

B. ANALYSE NUMÉRIQUE

Aucun document personnel n'est autorisé

L'usage de toute calculatrice est interdit

Notations

De manière usuelle, on désigne par \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels et par \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers naturels non nuls. La droite réelle est notée \mathbb{R} .

Dans tout le problème, f désigne une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur \mathbb{R} . On suppose que la fonction f est lipschitzienne sur \mathbb{R} et on note L une constante de Lipschitz de f :

$$|f(u) - f(v)| \leq L|u - v|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

On supposera $L > 0$.

On définit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par la formule

$$g(u, v) = \frac{1}{2}(f(u) + 2Lu) + \frac{1}{2}(f(v) - 2Lv).$$

Partie I

Soit $u_* \in \mathbb{R}$ un zéro de f :

$$f(u_*) = 0.$$

Cette partie du problème est consacrée à l'étude de l'existence d'une suite $(w_i)_{i \geq 0}$ solution du système

$$\begin{cases} g(w_i, w_{i+1}) = 0, & \forall i \in \mathbb{N}, \\ w_0 = 0, \\ w_i \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} u_*. \end{cases} \quad (1)$$

1) On note f_- et f_+ les fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définies par les formules

$$\begin{cases} f_-(u) = \frac{1}{2}(f(u) - 2Lu), \\ f_+(u) = \frac{1}{2}(f(u) + 2Lu). \end{cases}$$

a) Soit $u, u' \in \mathbb{R}$ avec $u' \geq u$. Montrer que

$$f_-(u') - f_-(u) \leq -\frac{L}{2}(u' - u) \quad \text{et} \quad f_+(u') - f_+(u) \geq \frac{L}{2}(u' - u).$$

b) En déduire que f_- (respectivement, f_+) est strictement décroissante (respectivement, strictement croissante) sur \mathbb{R} et que ces fonctions induisent des bijections de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

2) On considère le système suivant, d'inconnue $(w_i)_{i \geq 0}$:

$$\begin{cases} g(w_i, w_{i+1}) = 0, & \forall i \in \mathbb{N}, \\ w_0 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

a) Montrer que la fonction g est strictement croissante par rapport à sa première variable et strictement décroissante par rapport à sa deuxième variable (on pourra exprimer g en fonction de f_- et f_+).

b) Montrer que le système (2) admet une unique solution (w_i) .

3) Montrer que $f_-(w_{i+1}) - f_-(w_i) = f_+(w_{i-1}) - f_+(w_i)$ pour tout $i \geq 1$. En déduire que la suite (w_i) est monotone puis montrer que (w_i) est décroissante dans le cas où $f(0) \leq 0$, croissante dans le cas où $f(0) \geq 0$.

Soit $M > 0$. On suppose que $u_* \in [0, M]$.

4) On suppose f strictement croissante sur $[0, M]$. Montrer que si (1) admet une solution, alors $u_* = 0$.

5) On suppose $f' < 0$ sur $[0, M]$.

a) Montrer que (w_i) est bornée par les nombres 0 et u_* .

b) Montrer que $w_\infty = \lim_{i \rightarrow +\infty} w_i$ existe puis montrer que (1) a une solution, c'est-à-dire que $w_\infty = u_*$.

c) On suppose que u_* est non nul (donc $u_* \in]0, M[$). Soit $\alpha = \min_{0 \leq s \leq u_*} (-f'(s))$. Justifier $\alpha > 0$ et montrer

$$u_* - w_{i+1} \leq \gamma(u_* - w_i), \quad \gamma = \frac{L}{L + \alpha/2}.$$

d) En déduire

$$|u_* - w_i| \leq u_* \gamma^i, \quad \forall i \geq 0.$$

Partie II

On rappelle que g désigne la fonction définie par la formule :

$$g(u, v) = \frac{1}{2}(f(u) + 2Lu) + \frac{1}{2}(f(v) - 2Lv),$$

la constante L étant une constante de Lipschitz strictement positive de f sur \mathbb{R} . Soit k, h deux réels strictement positifs tels que le rapport $\lambda = \frac{k}{h}$ vérifie

$$\lambda = \frac{k}{h} \leq \frac{1}{2L}. \quad (3)$$

Étant donné une suite $(u_i^0)_{i \geq 1}$ (dite *condition initiale discrète*), on définit de manière itérative la suite (u_i^n) par la formule : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \geq 1$,

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)}{h} = 0 \quad (4)$$

où on a posé

$$u_0^n = 0. \quad (5)$$

1) On rappelle (cela a été prouvé à la question I-2-a) que la fonction g est croissante par rapport à sa première variable, décroissante par rapport à la seconde. Montrer que, d'autre part, la fonction g est $\frac{3L}{2}$ -Lipschitzienne par rapport à chacune de ses variables, c'est-à-dire montrer que :

pour tout $u, v, u', v' \in \mathbb{R}$, on a

$$|g(u, v) - g(u, v')| \leq \frac{3L}{2}|v - v'| \quad \text{et} \quad |g(u, v) - g(u', v)| \leq \frac{3L}{2}|u - u'|.$$

