# B. ANALYSE NUMÉRIQUE

*Pour les épreuves d'admissibilité, l'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail.*

L'objectif de cette épreuve est la mise en place d'une méthode « Éléments finis – Moindres carrés » pour résoudre numériquement une équation du type :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u + \dfrac{\partial}{\partial x} u - \displaystyle\int_{s=0}^{s=t} \int_{\lambda=-1}^{\lambda=1} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(s, x - \lambda(t-s))\, \sigma(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}s = f, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \tag{0.1}$$

où $\dfrac{\partial}{\partial t}$ désigne la dérivée première par rapport à la variable de temps $t \in [0, T]$, $\dfrac{\partial}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ les dérivées première et seconde par rapport à la variable d'espace $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\sigma \equiv \sigma(\lambda)$, supposée positive et deux fois continûment dérivable, et les fonctions $f \equiv f(t, x)$ et $u_0 \equiv u_0(x)$ sont des données du problème. La solution de (0.1) s'écrit $u \equiv u(t, x)$.

La régularité des fonctions $f$, $u_0$ et $u$ sera précisée au cours de l'énoncé.

Dans la suite, pour $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $k$ entier positif ou nul, on note $\mathscr{C}^k([a, b])$ l'espace vectoriel normé des fonctions $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, continues et $k$ fois continûment dérivables, $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^m)$ celui des fonctions $g : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$, continues et $k$ fois continûment dérivables, et $\mathscr{C}^k([a, b] \times \mathbb{R}^m)$ celui des fonctions $g : [a, b] \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$, continues et $k$ fois continûment dérivables. Ces espaces sont munis de leur norme usuelle.

On désigne par $L^2(\mathbb{R})$ l'espace de Hilbert constitué des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et de carré intégrable. Enfin $\mathscr{C}^k([a, b]\,;\, L^2(\mathbb{R}))$ désigne l'espace vectoriel normé des fonctions :

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\mapsto L^2(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto g(t, x), \end{aligned}$$

continues et $k$ fois continûment dérivables.

## PARTIE I

### Approximation de l'intégrale

Sur l'intervalle $[-1, 1]$, on introduit $\ell$ points $a_1, \dots, a_\ell$, tels que $-1 = a_1 < a_2 < \dots < a_{\ell-1} < a_\ell = 1$.

Soit $h \in \mathscr{C}^0([-1, 1])$, on note $I_i(h)$ l'approximation de :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} h(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda, \tag{1.1}$$

par la méthode des trapèzes.

I.1. Donner l'expression de $I_i(h)$ en fonction de $h$, de $a_i$ et de $a_{i+1}$.

I.2. Démontrer que si $h$ est affine sur $[a_i, a_{i+1}]$, on a :

$$I_i(h) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} h(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda. \tag{1.2}$$

**Tournez la page S.V.P.**

I.3. On suppose que $h \in \mathscr{C}^2([a_i, a_{i+1}])$ et on écrit le développement de Taylor avec reste intégrale de $h$ :

$$h(\lambda) = h(a_i) + (\lambda - a_i)\, h'(a_i) + \mathrm{R}(\lambda)\,. \tag{1.3}$$

I.3.1. Exprimer $\mathrm{R}(\lambda)$.

I.3.2. Démontrer que :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} h(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda - \mathrm{I}_i(h) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \mathrm{R}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda - \mathrm{I}_i(\mathrm{R}). \tag{1.4}$$

I.3.3. Déduire de (1.3) et (1.4) que :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} h(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda - \mathrm{I}_i(h) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} h''(\mu)\,\mathrm{G}_i(\mu)\,\mathrm{d}\mu\,, \tag{1.5}$$

où

$$\mathrm{G}_i(\mu) = \frac{1}{2}\,(a_{i+1} - \mu)\,(a_i - \mu)\,. \tag{1.6}$$

I.3.4. Déduire de (1.5) que :

$$\left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} h(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda - \mathrm{I}_i(h) \right| \leqslant \sup_{\mu \in [a_i, a_{i+1}]} |h''(\mu)|\, \frac{(a_{i+1} - a_i)^3}{12}\,. \tag{1.7}$$

