=2}^n (-1)^j \frac{b_j}{j!} (g^{(j-1)}(1) - g^{(j-1)}(0)) \\ &\quad + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{B_n(x)}{n!} g^{(n)}(x) dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

- (d) Montrer que pour tout  $j \geq 1$  et tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $B_j(x) = \sum_{i=0}^j C_j^i b_i x^{j-i}$  où  $C_j^i = \frac{j!}{i!(j-i)!}$ .

- (e) Montrer que  $B_j(x) = (-1)^j B_j(1-x)$  pour tout  $j \geq 1$  et tout  $x \in ]0, 1[$ .

- (f) Montrer que  $b_j = 0$  si  $j$  est un entier impair  $\geq 3$ . En déduire une simplification de l'expression (2.3).

3. Soient  $f$  une fonction indéfiniment dérivable sur  $[a, b]$  et  $k$  un entier naturel non nul. Notons  $h = \frac{b-a}{k}$ ,  $x_j = a + jh$  pour tout  $j = 0, \dots, k$  et

$$T_h(f) = h \left( \frac{1}{2}(f(x_0) + f(x_k)) + \sum_{j=1}^{k-1} f(x_j) \right). \quad (2.4)$$

On définit la fonction périodique de période 1  $\tilde{B}_n$  par  $\tilde{B}_n(x) = B_n(x - [x])$  où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ .

- (a) Montrer que :

$$\begin{aligned} T_h(f) &= \int_a^b f(x) dx + \sum_{j=1}^n h^{2j} \frac{b_{2j}}{(2j)!} (f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)) dx \\ &\quad - \frac{h^{2n}}{(2n)!} \int_a^b \tilde{B}_{2n} \left( \frac{x-a}{h} \right) f^{(2n)}(x) dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

(b) En déduire qu'il existe des constantes  $C$  et  $h_0$  telles que pour tout  $0 < h < h_0$  :

$$\left| T_h(f) - \int_a^b f(x) dx - \sum_{j=1}^{n-1} a_j h^{2j} \right| \leq Ch^{2n},$$

avec  $a_j = \frac{b_{2j}}{(2j)!} (f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a))$  pour tout  $1 \leq j \leq n-1$ .

4. Nous allons maintenant déterminer une façon d'accélérer la convergence pour le calcul approché de  $\int_a^b f(x) dx$ . Choisissons  $h = \frac{b-a}{2^m}$ .

(a) Grâce à la relation (2.5), nous prolongeons la définition  $T_h(f)$  à tout réel  $h$  strictement positif. Définissons la fonction  $A$  sur  $]0, +\infty[$  par  $A(t) = T_{\sqrt{t}}(f)$ . Montrer qu'il existe une suite de fonctions  $(R_j)_j$ , de coefficients  $(a_j)_j$ , dont on donnera l'expression, et de réels  $(C_j)_j$  telles que pour tout  $n$ ,

$$A(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + R_n(t) \text{ avec } |R_n(t)| \leq C_n t^n, \forall t > 0.$$

(b) Soient  $t_0 > 0$  un réel et  $(n_j)_{j \geq 0}$  une suite strictement croissante d'entiers avec  $n_0 = 1$ . Pour tout  $j \geq 0$  et tout  $m \geq j$ , on note  $t_j = \frac{t_0}{n_j}$  et  $P_{m,j}$  le polynôme de degré au plus  $j$  tel que  $P_{m,j}(t_l) = A(t_l)$  pour  $l = m-j, m-j+1, \dots, m$ . On définit alors :

$$A_{m,j} = P_{m,j}(0), \forall m \geq j \geq 0.$$

Comparer  $P_{m,j}(t) - \frac{t-t_m}{t_{m-j-1}-t_m} (P_{m,j}(t) - P_{m-1,j}(t))$  et  $P_{m,j+1}(t)$  pour  $t \in ]0, +\infty[$ .

En déduire une expression de  $A_{m,j+1}$  en fonction de  $A_{m,j}$ ,  $A_{m-1,j}$ ,  $n_m$  et  $n_{m-j-1}$ .