- 2) a) On suppose que $u_i^0 = 1$ pour tout $i \geq 1$. Calculer $(u_i^1)_{i \geq 1}$ et $(u_i^2)_{i \geq 1}$ dans le cas $f = 0$, $\lambda L = 1/2$.
 b) On suppose encore que $u_i^0 = 1$ pour tout $i \geq 1$ (sans faire d'hypothèse particulière sur f).
 Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_i^n = 1$ pour tout $i \geq n + 1$.
- 3) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$, on a $u_i^{n+1} = H(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n)$ où $H \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$,
 $H(u, u, u) = u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et

$$H(u, v', w) - H(u, v, w) = (1 - 2\lambda L)(v' - v), \quad \forall (u, v, v', w) \in \mathbb{R}^4.$$

En déduire que, sous l'hypothèse (3), H est une fonction croissante par rapport à chacune de ses variables.

- b) On suppose $u_i^0 \in [0, 1]$ pour tout $i \geq 1$. Montrer que $u_i^n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$.
 4) Soit (\tilde{u}_i^n) une suite vérifiant (4)-(5), associée à une condition initiale discrète $(\tilde{u}_i^0)_i$.

- a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on note $a \top b = \max\{a, b\}$. Montrer que

$$u_i^{n+1} \top \tilde{u}_i^{n+1} \leq H(u_{i-1}^n \top \tilde{u}_{i-1}^n, u_i^n \top \tilde{u}_i^n, u_{i+1}^n \top \tilde{u}_{i+1}^n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$.

- b) De même, montrer que

$$u_i^{n+1} \perp \tilde{u}_i^{n+1} \geq H(u_{i-1}^n \perp \tilde{u}_{i-1}^n, u_i^n \perp \tilde{u}_i^n, u_{i+1}^n \perp \tilde{u}_{i+1}^n)$$

où $a \perp b = \min\{a, b\}$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

- c) En utilisant la formule $|a - b| = a \top b - a \perp b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, en déduire

$$|u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}| \leq |u_i^n - \tilde{u}_i^n| + (A_{i-1}^n - A_i^n),$$

où $A_i^n = \lambda(g(u_i^n \top \tilde{u}_i^n, u_{i+1}^n \top \tilde{u}_{i+1}^n) - g(u_i^n \perp \tilde{u}_i^n, u_{i+1}^n \perp \tilde{u}_{i+1}^n))$, puis

$$\forall I \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^I |u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}| \leq \sum_{i=1}^I |u_i^n - \tilde{u}_i^n| + A_0^n - A_I^n$$

- d) Montrer que $A_0^n \leq 0$.

- e) Montrer que $A_I^n \geq -|u_{I+1}^n - \tilde{u}_{I+1}^n|$.

- f) En déduire : pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $I \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^I |u_i^N - \tilde{u}_i^N| \leq \sum_{i=1}^I |u_i^0 - \tilde{u}_i^0| + \sum_{n=0}^{N-1} |u_{I+1}^n - \tilde{u}_{I+1}^n|.$$

- 5) On suppose dorénavant $f' < 0$ sur $[0, 1]$

Soit (u_i^n) la suite définie par (4)-(5), associée à la condition initiale discrète (u_i^0) donnée par

$$u_i^0 = 1, \quad \forall i \geq 1.$$

- a) En utilisant les résultats de la partie I, montrer qu'il existe une unique solution $(w_i)_{i \geq 0}$ au système

$$\begin{cases} g(w_i, w_{i+1}) = f(1), & \forall i \in \mathbb{N}, \\ w_0 = 0, \\ w_i \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 1, \end{cases}$$

et qu'il existe $\gamma \in]0, 1[$ tel que

$$|1 - w_i| \leq \gamma^i, \quad \forall i \geq 0.$$

- b) Montrer que la suite (\tilde{u}_i^n) définie par $\tilde{u}_i^n = w_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}, i \geq 1$ vérifie (4)-(5).
 c) En utilisant les résultats des questions II-2-b et II-4-f montrer que, pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |1 - u_i^N| \leq 2 \sum_{i=1}^N |1 - w_i| + N|1 - w_{N+1}|.$$

- d) En déduire que la quantité $\sum_{i=1}^{\infty} |1 - u_i^N|$ est bornée indépendamment de $N \in \mathbb{N}^*$.

Partie III

Pour $\theta \in \mathbb{R}, \sin(\theta) \neq 0$, on note $\cotan(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $N \times N$ à coefficients réels, on note I_N la matrice identité de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

On note $\langle X, Y \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs de \mathbb{R}^N (i.e.

