

C34121

**3<sup>e</sup> ANNÉE**

**MATHÉMATIQUES I**

---

DURÉE : 5 HEURES

---

*L'usage de toute calculatrice est interdit*

*Aucun document personnel n'est autorisé*

**Tournez la page S.V.P.**

On définit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des fonctions continues  $F : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$ . On rappelle que l'on dit que

$$\int_0^{\infty} F(t) dt \text{ converge et vaut } L \in \mathbb{C}$$

lorsque

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X F(t) dt = L.$$

On rappelle le critère de Cauchy : cette limite existe si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X_\varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall X, Y, X_\varepsilon \leq X \leq Y, \quad \left| \int_X^Y F(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Par ailleurs, lorsque

$$\int_0^{\infty} |F(t)| dt \text{ converge,}$$

on dit que

$$\int_0^{\infty} F(t) dt \text{ est absolument convergente.}$$

On rappelle également que si  $h : U \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction holomorphe sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  et si  $\Gamma$  est un chemin contenu dans  $U$ , admettant un paramétrage  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  continu et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux (où  $[a, b]$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ), alors l'intégrale curviligne de la fonction  $h$  le long du chemin  $\Gamma$  est définie par

$$\int_{\Gamma} h(z) dz := \int_a^b h(\gamma(u)) \gamma'(u) du.$$

Pour tout  $F \in \mathcal{C}$ , on définit  $f = \mathcal{L}F$  par

$$f(s) = (\mathcal{L}F)(s) := \int_0^{+\infty} F(t) e^{-st} dt,$$

pour les nombres complexes  $s$  tels que cette intégrale impropre converge. On dit que  $f = \mathcal{L}F$  est la *transformée de Laplace* de  $F$ .

Le but de ce problème est l'étude de quelques propriétés et applications de la transformation de Laplace.

On notera  $\mathcal{L}$  la transformation de Laplace et on notera en lettre majuscule (par exemple  $F$ ) les fonctions *originales* (fonctions de la variable réelle  $t$ ) et en lettre minuscule (par exemple  $f$ ) les fonctions *images* par  $\mathcal{L}$  (fonctions de la variable complexe  $s$ ).

On utilisera librement les résultats suivants :

**Théorème de Stone-Weierstrass.** Soit  $[a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  (avec  $-\infty < a \leq b < +\infty$ ). Alors, pour toute fonction continue  $f$  de  $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , il existe une suite  $P_n$  de polynômes de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $P_n$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers  $f$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**Théorème d'holomorphie d'une intégrale à paramètre.** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On considère  $g : (s, t) \in U \times I \mapsto g(s, t) \in \mathbb{C}$  une fonction de deux variables vérifiant :

(i)  $\forall s \in U$ , la fonction  $t \in I \mapsto g(s, t)$  appartient à  $L^1(I)$ . On note alors  $g$  la fonction définie sur  $U$  par :

$$\forall s \in U, \tilde{g}(s) = \int_I g(s, t) dt.$$

(ii) Pour presque tout  $t \in I$ , la fonction  $s \in U \mapsto g(s, t)$  est holomorphe (ou  $\mathbb{C}$ -dérivable). On note  $s \in U \mapsto \frac{\partial}{\partial s} g(s, t)$  sa dérivée au sens complexe.

(iii) Il existe  $h \in L^1(I)$  telle que pour tout  $s \in U$  et pour presque tout  $t \in I$ ,  $|\frac{\partial}{\partial s} g(s, t)| \leq h(t)$ .

Alors la fonction  $\tilde{g}$  est définie et holomorphe sur  $U$  et sa dérivée au sens complexe est donnée par :

$$\forall s \in U, \tilde{g}'(s) = \int_I \frac{\partial}{\partial s} g(s, t) dt.$$

## PARTIE I. DOMAINES DE CONVERGENCE ET RÉGULARITÉ

### Domaine de convergence absolue

Pour tout  $F \in \mathcal{C}$ , on définit le *domaine de convergence absolue* de  $\mathcal{L}F$  par

$$A(F) := \{s \in \mathbb{C} \mid \int_0^{+\infty} F(t)e^{-st} dt \text{ converge absolument} \},$$

et l'*abscisse de convergence absolue* de  $\mathcal{L}F$  par

$$\alpha(F) := \inf\{\sigma \in \mathbb{R} \mid \sigma \in A(F)\}.$$

1. Soit  $F \in \mathcal{C}$ . On suppose que  $A(F)$  est non vide. Soit  $s_0 \in A(F)$ . Montrer que

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) \geq \operatorname{Re}(s_0)\} \subset A(F).$$