I.4. En utilisant ce qui précède et en notant :

$$\eta = \operatorname*{Max}_{i = 1, \ldots, \ell - 1} |a_{i+1} - a_i|\,, \tag{1.8}$$

montrer que, si $h \in \mathscr{C}^2([-1, 1])$, on a :

$$\left| \int_{-1}^{1} h(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda - \sum_{i=1}^{\ell - 1} \mathrm{I}_i(h) \right| \leqslant \sup_{\mu \in [-1, 1]} |h''(\mu)|\, \frac{\eta^2}{6}. \tag{1.9}$$

I.5. On applique maintenant ce qui précède à l'approximation de l'intégrale intervenant dans l'équation (0.1). On suppose, pour cela, que $u \in \mathscr{C}^2([0, \mathrm{T}] \times \mathbb{R})$ et on remplace :

$$\int_{\lambda = -1}^{\lambda = 1} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(s, x - \lambda(t - s))\, \sigma(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,, \tag{1.10}$$

par :

$$\sum_{i=1}^{\ell - 1} \mathrm{I}_i\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(s, x - \cdot\,(t - s))\, \sigma(\cdot) \right). \tag{1.11}$$

On arrive alors à une équation du type :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial t} u + \dfrac{\partial}{\partial x} u - \displaystyle\int_0^t \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(s, x - a_i(t - s))\,\mathrm{d}s = f, \\ u|_{t=0} = u_0\,. \end{array} \right. \tag{1.12}$$

Donner l'expression des coefficients $\alpha_i$, pour $i = 1, \ldots, \ell$.

## PARTIE II

### Discrétisation en temps

Dans la suite, pour un espace vectoriel topologique K , on note :

$$K^{\ell+1} = \left\{ W = \begin{pmatrix} w_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_\ell \end{pmatrix}, \; w_i \in K \quad \text{pour} \quad i = 0, \ldots, \ell \right\}, \tag{2.1}$$

que l'on munit de la topologie produit.

En particulier, $(L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}$ désigne l'espace de Hilbert des fonctions :

$$\begin{aligned} W : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}^{\ell+1} \\ x &\mapsto W(x) = \begin{pmatrix} w_0(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_\ell(x) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

telles que :

$$w_i \in L^2(\mathbb{R}), \quad \text{pour} \quad i = 0, \ldots, \ell. \tag{2.3}$$

L'espace $(L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}$ est muni du produit scalaire usuel :

$$(W, \tilde{W}) = \sum_{i=0}^{\ell} \int_{\mathbb{R}} w_i \, \tilde{w}_i \, \mathrm{d}x, \tag{2.4}$$

et de sa norme associée, notée $\| \; \|_2$ .

Suite au travail effectué dans la Partie I, on travaille maintenant sur l'équation :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} u - \int_0^t \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \, \frac{\partial^2}{\partial x^2} u\,(s, x - a_i(t-s))\, \mathrm{d}s = f, \\ & u|_{t=0} = u_0, \end{aligned} \right. \tag{2.5}$$

où $a_i, \ldots, a_\ell$ sont $\ell$ points de $[-1, 1]$ , vérifiant $-1 = a_1 < a_2 < \ldots < a_{\ell-1} < a_\ell = 1$ et où $\alpha_i, \ldots, \alpha_\ell$ sont des coefficients strictement positifs.

Pour $i = 1, \ldots, \ell$ , on définit formellement les fonctions $w_i$ , par :

$$w_i(t, x) = \sqrt{\alpha_i} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} u\,(s, x - a_i(t-s))\, \mathrm{d}s. \tag{2.6}$$

II.1. Démontrer que $u \in \mathscr{C}^\infty([0,T] \times \mathbb{R})$ est solution de (2.5) si et seulement si :

$$W = \begin{pmatrix} u \\ w_1 \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot \\ w_\ell \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^\infty([0,T] \times \mathbb{R})^{\ell+1}, \tag{2.7}$$

est solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} W + A \dfrac{\partial}{\partial x} W = F, \\ W|_{t=0} = W_0, \end{cases} \tag{2.8}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\alpha_1} & -\sqrt{\alpha_2} & \cdots & -\sqrt{\alpha_\ell} \\ -\sqrt{\alpha_1} & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\sqrt{\alpha_\ell} & 0 & \cdots & 0 & a_\ell \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

et

$$F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad W_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

