C32121 J.1872

SESSION 2002

3è ANNÉE

MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 5 HEURES

L'usage de toute calculatrice est interdit

Aucun document personnel n'est autorisé

Tournez la page S.V.P.

Le but de ce problème est d'étudier les solutions de l'équation $\Delta v = v$ définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. Nous travaillerons en coordonnées polaires : l'équation précédente s'écrit alors :

$$(\mathcal{E}) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = u \qquad \text{dans }]0,+\infty[\times \mathbb{R}\,,$$

où $u = u(r,\theta)$ est supposée de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et est 2π-périodique en la variable θ pour tout $r > 0$:

$$\forall (r,\theta) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi)\,.$$

Notations et rappels

- On note $L^2([0,2\pi])$ l'espace classique des fonctions définies sur $[0,2\pi]$, à valeurs réelles et de carré intégrable. On pose

$$\forall f \in L^2([0,2\pi]), \qquad \|f\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} f^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

- On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne est une gaussienne. Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx}e^{-s^2/2}ds = e^{-x^2/2}\,.$$

  Lorsque $x = 0$, cela donne en particulier

$$\int_0^{+\infty} e^{-s^2/2}ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

- Pour deux suites numériques (u_n) et (v_n), on écrira que $u_n \sim v_n$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = 1$.

  Rappelons enfin la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n} \qquad \text{lorsque } n \to +\infty\,.$$

Première partie

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit les applications $I_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall r \in \mathbb{R},\ I_n(r) = \int_0^{2\pi} \cos(ns) e^{r\cos(s)} ds \ .$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, I_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$I'_n(r) = \int_0^{2\pi} \cos(ns)\cos(s) e^{r\cos(s)} ds \ \text{ et } \ I''_n(r) = I_n(r) - \int_0^{2\pi} \cos(ns)\sin^2(s) e^{r\cos(s)} ds \ .$$

2. En intégrant deux fois par partie $\int_0^{2\pi} \cos(ns)\sin^2(s)e^{r\cos(s)}ds$, déduire de la question précédente que I_n est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(\mathbf{E_n}) \qquad y''(r) + \frac{y'(r)}{r} - (\frac{n^2}{r^2} + 1) y(r) = 0 \ .$$

3. En utilisant la définition de $I_n(r)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\forall r \in \mathbb{R}, \qquad I_n(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k}{k!} \left(\int_0^{2\pi} \cos(ns)(\cos(s))^k ds \right) \ .$$

4. Montrer alors, en utilisant la formule de Moivre, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in \mathbb{R}, \quad I_n(r) = 2\pi \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2} r)^{n+2p}}{p!(n+p)!} \ .$$

   En déduire que $I_n(r) > 0$ pour tout $r > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

5. Soit $y(\cdot) :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $(\mathbf{E_n})$ (où $n \in \mathbb{Z}$). Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que

$$\forall r > 0,\ y(r) = I_n(r) \left(\alpha + \beta \int_1^r \frac{1}{s I_n^2(s)} ds \right) \ .$$

6. En déduire que les seules solutions de l'équation $(\mathbf{E_n})$ sur $]0, +\infty[$, prolongeables par continuité en 0^+ sont de la forme αI_n avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tournez la page S.V.P.

Deuxième partie

Le principal objet de cette partie est d'obtenir des estimations de $I_n(r)$ lorsque $r \to +\infty$ ou $n \to +\infty$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\forall r > 0,\ I_n(r) = 2\int_0^{\pi} \cos(ns)e^{r\cos(s)}ds\ .$$

En déduire que

$$\forall r > 0, \qquad \sqrt{r}\,e^{-r}\,I_n(r) = 2\int_0^{\pi\sqrt{r}} \cos(\frac{nt}{\sqrt{r}})e^{r[\cos(\frac{t}{\sqrt{r}})-1]}dt\ .$$

2. Montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall s \in [0,\pi],\ \cos(s) - 1 \le -\alpha s^2\ .$$

En déduire que

$$I_n(r) \sim \frac{\sqrt{2\pi}\,e^r}{\sqrt{r}} \qquad \text{lorsque } r \to +\infty\ .$$

3. En utilisant la question 4 de la première partie, démontrer que, pour tout $r > 0$,

$$I_n(r) \sim \frac{2\pi(\frac{1}{2}r)^n}{n!} \qquad \text{lorsque } n \to +\infty\ .$$

On définit, pour tout $\epsilon > 0$, la fonction $\psi_\epsilon : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ par

$$\forall s \in \boldsymbol{R}, \qquad \psi_\epsilon(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{(s-2k\pi)^2}{2\epsilon}}$$

4. Montrer que ψ_ϵ est bien définie et de classe C^∞ sur $\boldsymbol{R}$, et est 2π périodique.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n-ième coefficient de Fourier $\gamma_n(\epsilon)$ de ψ_ϵ est égal à $e^{-\epsilon n^2/2}/(2\pi)$, c'est-à-dire :

$$\gamma_n(\epsilon) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_\epsilon(s)e^{-ins}ds = \frac{e^{-\epsilon n^2/2}}{2\pi}\ .$$

Troisième partie

Rappelons que l'équation $(\mathcal{E})$ est définie dans l'introduction. Soit $u : [0,+\infty[\times\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. Nous dirons dans toute la suite que u est une solution de l'équation $(\mathcal{E})$ si :

- $u = u(r,\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[\times\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ et 2π périodique en θ,
- u vérifie l'équation $(\mathcal{E})$ dans $]0,+\infty[\times\boldsymbol{R}$,
- $u(r,\cdot)$ est continue dans $[0,+\infty[\times\boldsymbol{R}$ et $u(0,\theta)$ ne dépend pas de θ. On notera toujours $u(0,\theta) = u(0)$

(On remarquera que la condition (iii) est naturelle puisque u est l'expression en polaire d'une fonction régulière sur $\boldsymbol{R}^2$).