(c) On choisit  $n_j = 4^j$ , pour tout  $j \geq 0$ . En posant  $h = \frac{b-a}{2^m}$  et en reprenant (2.5), montrer que :

$$\begin{aligned} A_{m,0} &= T_h(f), \forall m \geq 0 \\ A_{m,n} &= \frac{4^n A_{m,n-1} - A_{m-1,n-1}}{4^n - 1}, \forall m > n \geq 0. \end{aligned}$$

Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\left| A_{m,n} - \int_a^b f(x) dx \right| \leq Ch^{2n+2}$ .

Vérifier que  $A_{m,1}$  permet de retrouver la formule (2.2) pour  $l = 2$ , dite formule de Simpson.

### 3 Etude de la famille d'opérateurs $H(\zeta) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (t - \zeta)^2$ .

Pour  $\zeta \in \mathbb{R}$ , on définit l'opérateur  $H(\zeta)$  pour toute fonction  $u$  indéfiniment dérivable sur  $[a, b]$  par :

$$H(\zeta)u(t) = -u''(t) + (t - \zeta)^2 u(t), \forall t \in ]a, b[.$$

Notons  $C_0^\infty([a, b])$  l'ensemble des restrictions à  $[a, b]$  des fonctions indéfiniment dérivables sur  $\mathbb{R}$  à support compact dans  $\mathbb{R}$  et  $C_0^\infty(]a, b[)$  l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans  $]a, b[$ . On définit les réels suivants :

$$\lambda(\zeta, a, b) = \inf_{u \in C_0^\infty(]a, b[), u \neq 0} \frac{\langle H(\zeta)u, u \rangle_{L^2(]a, b[)}}{\|u\|^2} \text{ et } \mu(\zeta, a, b) = \inf_{u \in C_0^\infty([a, b]), u \neq 0} \frac{\langle H(\zeta)u, u \rangle_{L^2([a, b])}}{\|u\|^2}, \quad (3.1)$$

en désignant par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(]a, b[)}$  le produit scalaire  $L^2$  sur  $]a, b[$  et  $\|u\|$  la norme associée.

1. (a) Montrer que  $\lambda(\zeta, a, b) \geq \mu(\zeta, a, b)$  pour tout  $\zeta \in \mathbb{R}$  et tout  $a \in [-\infty, +\infty[$ ,  $b \in ]-\infty, +\infty]$ .
- (b) Supposons que  $]a, b[ \subset ]a', b'[,$  Pour tout  $u \in C_0^\infty(]a, b[)$ ; on définit  $\tilde{u}$  sur  $]a', b'[,$  en prolongeant  $u$  par zéro sur  $]a', a] \cup ]b, b'[,$  Montrer que  $\tilde{u} \in C_0^\infty(]a', b'[,)$ . En déduire que  $\lambda(\zeta, a, b) \geq \lambda(\zeta, a', b')$  pour tout  $\zeta \in \mathbb{R}$ .
- (c) Notons  $\mathcal{S}([a, b])$  la restriction à  $[a, b]$  des fonctions de l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}), t^j u^{(k)} \in L^2(\mathbb{R}), \text{ pour tout } j, k \geq 0\}$ . Supposons  $-\infty < a < b < +\infty$ . On admet qu'il existe deux applications  $\Phi_D$  et  $\Phi_N$  continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  muni de la norme  $\|f\| + \|f'\|$  :

$$\begin{aligned}\Phi_D: \mathbb{R} &\rightarrow \{u \in \mathcal{S}([a, b]), \|u\|_{L^2([a, b])} = 1, u(a) = u(b) = 0\}, \\ \Phi_N: \mathbb{R} &\rightarrow \{u \in \mathcal{S}([a, b]), \|u\|_{L^2([a, b])} = 1, u'(a) = u'(b) = 0\},\end{aligned}$$

telles que, pour tout  $\zeta \in \mathbb{R}$  :

$$H(\zeta)(\Phi_D(\zeta)) = \lambda(\zeta, a, b)\Phi_D(\zeta) \text{ et } H(\zeta)(\Phi_N(\zeta)) = \mu(\zeta, a, b)\Phi_N(\zeta).$$