II.2. Sur $[0,T]$, on définit $\tau + 1$ points $t_0, \ldots, t_n$, par :

$$t_n = n\,\Delta t, \qquad n = 0, \ldots, \tau, \tag{2.11}$$

avec $\Delta t = \dfrac{T}{\tau}$ et on définit les fonctions $(U^n)_{n=0,\ldots,\tau}$ par :

$$\begin{cases} \bullet\ U^0(x) = W_0(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}, \\ \bullet\ U^n(x) \text{ est une approximation de } W(t_n, x) \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } n = 1, \ldots, \tau. \end{cases} \tag{2.12}$$

Ensuite, on approche :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} W(t_{n+1}, x) \text{ par } \dfrac{U^{n+1}(x) - U^n(x)}{\Delta t} \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } n = 0, \ldots, \tau - 1, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x} W(t_{n+1}, x) \text{ par } \dfrac{\partial}{\partial x} U^{n+1}(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } n = 1, \ldots, \tau - 1. \end{cases} \tag{2.13}$$

Expliquer comment, en faisant les approximations (2.12) – (2.13), on transforme le problème (2.8) en le problème suivant :

$$\begin{cases} LU^{n+1} = G^n \text{ pour } n = 0, \ldots, \tau - 1, \\ U^0 = W_0, \end{cases} \tag{2.14}$$

$W_0$ étant définie par (2.10) et $G^n$ par :

$$G^n = \Delta t\, F + U^n. \tag{2.15}$$

L'opérateur L, quant à lui, s'écrit :

$$L = \left(\mathrm{Id} + \Delta t\, A \frac{\partial}{\partial x}\right), \tag{2.16}$$

ce qui signifie que lorsqu'il est appliqué à une fonction :

$$W = \begin{pmatrix} w_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_\ell \end{pmatrix},$$

pour laquelle cela a un sens, on a :

$$LW = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_\ell \end{pmatrix} + \Delta t\, A \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} w_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x} w_\ell \end{pmatrix}.$$

II.3. Pour construire l'approximation (2.14) de l'équation (2.5), on a supposé $u \in \mathscr{C}^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$ et $W \in (\mathscr{C}^\infty([0, T] \times \mathbb{R}))^{\ell+1}$. À partir de maintenant, on suppose que cette approximation reste valable avec moins de régularité. On ne suppose donc plus $u \in \mathscr{C}^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$ et $W \in (\mathscr{C}^\infty([0, T] \times \mathbb{R}))^{\ell+1}$. On fera ultérieurement des hypothèses plus faibles.

On désigne par D(L) le domaine de L :

$$D(L) = \{U \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}, \quad LU \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}\}, \tag{2.17}$$

où les dérivations intervenant dans $LU$ s'entendent au sens des distributions. D(L) est muni de la norme $\|\ \|_G$ définie par :

$$\|U\|_G = \|U\|_2 + \|LU\|_2. \tag{2.18}$$

On considère alors L comme un opérateur : $D(L) \mapsto (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}$.

II.3.1. Montrer que D(L) est un espace de Hilbert.

II.3.2. On note $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel topologique des fonctions $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et à support compact, muni de sa topologie usuelle. Montrer que $(\mathscr{D}(\mathbb{R}))^{\ell+1}$ s'injecte continûment dans D(L).

II.3.3. Montrer que $(\mathscr{D}(\mathbb{R}))^{\ell+1}$ est dense dans D(L).

II.3.4. Montrer que D(L) s'injecte continûment dans $(L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}$.

II.3.5. Montrer que D(L) est dense dans $(L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}$.