2. En déduire que, pour tout  $F \in \mathcal{C}$ , on est dans l'un des cas suivants:

- (i)  $A(F) = \mathbb{C}$ ;
- (ii)  $A(F) = \emptyset$ ;
- (iii)  $A(F)$  est un demi-plan ouvert à préciser;
- (iv)  $A(F)$  est un demi-plan fermé à préciser.

3. Donner un exemple de fonction correspondant à chacune des quatre situations précédentes.

### Domaine de convergence simple

Pour tout  $F \in \mathcal{C}$ , on définit le *domaine de convergence* de  $\mathcal{L}F$  par

$$C(F) := \{s \in \mathbb{C} \mid \int_0^{+\infty} F(t)e^{-st} dt \text{ converge} \},$$

et l'*abscisse de convergence* de  $\mathcal{L}F$  par

$$\gamma(F) := \inf\{\sigma \in \mathbb{R} \mid \sigma \in C(F)\}.$$

Tournez la page S.V.P.

4. Soit  $F \in \mathcal{C}$ . On suppose que  $C(F)$  est non vide. Soit  $s_0 \in C(F)$ . On introduit

$$\forall t \geq 0, \quad G(t) = - \int_t^{+\infty} F(\tau) e^{-s_0 \tau} d\tau.$$

a. Montrer que  $G(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , et calculer  $G'(t)$ .

b. Soit  $X > 0$  et  $s \in \mathbb{C}$  fixés. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^X F(t) e^{-st} dt = G(X) e^{(s_0-s)X} - G(0) - (s_0 - s) \int_0^X G(t) e^{(s_0-s)t} dt.$$

c. En déduire que

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)\} \subset C(F),$$

et que pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)$ , on a

$$(1) \quad f(s) = f(s_0) + (s - s_0) \int_0^{+\infty} G(t) e^{-(s-s_0)t} dt,$$

où  $f$  désigne  $\mathcal{L}F$ .

5. Montrer que, pour tout  $F \in \mathcal{C}$ , on est dans l'un des cas suivants:

(i)  $C(F) = \mathbb{C}$ ;

(ii)  $C(F) = \emptyset$ ;

(iii)  $P_F \subset C(F) \subset \overline{P_F}$  où  $P_F$  est le demi-plan complexe ouvert

$$P_F := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \gamma(F)\}.$$

6. Montrer que l'on a toujours  $\gamma(F) \leq \alpha(F)$ .

7. On considère la fonction

$$F_1(t) = \frac{\sin t}{t} \quad \text{si } t > 0, \quad F_1(0) = 1.$$

a. Soit  $X \geq 1$ . Montrer que

$$\int_1^X \frac{e^{i\omega t}}{t} dt = \frac{e^{i\omega X}}{i\omega X} - \frac{e^{i\omega}}{i\omega} + \frac{1}{i\omega} \int_1^X \frac{e^{i\omega t}}{t^2} dt.$$

b. En déduire que  $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) = 0\} \subset C(F_1)$ .

c. Soit  $X \geq 1$ . Montrer que

$$\int_1^X \frac{|\sin \tau|}{\tau} d\tau \geq \int_1^X \frac{1 - \cos 2\tau}{2\tau} d\tau.$$

d. Déterminer  $A(F_1)$ , et comparer  $A(F_1)$  avec  $C(F_1)$ .

8. On considère la fonction continue  $F_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  affine par morceaux telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ ,

$$F_2(\ln n) = 0, \quad \text{et} \quad F_2\left(\frac{\ln n + \ln(n+1)}{2}\right) = \frac{2(-1)^n}{\ln(n+1)(\ln(n+1) - \ln n)}.$$

Donner une allure du graphe de  $F_2$ . Montrer que  $0 \in C(F_2)$ , et que  $1 \notin A(F_2)$ . Qu'en déduit-on sur  $\gamma(F_2)$  et  $\alpha(F_2)$  ?

