SESSION 2001

C 31121

J. 4834

3e ANNÉE

MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 5 heures

Pour les épreuves d'admissibilité, l'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail.

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME D'ANALYSE

Le but de ce problème est d'étudier l'influence du potentiel V sur le comportement en temps long des solutions de l'équation de Schrödinger

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = V(t,x)\psi \quad ; \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

Dans tout l'énoncé, V est à valeurs **réelles**.

Notations et rappels

- Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

- Pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ et $\beta \in \mathbb{N}^n$, on note

$$\partial^\beta f = \partial_{x_1}^{\beta_1} \partial_{x_2}^{\beta_2} \dots \partial_{x_n}^{\beta_n} f.$$

- On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Schwartz

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \;/\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,\ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < +\infty \right\}.$$

- Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de f est définie par

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\,dx.$$

Alors $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

- Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors la dérivée de $\widehat{f}$ est donnée par

$$(\widehat{f})'(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} x f(x)\,dx,$$

et la transformée de Fourier de la dérivée de f par

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi).$$

- La transformée de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même et si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi)\,d\xi.$$

• Pour $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, le théorème de Parseval affirme

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}}(\xi)d\xi.$$

• En particulier, avec $f = g$, la transformée de Fourier se prolonge en une bijection de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même, avec

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

De plus, le théorème de Parseval reste vrai si on ne suppose que $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.
• Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On dit que $f \in C(I, L^2(\mathbb{R}))$ si pour tout $t \in I$, $f(t, .) \in L^2(\mathbb{R})$ et pour tous $t, t+h \in I$,

$$\|f(t+h) - f(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Alors la quantité

$$\sup_{t\in I} \|f(t, .)\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

définit une norme sur $C(I, L^2(\mathbb{R}))$ et en fait un espace de Banach.

Partie I

Le but de cette partie est de résoudre l'équation de Schrödinger homogène ($V = 0$) :

$$(1) \qquad \begin{cases} i\partial_t\psi(t,x) + \frac{1}{2}\partial_x^2\psi(t,x) = 0, \\ \psi(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

On suppose $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que (1) possède une solution $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.
1. Écrire une équation différentielle vérifiée par $\widehat{\psi}(t,\xi)$ la transformée de Fourier de $\psi(t, .)$ par rapport à la seconde variable, et la résoudre.
2. En déduire que $\psi(t,x)$ est donnée par

$$\psi(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\frac{t}{2}\xi^2 + ix\xi}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi.$$

Partie II

Pour tout réel t et toute fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, on définit $U_0(t)\varphi$ par la formule

$$\mathcal{F}(U_0(t)\varphi)(\xi) = e^{-i\frac{t}{2}\xi^2}\widehat{\varphi}(\xi).$$

1. Montrer que

i) Cette définition a bien un sens et que $U_0(t)\varphi$ ainsi défini est un élément de $L^2(\mathbb{R})$.

ii) $U_0(0) = Id$.
iii) Pour tous $t, s \in \mathbb{R}$, $U_0(t+s) = U_0(t) \circ U_0(s)$.

2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|U_0(t)\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

3. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors pour tout réel t, $U_0(t)\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

4.a. Si $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, montrer que

$$\phi \ : \ t \mapsto U_0(t)\varphi$$

est une application dans $C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}))$.

4.b. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors ϕ est dérivable avec $\phi' \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}))$ et

$$i\partial_t(U_0(t)\varphi) = -\frac{1}{2}U_0(t)\varphi''.$$

Partie III

On résout dans cette partie l'équation non homogène,

$$(2) \qquad \begin{cases} i\partial_t\psi + \frac{1}{2}\partial_x^2\psi = g(t,x), \\ \psi(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

On suppose $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.
On suppose dans cette partie que (2) possède une solution $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.
D'après la partie II, pour f une fonction de deux variables t et x telle que $f(t,.) \in L^2(\mathbb{R})$, on définit pour s réel, $U_0(s)f(t,.)$ par

$$\mathcal{F}(U_0(s)f(t,.))(\xi) = e^{-i\frac{s}{2}\xi^2}\widehat{f(t,.)}(\xi).$$

Pour un certain $T > 0$, on pose $\phi(t,x) = (U_0(T-t)\psi(t,.))(x)$.

1. Montrer que $\phi \in C([0,T], L^2(\mathbb{R}))$.

2. Montrer que pour tout réel x, l'application $t \mapsto \phi(t,x)$ est dérivable et que sa dérivée est dans $C([0,T], L^2(\mathbb{R}))$.