**Tournez la page S.V.P.**

II.4. Montrer que pour tout $U \in D(L)$ et pour tout $V \in D(L)$ on a :

$$\left(A \frac{\partial}{\partial x} U, V\right) = -\left(A \frac{\partial}{\partial x} V, U\right) . \tag{2.19}$$

En déduire que pour tout $U \in D(L)$, on a :

$$\left(A \frac{\partial}{\partial x} U, U\right) = 0 . \tag{2.20}$$

II.5. Calculer $(L\,U, U)$. En déduire :

$$\|L\,U\|_2 \geqslant \|U\|_2 , \tag{2.21}$$

et identifier $\operatorname{Ker}(L)$ .

II.6. Montrer que l'opérateur $\left(I - \Delta t\, A \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est bien défini comme un opérateur $D(L) \mapsto (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}$ et montrer que :

$$(\operatorname{Im}(L))^{\perp} = \operatorname{Ker}\left(I - \Delta t\, A \frac{\partial}{\partial x}\right), \tag{2.22}$$

puis identifier $\operatorname{Ker}\left(I - \Delta t\, A \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

II.7. On considère $(G^r)_{r \in \mathbb{N}}$, une suite de $\operatorname{Im}(L)$ telle que :

$$G^r \to G \text{ dans } (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1} . \tag{2.23}$$

Soit $(U^r)$ une suite de $D(L)$ telle que :

$$G^r = L\,U^r .$$

II.7.1. Montrer que $U^r$ est bornée dans $(L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}$ .

II.7.2. Préciser la topologie pour laquelle on peut déduire de la question II.7.1. l'existence d'une sous-suite $(U^s)$ de $(U^r)$ et d'une fonction $U \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}$ telles que :

$$U^s \to U . \tag{2.24}$$

II.7.3. Montrer que $G = L\,U$ .

II.7.4. Que peut-on en déduire sur $(\operatorname{Im}(L))$ ?

II.8. Montrer que pour tout $G \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}$, il existe une unique fonction $U \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}$ telle que :

$$G = L\,U, \tag{2.25}$$

avec :

$$\|U\|_2 \leqslant \|G\|_2 . \tag{2.26}$$

II.9. Soit $U \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}$ la solution de (2.25) ; quelle équation les dérivées au sens des distributions $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ vérifient-elles ?

En déduire que si :

$$G \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1},\ \frac{\partial G}{\partial x} \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}, \tag{2.27}$$

la fonction U solution de (2.25) vérifie :

$$U \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1},\ \frac{\partial}{\partial x} U \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} U \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}, \tag{2.28}$$

avec :

$$\|U\|_2 + \left\|\frac{\partial}{\partial x} U\right\|_2 + \left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2} U\right\|_2 \leqslant \|G\|_2 + \left\|\frac{\partial}{\partial x} G\right\|_2 + \left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2} G\right\|_2 . \tag{2.29}$$

II.10. Montrer que, si :

$$u_0 \in L^2(\mathbb{R}),\quad f \in \mathscr{C}^0([0,T]; L^2(\mathbb{R})), \tag{2.30}$$

la suite $(U^n)$ définie par (2.14) existe bien dans $(L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}$ et que pour tout $n \geqslant 0$ on a :

$$\|U^n\|_2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} u_0^2(x)\,dx\right)^{1/2} + n\,\Delta t\left(\sup_{t\in[0,T]}\left(\int f^2(t,x)\,dx\right)^{1/2}\right). \tag{2.31}$$

Montrer que si, de plus :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} u_0 \in L^2(\mathbb{R}),\quad \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u_0 \in L^2(\mathbb{R}), \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x} f \in \mathscr{C}^0([0,T]; L^2(\mathbb{R})) \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f \in \mathscr{C}^0([0,T]; L^2(\mathbb{R})), \end{cases} \tag{2.32}$$

alors la suite $(U^n)$ vérifie, pour tout $n \geqslant 0$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} U^n \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} U^n \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}. \tag{2.33}$$

# PARTIE III

## Discrétisation en espace

Les parties I et II ont montré que la solution du problème (0.1) pouvait raisonnablement être approchée par la suite définie par :

$$\begin{cases} LU^{n+1} = G^n \quad \text{pour } n = 1, \ldots, \tau - 1, \\ U^0 = W_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où

$$G^n = \Delta t\, F + U^n, \tag{3.2}$$

et

$$L = \left(\mathrm{Id} + \Delta t\, A \frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{3.3}$$

De plus, on a vu que cette suite existait et que sous l'hypothèse (2.32) $(U^n)$ vérifie (2.33).