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{j=1}^N x_j y_j, \quad \forall X = {}^t(x_1, \dots, x_N), Y = {}^t(y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$$

et on désigne par $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne associée ($\|X\|_2 = \sqrt{\langle X, X \rangle}$).

- 1) Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ orthogonale (i.e. ${}^t P P = I_N$) et d'une matrice diagonale D réelle ($D \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$) telles que $A = P D {}^t P$.

On va maintenant calculer D et P .

- 2) On note $\|\cdot\|_{\infty}$ la norme sur \mathbb{R}^N définie par $\|X\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq N} |x_j|$ pour tout $X = {}^t(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$.
 Montrer que $\|AX\|_{\infty} \leq \|X\|_{\infty}$ pour tout $X \in \mathbb{R}^N$.
 3) Soit $\mu \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et $X = {}^t(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ un vecteur propre associé.
 a) Montrer que $|\mu| \leq 1$.

Il existe donc un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\mu = \cos(\theta)$.

- b) Montrer que $x_{j+2} - 2\mu x_{j+1} + x_j = 0$ pour $1 \leq j \leq N-2$. En déduire que $x_j = \alpha \cos(j\theta) + \beta \sin(j\theta)$ pour $1 \leq j \leq N$ où α et β sont des constantes réelles.
 c) En utilisant les identités $x_2 = 2\mu x_1$ et $x_{N-1} = 2\mu x_N$, en déduire $\alpha = 0$ puis $\theta = \frac{k\pi}{N+1}$, $1 \leq k \leq N$.

Pour $k \in \{1, \dots, N\}$ on pose donc $\theta_k = \frac{k\pi}{N+1}$, on note $\mu_k = \cos(\theta_k)$ la k -ième valeur propre de A . On note aussi

$$X_k = \beta_k {}^t(\sin(\theta_k), \sin(2\theta_k), \dots, \sin(N\theta_k))$$

le vecteur propre de A associé à la valeur propre μ_k , le réel β_k étant choisi positif et tel que $\|X_k\|_2 = 1$. Soit enfin P la matrice de vecteurs colonnes X_1, \dots, X_N .

4) Montrer que P est une matrice orthogonale et montrer que P diagonalise A .

5) a) Montrer la formule

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad \sum_{j=1}^N \sin(j\theta_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair,} \\ \cotan\left(\frac{\theta_k}{2}\right) & \text{si } k \text{ impair.} \end{cases} \quad (7)$$

b) Montrer que $\beta_k = \sqrt{\frac{2}{N+1}}$ pour tout $1 \leq k \leq N$.

c) On note $\mathbf{1}$ le vecteur de \mathbb{R}^N dont toutes les composantes sont égales à 1 : $\mathbf{1} = {}^t(1, \dots, 1)$. Montrer que les composantes du vecteur ${}^tP\mathbf{1}$ sont données par la formule suivante :

$$({}^tP\mathbf{1})_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ pair,} \\ \sqrt{\frac{2}{N+1}} \cotan\left(\frac{\pi j}{2(N+1)}\right) & \text{si } j \text{ impair.} \end{cases} \quad (8)$$

Partie IV

Soit $(u_i^0)_{i \geq 1}$ la suite définie par $u_i^0 = 1$ pour tout $i \geq 1$.

Dans la partie II, on a étudié la suite (u_i^n) définie à partir de (u_i^0) par les relations (4)-(5) et on a en particulier montré que, dans le cas où la fonction f vérifie $f' < 0$ sur $[0, 1]$, la quantité $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - u_i^N)$ est bornée indépendamment de l'entier N .

On s'intéresse ici au cas où la fonction f est nulle. On fixe la valeur du produit λL à $1/2$, de sorte que la suite $(u_i^n)_{i \geq 1}$ est définie par la relation de récurrence

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n), \quad i \geq 1,$$

où on a posé $u_0^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On rappelle qu'on a $u_i^n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}, i \geq 1$ et que $u_i^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}, i \geq n + 1$.

On se propose maintenant de montrer le résultat suivant : il existe deux constantes positives c_0 et c_1 , il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$, tels que, pour tout $N \geq N_0$,

$$c_0\sqrt{N} \leq \sum_{i=1}^{\infty} (1 - u_i^N) \leq c_1\sqrt{N}. \quad (9)$$

On fixe $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$.

1) On pose $U_n = (u_1^n, \dots, u_N^n) \in \mathbb{R}^N$. Montrer que, pour tout $n \leq N$,

$$U_{n+1} = AU_n + V$$

où A est la matrice définie par la formule (6) et $V = (0, \dots, 0, 1/2) \in \mathbb{R}^N$.