**PARTIE II. PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES**

**Régularité et dérivée de la transformée de Laplace**

1. Soit  $F \in \mathcal{C}$ . On suppose que  $C(F)$  est non vide. Soit  $s_0 \in C(F)$ .

a. Soit  $\eta > 0$ . On note  $P_{F,s_0,\eta}$  le demi-plan complexe suivant:

$$P_{F,s_0,\eta} := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0) + \eta\}.$$

À l'aide de (1), montrer que  $f$  est holomorphe sur  $P_{F,s_0,\eta}$ .

b. En déduire que  $f$  est holomorphe sur le demi-plan  $P_F$  (défini en I.5.) et montrer que

$$\forall s \in P_F, \quad f'(s) = - \int_0^{+\infty} tF(t)e^{-st} dt.$$

2. Soit  $F \in \mathcal{C}$ . On suppose que  $C(F) \setminus P_F$  est non vide. Soit  $s_0 \in C(F) \setminus P_F$ . Pour tout  $\beta \in [0, \pi/2[$ , on note

$$S_\beta(s_0) := \{s \in \mathbb{C} \mid s = s_0 \text{ ou } |\arg(s - s_0)| \leq \beta\},$$

où, pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $\arg(z)$  désigne l'unique argument de  $z$  situé dans  $[-\pi, \pi[$ .

a. Dessiner  $S_\beta(s_0)$  et montrer l'inégalité

$$\forall s \in S_\beta(s_0), \quad \operatorname{Re}(s - s_0) \geq |s - s_0| \cos(\beta).$$

b. Soit  $(s_n)$  une suite de points de  $S_\beta(s_0)$  qui converge vers  $s_0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Déduire de (1) que  $f(s_n) \rightarrow f(s_0)$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Comportement à l'infini**

3. Soit  $F \in \mathcal{C}$ . On suppose que  $C(F)$  est non vide. Soit  $s_0 \in C(F)$ .

a. À l'aide de (1), montrer que

$$(2) \quad f(s) = (s - s_0) \int_0^{+\infty} (G(t) - G(0))e^{-(s-s_0)t} dt.$$

b. Soit  $\beta \in [0, \pi/2[$ , et soit  $(s_n)$  une suite de points de  $S_\beta(s_0)$  telle que  $\operatorname{Re}(s_n) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Montrer que

$$f(s_n) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

(Pour  $\eta > 0$  à choisir, on utilisera un découpage de l'intégrale apparaissant dans (2) en une intégrale sur le segment  $[0, \eta]$  et une intégrale sur le segment  $[\eta, +\infty[$ .)

**Transformée de Laplace de la dérivée**

4. Soit  $F : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$  (c'est-à-dire  $F' \in \mathcal{C}$ ). On suppose qu'il existe un réel  $\sigma_0 \geq 0$  tel que  $\sigma_0 \in C(F')$ .

a. On introduit

$$\forall t \geq 0, \quad H(t) := \int_0^t F'(\tau)e^{-\sigma_0\tau} d\tau.$$

Tournez la page S.V.P.

Montrer (à l'aide d'une intégration par parties faisant apparaître la fonction  $H$ ) que

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(s) > \sigma_0, \quad e^{-sX} \int_0^X F'(t) dt \rightarrow 0 \text{ si } X \rightarrow +\infty.$$

b. En déduire que

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(s) > \sigma_0, \quad e^{-sX} F(X) \rightarrow 0 \text{ si } X \rightarrow +\infty.$$

c. Montrer finalement que, si  $\sigma_0 \geq 0$  est tel que  $\sigma_0 \in C(F')$ , alors  $\gamma(F) \leq \sigma_0$  et

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(s) > \sigma_0, \quad \mathcal{L}(F')(s) = s\mathcal{L}(F)(s) - F(0).$$

### Propriété d'unicité

5. a. Soit  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue et soit  $(P_n)_n$  une suite de polynômes de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  qui converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers une fonction notée  $\psi$ . Montrer que

$$\int_0^1 \varphi(x) P_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 \varphi(x) \psi(x) dx \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

b. Soit  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \varphi(x) x^n dx = 0.$$

Démontrer que  $\varphi$  est nulle sur  $[0, 1]$ .