L'objectif de cette partie est de construire une approximation de la fonction $U \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}$, telle que $\frac{\partial}{\partial x} U \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2} U \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}$, solution de :

$$L\,U = H, \tag{3.4}$$

pour $H \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}$ telle que $\frac{\partial}{\partial x} H \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2} H \in (L^2(\mathbb{R}))^{\ell+1}$.

III.1. On définit la fonctionnelle $J$ par :

$$\begin{aligned} J : D(L) &\mapsto \mathbb{R} \\ V \quad &\mapsto \frac{1}{2}\|LV - H\|_2^2 . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Montrer que $U \in D(L)$ est solution de (3.4) si et seulement si elle est solution de :

$$J(U) = \operatorname{Inf}\{J(V),\ V \in D(L)\}. \tag{3.6}$$

III.2. Montrer que $J$ est différentiable pour la norme $\|\ \|_G$ et calculer sa différentielle.

III.3. Soit $a(.\,,.)$ définie sur $D(L)$ par :

$$a(V, \phi) = (L\,V, L\,\phi). \tag{3.7}$$

III.3.1. Montrer que pour tout $V \in D(L)$ on a :

$$\frac{1}{2}\|V\|_G \leqslant \|L\,V\|_2 \leqslant \|V\|_G . \tag{3.8}$$

En déduire que $a(.\,,.)$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur $D(L)$.

III.3.2. Soit $b(.)$ définie sur $D(L)$ par :

$$b(\phi) = (L\,\phi, H). \tag{3.9}$$

Montrer que $b(.)$ est une forme linéaire continue sur $D(L)$.

III.3.3. Montrer que la solution $U$ de (3.6) est la solution de :

$$\begin{cases} U \in D(L) \text{ telle que} \\ a(U, \phi) = b(\phi) \quad \forall\, \phi \in D(L). \end{cases} \tag{3.10}$$

III.4. Soit $(\phi_i)_{i=1,\dots,\xi}$ $\xi$ fonctions linéairement indépendantes de $D(L)$. On note $D_\xi$ l'espace vectoriel engendré par $(\phi_i)_{i=1,\dots,\xi}$. On suppose qu'il existe $\overline{U} \in D_\xi$ telle que :

$$\|U - \overline{U}\|_G \leq \frac{C}{(1+\xi)} \left( \|U\|_2 + \left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_2 + \left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\|_2 \right), \tag{3.11}$$

où $U$ est la solution de (3.10), pour une constante $C$.

On approche alors $U$ solution de (3.10) par $U_\xi$ solution de :

$$\begin{cases} U_\xi = \sum_{j=1}^{\xi} \nu_j \, \phi_j \text{ telle que} \\ a(U_\xi, \phi_i) = b(\phi_i) \text{ pour } i = 1, \dots, \xi. \end{cases} \tag{3.12}$$

III.4.1. Montrer que $U_\xi$ existe et qu'elle est également solution de :

$$J(U_\xi) = \operatorname{Inf} \{ J(V), \quad V \in D_\xi \}. \tag{3.13}$$

III.4.2. Montrer que la solution $U$ de (3.10) vérifie :

$$\operatorname*{Inf}_{V \in D_\xi} \|U - V\|_G \leq \frac{C}{(1+\xi)} \left( \|U\|_2 + \left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_2 + \left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\|_2 \right). \tag{3.14}$$

En déduire :

$$\operatorname*{Inf}_{V \in D_\xi} \|U - V\|_G \leq \frac{C}{(1+\xi)} \left( \|H\|_2 + \left\|\frac{\partial H}{\partial x}\right\|_2 + \left\|\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right\|_2 \right). \tag{3.15}$$