3. Montrer que $i\partial_t\phi(t,x) = (U_0(T-t)g(t,.))(x)$ et

$$i\partial_t((U_0(-t)\psi(t,.))(x)) = (U_0(-t)g(t,.))(x).$$

4. Déduire que (2) admet une unique solution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ donnée par

$$(3) \qquad \psi(t,x) = (U_0(t)\varphi)(x) - i\int_0^t (U_0(t-s)g(s,.))(x)ds.$$

Partie IV

On considère maintenant le problème de Cauchy

$$\tag{4} \begin{cases} i\partial_t\psi + \dfrac{1}{2}\partial_x^2\psi = V(t,x)\psi, \\ \psi(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

1. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $V \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ est une solution de (4), alors

$$\tag{5} \psi(t,x) = (U_0(t)\varphi)(x) - i\int_0^t (U_0(t-s)(V\psi)(s,.))(x)ds.$$

2. On suppose maintenant $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, $V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_t, L^\infty(\mathbb{R}_x))$, c'est-à-dire pour tout réel t, $V(t,.) \in L^\infty(\mathbb{R})$, et l'application

$$t \mapsto \|V(t,.)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

2.a. Soit $T > 0$. Montrer que l'application F_1 définie par

$$\forall t \in [0,T],\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_1(\psi)(t,x) = \int_0^t (U_0(t-s)(V\psi)(s,.))(x)ds$$

envoie $C([0,T], L^2(\mathbb{R}))$ dans lui-même.

2.b. En déduire que pour tout $T > 0$, l'application F définie par

$$\forall t \in [0,T], \forall x \in \mathbb{R},$$
$$F(\psi)(t,x) = (U_0(t)\varphi)(x) - i\int_0^t (U_0(t-s)(V\psi)(s,.))(x)ds$$

envoie $C([0,T], L^2(\mathbb{R}))$ dans lui-même.

2.c. Montrer que pour $T > 0$ suffisamment petit, (5) possède une unique solution $\psi \in C([0,T], L^2(\mathbb{R}))$.

2.d. En déduire que l'application

$$t \mapsto (U_0(-t)\psi)(t,x)$$

est dans $C([0,T], L^2(\mathbb{R}))$, dérivable à dérivée dans $C([0,T], L^2(\mathbb{R}))$, et

$$\tag{6} \partial_t\left((U_0(-t)\psi(t,.))(x)\right) = -i(U_0(-t)(V\psi))(t,x).$$

3. On veut maintenant montrer que si $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ et $\psi \in C([0,T], L^2(\mathbb{R}))$ est une solution de (5), alors

$$\tag{7} \forall t \in [0,T],\ \|\psi(t,.)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Tournez la page S.V.P.

3.a. Pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} (U_0(-t)f)(x)\overline{(U_0(-t)g)(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

3.b. En déduire

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} |(U_0(-t)\psi)(t,x)|^2\, dx = 0.$$

3.c. Conclure.

4. Si $\psi \in C([0,T], L^2(\mathbb{R}))$ est une solution de (5), montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\psi \in C([0, T+\delta], L^2(\mathbb{R}))$ soit encore solution de (5). En déduire que ψ se prolonge en une solution de (5) sur $[0, +\infty[$ et $\psi \in C([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}))$.

Partie V

Dans cette partie, ψ désigne la solution de (5) sur $[0, +\infty[$.

1. On suppose dans cette question $V \in L^1(\mathbb{R}_t, L^\infty(\mathbb{R}_x))$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. On veut montrer que ψ se comporte comme une solution de (1) pour $t \to +\infty$.

1.a. Montrer qu'il existe $\psi_+ \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\|(U_0(-t)\psi)(t,.) - \psi_+\|_{L^2(\mathbb{R})} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1.b. En déduire

$$\|\psi(t,.) - U_0(t)\psi_+\|_{L^2(\mathbb{R})} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. On montre sur des exemples que sans l'hypothèse $V \in L^1(\mathbb{R}_t, L^\infty(\mathbb{R}_x))$, on ne peut pas conclure de la même façon en général.

2.a. On suppose $V(t,x) \equiv 1$. En considérant $\phi(t,x) = U_0(-t)\psi(t,x)$, montrer qu'on ne peut avoir

$$\|\psi(t,.) - U_0(t)\psi_+\|_{L^2(\mathbb{R})} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

avec $\psi_+ \in L^2(\mathbb{R})$, que si $\varphi = \psi_+ = 0$.

2.b. Même question avec $V(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

2.c. Si $V(t,x) = f(t)$ avec $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $f \notin L^1(\mathbb{R})$, on note F la primitive de f qui s'annule en zéro. Montrer que

$$\left\|\psi(t,.) - e^{-iF(t)}U_0(t)\varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Fin