6. a. Soit  $F \in \mathcal{C}$ . On suppose que  $C(F)$  est non vide et qu'il existe  $s_0 \in C(F)$  tel que  $f(s) = 0$  pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)$ . A l'aide d'un changement de variables et de (2), montrer que  $G(t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ , puis que  $F(t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ .

b. Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux fonctions de  $\mathcal{C}$  et soient  $f_1$  et  $f_2$  leurs transformées de Laplace respectives. On suppose que  $C(F_1)$  et  $C(F_2)$  sont non vides, et qu'il existe un réel  $s_0 \in C(F_1) \cap C(F_2)$  tel que  $f_1(s) = f_2(s)$  pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)$ . Montrer que  $F_1(t) = F_2(t)$  pour tout  $t \geq 0$ .

c. Le résultat précédent est-il encore vrai si on suppose seulement qu'il existe  $s_0 \in C(F_1) \cap C(F_2)$  tel que  $f_1(s) = f_2(s)$  pour tout  $s$  de la forme  $s = s_0 + n\lambda$  où  $n$  décrit  $\{1, 2, 3, \dots\}$  et où  $\lambda$  est un réel strictement positif fixé ?

## PARTIE III. EXEMPLES ET PREMIÈRE APPLICATION

### Calculs élémentaires

1. Calculer la transformée de Laplace de la fonction définie par  $F_3(t) = 1$  pour tout  $t \in [0, +\infty[$ .

2. a. Soit  $F \in \mathcal{C}$  telle que  $\mathcal{C}(F)$  est non vide et soit  $f = \mathcal{L}F$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ , on considère la fonction  $G_\alpha : t \in [0, +\infty[ \mapsto e^{\alpha t} F(t)$  et on note  $g_\alpha = \mathcal{L}G_\alpha$ . Déterminer  $g_\alpha$  en fonction de  $f$  pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $s - \alpha \in \mathcal{C}(F)$ .

b. En déduire les images par  $\mathcal{L}$  des fonctions suivantes (pour  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $\omega \in \mathbb{R}$ ):

(i)  $t \in [0, +\infty[ \mapsto e^{\alpha t}$ ; (ii)  $t \in [0, +\infty[ \mapsto \sin(\omega t)$ ; (iii)  $t \in [0, +\infty[ \mapsto \cos(\omega t)$ .

### Étude relative à la fonction $F_1$

3. a. Soit  $F_1$  la fonction définie à la question I.7. On note  $f_1$  sa transformée de Laplace. Calculer  $f_1'$  puis  $f_1$  sur  $\{\sigma \in \mathbb{R} \mid \sigma > 0\}$ .

b. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

c. On note  $\Gamma$  le chemin fermé (parcouru dans le sens trigonométrique direct), composé des quatre morceaux suivants :

- $\Gamma_1$  est le demi-cercle de centre  $O$  et de rayon  $R > 0$  dans le demi-plan  $\text{Im}(z) > 0$ ;
- $\Gamma_2$  est le segment  $[-R, -r]$  ;
- $\Gamma_3$  est le demi-cercle de centre  $O$  et de rayon  $r > 0$  dans le demi-plan  $\text{Im}(z) > 0$ ;
- $\Gamma_4$  est le segment  $[r, R]$ .

En considérant l'intégrale curviligne de la fonction complexe  $g(z) = e^{iz}/z$  le long du chemin  $\Gamma$ , retrouver le résultat précédent

### PARTIE IV. CONVOLUTION ET APPLICATIONS

On définit  $\mathcal{C}_*$  l'ensemble des fonctions continues  $F : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  telle que, si  $F$  n'est pas prolongeable par continuité en  $0$ , alors l'intégrale impropre

$$\int_0^1 F(t) dt \text{ converge absolument,}$$

c'est-à-dire lorsque

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^1 |F(t)| dt \text{ existe.}$$

Pour cette partie, on admettra que les résultats démontrés pour les fonctions de  $\mathcal{C}$ , dans les parties précédentes, sont encore vrais pour les fonctions de  $\mathcal{C}_*$ .