III.4.3. Montrer que :

$$\operatorname*{Inf}_{V \in D_\xi} \|LV - H\|_2 \leq \frac{C}{(1+\xi)} \left( \|H\|_2 + \left\|\frac{\partial H}{\partial x}\right\|_2 + \left\|\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right\|_2 \right). \tag{3.16}$$

En déduire :

$$\|U - U_\xi\|_G \leq \frac{C}{(1+\xi)} \left( \|H\|_2 + \left\|\frac{\partial H}{\partial x}\right\|_2 + \left\|\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right\|_2 \right). \tag{3.17}$$

III.5. On note $\nu \in \mathbb{R}^\xi$ le vecteur :

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nu_\xi \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

où les $\nu_i$ sont définis par (3.12).

III.5.1. Montrer que $\nu$ est solution de :

$$M\nu = N, \tag{3.19}$$

où $M$ est une matrice $\xi \times \xi$, symétrique, et $N$ un vecteur de $\mathbb{R}^\xi$.

III.5.2. Calculer les coefficients $M_{ij}$ de $M$ et les composantes $N_j$ de $N$ en fonction des $(L\phi_j)$, $j = 1, \dots, \xi$.

**Tournez la page S.V.P.**

III.5.3. Montrer que $\tilde{\nu} \in \mathbb{R}^\xi$ vérifie :

$$\sum_{i=1}^{\xi} \sum_{j=1}^{\xi} M_{ij}\, \tilde{\nu}_i\, \tilde{\nu}_j = 0\,, \tag{3.20}$$

si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{\xi} \left( (L\,\phi_i(x))_k\, \tilde{\nu}_i \right) = 0\,, \tag{3.21}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k = 0, \dots, \ell$.

III.6. On suppose que $\xi$ est un multiple de $(\ell + 1)$ et on place sur $\mathbb{R}$ $\gamma = \dfrac{\xi}{\ell + 1}$ points $x_1, \dots, x_\gamma$ tels que :

$$x_1 < \dots < x_\gamma\,. \tag{3.22}$$

On suppose que la solution $U$ de (3.10) vérifie :

$$\|\chi_{[x_1\,,\,x_\gamma]^c}\, U\|_G \leq \frac{1}{(1+\xi)} \left( \|U\|_2 + \left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_2 + \left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\|_2 \right). \tag{3.23}$$

où $\chi_{[x_1\,,\,x_\gamma]^c}$ désigne la fonction caractéristique du complémentaire de $[x_1\,,\,x_\gamma]$ dans $\mathbb{R}$.

On définit les fonctions $(\psi_j)_{j=1,\dots,\gamma}$ par :

$$\begin{cases} \psi_j \text{ est continue sur } [x_1\,,\,x_\gamma]\,, & \\ \chi_{[x_i\,,\,x_{i+1}]}\, \psi_j \text{ est affine sur } ]x_j, x_{j+1}[\,, & \forall\, i = 1, \dots, \gamma - 1 \\ & \forall\, j = 1, \dots, \gamma - 1\,, \\ \psi_j\,(x_i) = 1 \quad \text{si} \quad i = j\,, & \\ \qquad\quad\; = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j\,, & \end{cases} \tag{3.24}$$

où $\chi_{[x_i\,,\,x_{i+1}]}$ désigne la fonction caractéristique de $[x_i\,,\,x_{i+1}]$.

On définit ensuite la base $(\phi_i)_{i=1,\dots,\xi}$ par :

$$\phi_{(\ell+1)(p-1)+k+1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \psi_j \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ligne } 0 \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } k \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } \ell \end{array}\,, \tag{3.25}$$

pour $p = 1, \dots, \gamma$ et $k = 0, \dots, \ell$.

III.6.1. Calculer les $(L\,\phi_i)_k$ pour $i = 1, \dots, \xi$ et pour $k = 0, \dots, \ell$.

III.6.2. Calculer les éléments $M_{11}$, $M_{12}$ et $M_{1(k+1)}$ de la matrice $M$.

III.6.3. Préciser la structure de la matrice $M$.

III.6.4. Montrer que $M$ est définie positive. Proposer une méthode pour résoudre le système (3.19).

III.6.5. La condition (3.11) est-elle vérifiée ?