En estimant les quantités  $(\lambda(\zeta + h, a, b) - \lambda(\zeta, a, b)) < \Phi_D(\zeta), \Phi_D(\zeta + h) >_{L^2([a, b])}$  et  $(\mu(\zeta + h, a, b) - \mu(\zeta, a, b)) < \Phi_N(\zeta), \Phi_N(\zeta + h) >_{L^2([a, b])}$ , montrer que  $\zeta \mapsto \lambda(\zeta, a, b)$  et  $\zeta \mapsto \mu(\zeta, a, b)$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $\zeta \in \mathbb{R}$ ,

$$\lambda'(\zeta, a, b) = 2 \int_a^b (\zeta - t) |\Phi_D(\zeta)(t)|^2 dt \text{ et } \mu'(\zeta, a, b) = 2 \int_a^b (\zeta - t) |\Phi_N(\zeta)(t)|^2 dt.$$

On admet que ces expressions restent valables si  $a = -\infty$  ou  $b = +\infty$ .

- (d) Soient  $a$  et  $b$  tels que  $-\infty \leq a < b \leq +\infty[$  et soit  $\zeta \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$\lambda(\zeta, a, b) = \lambda(0, a - \zeta, b - \zeta) \text{ et } \mu(\zeta, a, b) = \mu(0, a - \zeta, b - \zeta).$$

- (e) Supposons  $-\infty < a < b < +\infty$ . On admet qu'il existe deux applications continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  muni de la norme  $\|f\| + \|f'\|$  telles que pour tout  $\zeta \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}\Psi_D: \mathbb{R} &\rightarrow \{u \in \mathcal{S}([a - \zeta, b - \zeta]), \|u\|_{L^2([a - \zeta, b - \zeta])} = 1, u(a - \zeta) = u(b - \zeta) = 0\} \\ &\text{et } H(0)(\Psi_D(\zeta)) = \lambda(\zeta, a, b)\Psi_D(\zeta), \\ \Psi_N: \mathbb{R} &\rightarrow \{u \in \mathcal{S}([a - \zeta, b - \zeta]), \|u\|_{L^2([a - \zeta, b - \zeta])} = 1, u'(a - \zeta) = u'(b - \zeta) = 0\} \\ &\text{et } H(0)(\Psi_N(\zeta)) = \mu(\zeta, a, b)\Psi_N(\zeta).\end{aligned}$$

Soient  $\zeta \in \mathbb{R}$  et  $h \neq 0$ .

- i. Montrer que :

$$\begin{aligned}(\lambda(\zeta + h, a, b) - \lambda(\zeta, a, b)) &\int_{a - \zeta}^{b - \zeta - h} \Psi_D(\zeta + h)(t) \overline{\Psi_D(\zeta)(t)} dt \\ &= -\Psi_D(\zeta + h)'(b - \zeta - h) \overline{\Psi_D(\zeta)(b - \zeta - h)} - \Psi_D(\zeta + h)(a - \zeta) \overline{\Psi_D(\zeta)'(a - \zeta)}.\end{aligned}$$

- ii. En déduire que  $\zeta \mapsto \lambda(\zeta, a, b)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que sa dérivée par rapport à  $\zeta$  vaut  $\lambda'(\zeta, a, b) = |\Psi_D(\zeta)'(b - \zeta)|^2 - |\Psi_D(\zeta)'(a - \zeta)|^2$ .

- iii. Montrer que :

$$\begin{aligned}(\mu(\zeta + h, a, b) - \mu(\zeta, a, b)) &\int_{a - \zeta}^{b - \zeta - h} \Psi_N(\zeta + h)(t) \overline{\Psi_N(\zeta)(t)} dt \\ &= \Psi_N(\zeta + h)'(a - \zeta) \overline{\Psi_N(\zeta)(a - \zeta)} + \Psi_N(\zeta + h)(b - \zeta - h) \overline{\Psi_N(\zeta)'(b - \zeta - h)}.\end{aligned}$$

iv. En déduire que  $\zeta \mapsto \mu(\zeta, a, b)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que sa dérivée par rapport à  $\zeta$  vaut

$$\mu'(\zeta, a, b) = ((a - \zeta)^2 - \mu(\zeta, a, b)) |\Psi_N(\zeta)(a - \zeta)|^2 - ((b - \zeta)^2 - \mu(\zeta, a, b)) |\Psi_N(\zeta)(b - \zeta)|^2.$$

(f) On admet que les résultats de la question (3.1e) restent valables si  $b = +\infty$  ( $a > -\infty$ ) en supprimant les conditions aux limites au point  $b$ . Ecrire, sans justification, les expressions de  $\lambda'(\zeta, a, +\infty)$  et de  $\mu'(\zeta, a, +\infty)$ .