#### Convolution

1. On considère  $F$  et  $G$  deux éléments de  $\mathcal{C}_*$  que l'on prolonge par  $0$  sur  $] -\infty, 0[$ . On rappelle que la convolée de  $F$  et  $G$  est la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, (F * G)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)G(t - \tau) d\tau,$$

Tournez la page S.V.P.

lorsque cette intégrale converge. Montrer que  $F * G$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$  et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, (F * G)(t) := \int_0^t F(\tau)G(t-\tau) d\tau.$$

2. Soient  $F, G \in \mathcal{C}_*$  et soit  $s_0 \in A(F) \cap A(G)$ . Montrer que  $s_0 \in A(F * G)$  et que  $\forall s \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(s) \geq \operatorname{Re}(s_0)$ ,  $\mathcal{L}(F * G)(s) = \mathcal{L}(F)(s)\mathcal{L}(G)(s)$ .

### Équation intégrale d'Abel

L'objet de cette partie est la résolution de l'équation intégrale d'Abel :

$$(3) \quad \int_0^t \frac{G(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = F(t) \quad \text{pour } t \geq 0,$$

où  $F$  est une fonction donnée sur  $\mathbb{R}_+$  et  $G$  une fonction inconnue sur  $\mathbb{R}_+$ .

3. a. A l'aide d'un changement de variables, montrer que

$$\forall t > 0, \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} d\tau = \pi.$$

b. On note  $K$  la fonction définie par  $K(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$  pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ . Vérifier que  $K \in \mathcal{C}_*$  et déterminer  $\alpha(K)$ .

c. On note  $k$  la transformée de Laplace de  $K$ . En calculant de deux manières la transformée de Laplace de  $K * K$ , en déduire

$$k(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{R(s)} \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(s) > \alpha(K),$$

où  $R$  désigne la détermination principale de la racine carrée complexe (i.e.  $R$  est définie de  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0[ \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $R(z)^2 = z$  et telle que  $\forall x \in [0, +\infty[$ ,  $R(x) = \sqrt{x}$ .)

4. a. On considère le cas particulier  $F(t) = \sin(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . En transformant l'équation (3) par  $\mathcal{L}$ , démontrer que (3) admet une unique solution  $G \in \mathcal{C}$  donnée par

$$G(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{\cos(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

b. Soit  $F \in \mathcal{C}$  telle que  $F(0) = 0$ . On suppose de plus  $F$  dérivable sur  $]0, +\infty[$ ,  $F' \in \mathcal{C}_*$  et  $A(F')$  non vide. Montrer que (3) possède une unique solution  $G \in \mathcal{C}$  que l'on exprimera sous la forme d'une intégrale en fonction de  $F'$ . (On utilisera la question II.4.c.).

PARTIE V. FORMULE D'INVERSION

Dans cette partie, on s'intéresse au calcul de la transformée de Laplace inverse. On rappelle que l'on note  $L^1(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mesurables telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t)| dt < +\infty.$$

Pour toute fonction  $G \in L^1(\mathbb{R})$ , on définit sa *transformée de Fourier*, notée  $\hat{G}$ , par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \hat{G}(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) e^{-iyt} dt.$$

Par ailleurs, lorsque  $G \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\hat{G} \in L^1(\mathbb{R})$ , on rappelle que la *formule de Fourier inverse* est valable :

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}(y) e^{iyt} dy \quad \text{pour presque tout } t \in \mathbb{R}.$$

**Formule d'inversion complexe**

Soit  $F \in \mathcal{C}$  telle que  $\alpha(F) < +\infty$ . On prolonge  $F$  par 0 sur  $]-\infty, 0[$  et on note encore  $F$  la fonction ainsi prolongée. Pour tout réel  $\sigma > \alpha(F)$ , on définit la fonction  $G_\sigma$  par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_\sigma(t) := F(t) e^{-\sigma t}.$$

1. Montrer que, pour tout  $\sigma > \alpha(F)$ ,  $G_\sigma \in L^1(\mathbb{R})$  et que

$$\forall \sigma > \alpha(F), \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \hat{G}_\sigma(y) = f(\sigma + iy),$$

où  $f$  désigne la transformée de Laplace de  $F$ .