On rappelle qu'on désigne par $\mathbf{1}$ le vecteur $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$ (de sorte que $U_0 = \mathbf{1}$). Montrer que $U_N = A^N \mathbf{1} + \sum_{n=0}^{N-1} A^n V$ puis

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1 - u_i^N) = \langle (I_N - A^N) \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle - \sum_{n=0}^{N-1} \langle A^n V, \mathbf{1} \rangle. \quad (10)$$

2) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1 - u_i^N) = \frac{1}{2} \langle (I_N - A^N) \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle. \quad (11)$$

3) a) En utilisant les résultats de la partie III, montrer que

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1 - u_i^N) = \sum_{j \in J_N} a_j^N b_j^N \quad (12)$$

avec

$$a_j^N = \frac{1}{N+1} \cotan^2 \left(\frac{\pi j}{2(N+1)} \right), \quad b_j^N = 1 - \cos^N \left(\frac{\pi j}{N+1} \right),$$

et

$$J_N = \{j \in \{1, \dots, N\}, j \text{ impair}\}.$$

On partitionne J_N en $J_N = K_N \cup L_N$ avec

$$K_N = \{j \in J_N, 1 \leq j \leq \sqrt{N+1}\}, \quad L_N = \{j \in J_N, \sqrt{N+1} < j\},$$

et on pose $Y_N = \sum_{j \in K_N} a_j^N b_j^N$, $Z_N = \sum_{j \in L_N} a_j^N b_j^N$, de sorte que $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - u_i^N) = Y_N + Z_N$.

b) Minoration de $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - u_i^N)$:

i) Montrer que $\cotan(x) \geq \frac{1}{x\sqrt{2}}$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. En déduire

$$a_j^N \geq \frac{2(N+1)}{\pi^2 j^2}, \quad \forall N \geq 3, j \in K_N.$$

ii) Prouver les inégalités

$$\begin{cases} \ln(\cos(x)) \leq -\frac{x^2}{2}, & \forall x \in [0, \pi/2[, \\ 1 - e^{-u} \geq e^{-\pi^2/2} u, & \forall u \in [0, \pi^2/2]. \end{cases}$$

En déduire

$$b_j^N \geq \frac{\pi^2 e^{-\pi^2/2}}{2} \frac{N j^2}{(N+1)^2}, \quad \forall N \geq 3, j \in K_N.$$

iii) Montrer que

$$a_j^N b_j^N \geq \frac{e^{-\pi^2/2}}{2}, \quad \forall N \geq 3, j \in K_N.$$

Montrer que, pour $N \geq 15$, le cardinal de K_N est minoré par $\frac{\sqrt{N+1}}{4}$ et en déduire que, pour $N \geq 15$, on a

$$Y_N \geq \frac{e^{-\pi^2/2}}{8} \sqrt{N}.$$

iv) Justifier $Z_N \geq 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et en déduire

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1 - u_i^N) \geq \frac{e^{-\pi^2/2}}{8} \sqrt{N}, \quad \forall N \geq 15.$$

c) Majoration de $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - u_i^N)$:

i) Prouver les estimations

$$\begin{cases} \ln(\cos(x)) \geq -x^2, & \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}], \\ 1 - e^{-u} \leq u, & \forall u \geq 0. \end{cases}$$

En déduire que

$$b_j^N \leq \frac{\pi^2 N j^2}{(N+1)^2}, \quad \forall N \geq 15, \forall j \in K_N. \quad (13)$$

ii) Montrer

$$0 \leq \cotan(x) \leq \frac{\pi}{2x}, \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}],$$

puis $a_j^N b_j^N \leq \frac{\pi^2 N}{N+1}$ pour tout $N \geq 15, j \in K_N$. En déduire

$$Y_N \leq \pi^2 \sqrt{N}, \quad \forall N \geq 15.$$

iii) Montrer que

$$a_j^N \leq \int_{j-1}^j \frac{1}{N+1} \cotan^2\left(\frac{\pi t}{2(N+1)}\right) dt, \quad \forall j \in \{2, \dots, N\}.$$

En remarquant que $0 \leq b_j^N \leq 2$ pour tout $N \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, N\}$, en déduire

$$Z_N \leq \frac{2}{N+1} \int_{\sqrt{N+1}-1}^N \cotan^2\left(\frac{\pi t}{2(N+1)}\right) dt.$$

En calculant cette intégrale, montrer

$$Z_N \leq \frac{4}{\pi} \cotan \left(\frac{\pi(\sqrt{N+1}-1)}{2(N+1)} \right).$$

En déduire l'existence de constantes $c_f > 0$ et $N_f \in \mathbb{N}^*$ (dont on précisera les valeurs) telles que

$$Z_N \leq c_f \sqrt{N}, \forall N \geq N_f.$$

4) Donner des valeurs de c_0, c_1, N_0 pour lesquelles (9) a lieu.