2. Cas où  $]a, b[ = \mathbb{R}$ .

(a) Montrer que  $\lambda(\zeta, -\infty, +\infty) = \mu(\zeta, -\infty, +\infty)$  pour tout  $\zeta \in \mathbb{R}$ .

(b) Montrer qu'il existe des polynômes  $P_n$  de degré  $n$  tels que  $P_n(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$  soit vecteur propre associé à la valeur propre  $2n + 1$  pour l'opérateur  $H(0)$ , c'est-à-dire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, H(0) \left( P_n(t)e^{-\frac{t^2}{2}} \right) = (2n + 1)P_n(t)e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

En déduire une majoration de  $\lambda(\zeta, -\infty, +\infty)$ .

(c) Soit  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , calculer  $(tu(t))' - tu'(t)$ .  
En prenant le produit scalaire avec  $u$ , montrer que :

$$\|u\|^2 \leq 2\|tu\| \|u'\|.$$

En déduire que  $\lambda(\zeta, -\infty, +\infty) = 1$ .

3. Cas où  $]a, b[ = ]0, +\infty[$ .

(a) En utilisant l'expression de  $\lambda'(\zeta, 0, +\infty)$  obtenue en (3.1f) et en justifiant le fait que  $|\Psi_D(\zeta)'(-\zeta)| \neq 0$ , montrer que la fonction  $\zeta \rightarrow \lambda(\zeta, 0, +\infty)$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$  puis que  $\lambda(\zeta, 0, +\infty) \geq 1$  pour tout  $\zeta \in \mathbb{R}$ .

(b) Montrer que  $\lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \lambda(\zeta, 0, +\infty) = \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \mu(\zeta, 0, +\infty) = +\infty$ .

(c) En utilisant l'expression de  $\mu'(\zeta, 0, +\infty)$  obtenue en (3.1c), montrer que la fonction  $\zeta \rightarrow \mu(\zeta, 0, +\infty)$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, 0[$ .

(d) En utilisant la fonction  $u(t) = \exp(-t^2/2)$ , montrer que  $\mu(0, 0, +\infty) \leq 1$ .

(e) Soient  $u(t) = \exp(-t^2/2)$  et  $\chi$  une fonction indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ , minorée par 0 et majorée par 1 telle que  $\chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$ . On définit, pour tout  $\zeta > 0$ , la fonction  $\chi_\zeta$  sur  $\mathbb{R}$  par  $\chi_\zeta(t) = \chi(\zeta(t + \zeta))$ . En estimant  $H(0)(\chi_\zeta u)$ , montrer qu'il existe une constante  $C$ , indépendante de  $\zeta$  telle que  $\lambda(\zeta, 0, +\infty) \leq 1 + C\zeta^2 \exp(-\zeta^2)$ .  
En déduire que  $\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \lambda(\zeta, 0, +\infty) = 1$ .

On admet que  $\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \mu(\zeta, 0, +\infty) = 1$ .

(f) On admet que les fonctions  $\zeta \mapsto \mu(\zeta, 0, +\infty)$  et  $\zeta \mapsto \Psi_N(\zeta)$  sont indéfiniment dérivables sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $\zeta_0$  un minimum local de  $\zeta \mapsto \mu(\zeta, 0, +\infty)$ , montrer que  $\zeta_0^2 = \mu(\zeta_0, 0, +\infty)$  et que  $\mu''(\zeta_0) = 2\zeta_0 |\Psi_N(\zeta_0)(-\zeta_0)|^2$ .

En déduire que la fonction  $\zeta \mapsto \mu(\zeta, 0, +\infty)$  admet un unique minimum sur  $\mathbb{R}$ , atteint en un point  $\zeta_0 > 0$  et que  $\mu(\zeta_0) < 1$ .

(g) Sur un même graphe, tracer les courbes  $\zeta \mapsto \lambda(\zeta, 0, +\infty)$  et  $\zeta \mapsto \mu(\zeta, 0, +\infty)$ .