2. On se place sous les hypothèses précédentes et on suppose de plus qu'il existe deux constantes  $k > 1$  et  $C \geq 0$  telles que

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(s) > \alpha(F), \quad |f(s)| \leq \frac{C}{|s|^k}.$$

a. Montrer que  $\hat{G}_\sigma \in L^1(\mathbb{R})$  pour tout  $\sigma > \alpha(F)$ .

b. En déduire que, pour tout  $\sigma > \alpha(F)$ ,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} e^{\sigma t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma + iy) e^{iyt} dy \quad \text{pour presque tout } t \in \mathbb{R}.$$

c. Montrer que, pour tout  $\sigma > \alpha(F)$ , la fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma + iy) e^{iyt} dy$$

est continue sur  $\mathbb{R}$ . Que peut-on en déduire de plus concernant la relation obtenue dans la question précédente ?

**Tournez la page S.V.P.**

d. On note  $\Delta_\sigma$  le chemin représenté par la droite verticale  $\Delta_\sigma := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) = \sigma\}$  parcourue de bas en haut. Montrer que, pour tout  $\sigma > \alpha(F)$ ,

$$\forall t > 0, \quad F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_\sigma} f(z) e^{zt} dz.$$

### Formule de Heaviside

Dans cette partie, on considère  $F \in \mathcal{C}$  telle que  $\alpha(F) < +\infty$  et l'on note  $f = \mathcal{L}F$ . On fixe  $\sigma > \alpha(F)$  et on suppose que  $F$  vérifie les propriétés suivantes:

(i) il existe deux constantes  $k > 1$  et  $C \geq 0$  telles que

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(s) > \alpha(F), \quad |f(s)| \leq \frac{C}{|s|^k};$$

(ii) il existe une suite  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de  $\mathbb{C}$  telle que  $f$  soit prolongeable de manière holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ , où  $s_1, s_2, s_3, \dots$  sont des singularités isolées de  $f$ ;

(iii) il existe  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels telle que

$$\rho_n \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^*, \quad s_k \notin C_{\sigma, n},$$

et

$$\mu_{\sigma, n} := \sup_{s \in C_{\sigma, n}} \{|f(s)|\} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

où  $C_{\sigma, n}$  désigne le demi-cercle (parcouru dans le sens trigonométrique direct)

$$C_{\sigma, n} := \{s \in \mathbb{C} \mid |s - \sigma| = \rho_n, \operatorname{Re}(s) \leq \sigma\}.$$

L'objectif de cette partie est démontrer la *formule de Heaviside*:

$$\forall t > 0, \quad F(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{Res}(g_t, s_k),$$

où, pour tout  $t \geq 0$ , la fonction  $g_t$  est définie par

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{s_1, s_2, s_3, \dots\}, \quad g_t(s) = f(s) e^{st},$$

et où  $\operatorname{Res}(g_t, s_k)$  désigne le résidu de la fonction  $g_t$  au point  $s_k$ .

3. Dans quelle partie de  $\mathbb{C}$  sont situées les singularités  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de  $f$  ?

4. a. Montrer que, pour tout  $t > 0$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\sigma, n}} f(z) e^{zt} dz \right| \leq \frac{\mu_{\sigma, n} \rho_n}{\pi} e^{\sigma t} \int_{\pi/2}^{\pi} e^{\rho_n \cos(\theta)t} d\theta.$$

b. Montrer que

$$\forall \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \quad \cos(\theta) \leq 1 - \frac{2}{\pi}\theta.$$

c. En déduire que, pour tout  $t > 0$ ,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\sigma, n}} f(z) e^{zt} dz \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

5. Soit  $\Delta_{\sigma, n}$  le segment vertical (parcouru de bas en haut)

$$\Delta_{\sigma, n} := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) = \sigma, \operatorname{Im}(s) \in [-\rho_n, \rho_n]\}.$$

On note  $\Gamma_{\sigma,n}$  le chemin (parcouru dans le sens trigonométrique direct) constitué de l'union de  $\Delta_{\sigma,n}$  et de  $C_{\sigma,n}$ .

a. Montrer à l'aide du théorème des résidus que, pour tout  $t > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\sigma,n}} f(z) e^{zt} dz = \sum_{k=1}^{+\infty} \text{Res}(g_t, s_k),$$

lorsque cette limite existe.

b. En déduire que, pour tout  $t > 0$ ,

$$F(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \text{Res}(g_t, s_k).$$