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et pour tout $r > 0$, on note $c_n(r)$ le n-ième coefficient de Fourier de $u(r,\cdot)$:

$$\forall r > 0,\ c_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,s)e^{-ins}ds\ .$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $c_n(\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, et vérifie sur $]0,+\infty[$ l'équation $(\mathbf{E_n})$ de la question 2 de la première partie. Montrer de plus que $c_n(\cdot)$ est prolongeable par continuité en 0^+.

   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un nombre complexe α_n tel que

$$\forall r > 0,\ c_n(r) = \alpha_n I_n(r)\ .$$

2. Montrer que

$$\forall r > 0,\ \|u(r,\cdot)\|_2^2 = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 I_n^2(r)\ .$$

   Posons, pour tout $\epsilon > 0$,

$$u_\epsilon(r,\theta) = \int_0^{2\pi} u(r,\theta - s)\psi_\epsilon(s)ds\ ,$$

   où ψ_ϵ est défini dans la deuxième partie.

3. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, la fonction u_ϵ est une solution de l'équation $(\mathcal{E})$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, montrer que le n-ième coefficient de Fourier de $u_\epsilon(r,\cdot)$ est égal à $\alpha_n I_n(r)e^{-n^2\epsilon/2}$: plus précisément, montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_\epsilon(r,s)e^{-ins}ds = \alpha_n I_n(r)e^{-n^2\epsilon/2}\ .$$

5. Démontrer que, pour tout $\epsilon > 0$, la somme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n e^{-\epsilon n^2/2}|^2$ converge.

Quatrième partie

Dans cette partie, $u :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est toujours une solution de l'équation $(\mathcal{E})$ (cf. la définition dans la troisième partie).

On note encore α_n (pour $n \in \mathbb{Z}$) le coefficient obtenu à la question 1 de la troisième partie. On rappelle que le n-ième coefficient de Fourier de $u(r,\cdot)$ est égal à $\alpha_n I_n(r)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2$ converge, si et seulement s'il existe deux constantes strictement positives M et r_0 telles que

$$\forall r \geq r_0, \qquad \frac{\|u(r,\cdot)\|_2}{I_0(r)} \leq M .$$

Dans le reste de cette partie, sauf dans la question 5, on suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2$ converge.

On pose alors

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e^{int}$$

On rappelle que la convergence de la série a lieu dans $L^2([0,2\pi])$, et que la fonction f est alors dans $L^2([0,2\pi])$.

2. En utilisant la décomposition de $u(r,\cdot)$ en série de Fourier, démontrer que, pour tout $r > 0$ et pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, on a :

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} e^{r\cos(\theta-s)} f(s)ds .$$

3. Démontrer de plus que

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{u(r,\cdot)}{I_0(r)} = f(\cdot) \text{ dans } L^2([0,2\pi]) .$$

4. Prouver finalement que, pour tout élément f de $L^2([0,2\pi])$, il existe une unique solution $u = u(r,\theta)$ de l'équation $(\mathcal{E})$ telle que

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{u(r,\cdot)}{I_0(r)} = f(\cdot) \qquad \text{dans } L^2([0,2\pi]) .$$

5. Soit $u = u(r,\theta)$ définie par :

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^2,\ u(r,\theta) = e^{r\cos(\theta)} .$$

Montrer que u est une solution de $(\mathcal{E})$, mais que

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\|u(r,\cdot)\|_2}{I_0(r)} = +\infty .$$

Cinquième partie

Dans cette partie, on suppose que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une solution *positive* de l'équation $(\mathcal{E})$:

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^2, \qquad u(r,\theta) \geq 0 \ .$$

Rappelons que la notion de solution a été définie dans la troisième partie. L'objectif de cette partie est de montrer que u vérifie l'inégalité de croissance

$$(*) \qquad u(r,\theta) \leq u(0)e^r \qquad \forall (r,\theta) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R} \ .$$

On note toujours α_n (pour $n \in \mathbb{Z}$) le coefficient obtenu à la question 1 de la troisième partie.

On ne suppose plus ici que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2$ converge.

Comme dans la troisième partie, on pose, pour tout $\epsilon > 0$,

$$u_\epsilon(r,\theta) = \int_0^{2\pi} u(r,\theta - s)\psi_\epsilon(s)ds \ .$$

1. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une unique fonction $f_\epsilon \in L^2([0,2\pi])$ telle que

$$u_\epsilon(r,\theta) = \int_0^{2\pi} e^{r\cos(\theta-s)} f_\epsilon(s)ds \ .$$

   Vérifier de plus que $f_\epsilon(s) \geq 0$ pour presque tout $s \in [0,2\pi]$.

2. Montrer que u_ϵ vérifie l'inégalité de croissance (*).

3. Montrer que, pour tout $r > 0$, $u_\epsilon(r,\cdot)$ converge vers $u(r,\cdot)$ dans $L^2([0,2\pi])$ lorsque ϵ tend vers 0^+.

4. En déduire que u vérifie l'inégalité de croissance (*).