4. Cas où  $a = 0$  et  $b \in ]0, +\infty[$ . On cherche à calculer la plus petite valeur propre de l'opérateur  $H(\zeta)$  avec conditions de Neumann en utilisant une méthode d'approximations par différences finies. Soit  $u \in C_0^\infty([a, b])$ .

Pour une fonction  $g$  définie sur un voisinage  $]0, \eta[$  de 0, la notation  $g(h) = \mathcal{O}(h^n)$  ( $n \geq 0$ ) signifie qu'il existe un réel  $\varepsilon \in ]0, \eta[$  et une constante  $M \geq 0$  tels que pour tout  $0 < h < \varepsilon$ ,  $|g(h)| \leq Mh^n$ .

(a) Soient  $t \in ]a, b[$  et  $h > 0$  tel que  $t+h \in ]a, b[$  et  $t-h \in ]a, b[$ . Ecrire la formule de Taylor de la fonction  $u$  à l'ordre 2 entre les points  $t+h$  et  $t$  puis entre les points  $t-h$  et  $t$ . En déduire que

$$u''(t) = \frac{u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h). \quad (3.2)$$

(b) En écrivant la formule de Taylor à l'ordre 1 entre les points  $a+h$  et  $a$  puis entre les points  $b-h$  et  $b$ , montrer que :

$$u'(a) = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \mathcal{O}(h) \text{ et } u'(b) = \frac{u(b) - u(b-h)}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (3.3)$$

(c) Soit  $N$  un entier strictement positif et  $h = \frac{b-a}{N}$ . Pour tout entier  $j = 0, \dots, N$ , on note  $t_j$  le point  $t_j = a + jh$  et  $u_j = u(t_j)$ .

A l'aide des relations (3.3), donner une relation liant  $u_0$  et  $u_1$  puis  $u_{N-1}$  et  $u_N$  pour discrétiser les conditions aux limites  $u'(a) = u'(b) = 0$ .

(d) Soient  $0 < j < N$  et  $t \in [a + jh, a + (j+1)h[$ . Montrer que

$$-u''(t) + (t - \zeta)^2 u(t) = -\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + (jh - \zeta)^2 u_j + \mathcal{O}(h).$$

(e) A l'aide des questions (4c) et (4d) et en définissant le vecteur  $U$  par ses coordonnées  $(u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, u_N)$ , montrer qu'il existe une matrice  $A(\zeta) \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$  telle que :

$$u'(a) = u'(b) = 0 \text{ et } \forall t \in ]a, b[, -u''(t) + (t - \zeta)^2 u(t) = \mu u(t) \\ \text{si et seulement si } A(\zeta)U = \mu U + \mathcal{O}(h).$$

Donner l'expression des coefficients de la matrice  $A(\zeta)$ . Montrer que l'on peut déterminer les valeurs propres de  $A(\zeta)$  à l'aide de l'algorithme développé à la section 1.

5. Soient  $-\infty < a < b < +\infty$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N > 0$  et  $h = \frac{b-a}{N}$ . On définit les points  $t_j = a + jh$  pour  $j = 0, \dots, N$ . Soient  $f \in C_0^\infty([a, b])$  et  $g$  sa dérivée.

(a) Montrer que :

$$\langle H(\zeta)f, f \rangle_{L^2([a, b])} = \int_a^b (|g(t)|^2 + (t - \zeta)^2 |f(t)|^2) dt.$$

(b) On note  $F$  et  $G$  les vecteurs de coordonnées respectives  $(f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_N))$  et  $(g(t_0), g(t_1), \dots, g(t_N))$ . Par la méthode des trapèzes (rappelée en (2.4)), donner des approximations, notées respectivement  $T_h(f, g)$  et  $T_h(f)$ , de  $\langle H(\zeta)f, f \rangle_{L^2([a, b])}$  et de  $\|f\|^2$  et une estimation des erreurs.

(c) En déduire une majoration de  $\lambda(\zeta, a, b)$ .

(d) Proposer une méthode pour augmenter la précision du calcul de  $\langle H(\zeta)f, f \rangle_{L^2([a, b])}$  et de  $\|f\|^2$ .