B. ANALYSE NUMÉRIQUE

Dans tout le problème, on considère des espaces vectoriels réels. L'espace des matrices à coefficients réels à n lignes et p colonnes sera noté $\mathcal{M}(n,p)$. Le symbole T en exposant d'une matrice signifie que l'on considère sa transposée.

Pour $M \in \mathcal{M}(n,p)$ et $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, M_{ij} ou $(M)_{ij}$ est le coefficient de M situé sur la ligne i et la colonne j. On a donc $(M^T)_{ij} = M_{ji}$.

De même pour un vecteur colonne $V \in \mathbb{R}^n$, V^T est un vecteur ligne et V_i ou $(V)_i$ est sa $\text{i}^{\text{ème}}$ composante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n \in \mathcal{M}(n,n)$ est la matrice identité de $\mathbb{R}^n$: $(I_n)_{ii} = 1$ pour $i = 1, ..., n$ et $(I_n)_{ij} = 0$, pour $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Quand il n'y a pas d'ambiguïté possible, on pourra omettre l'indice n et écrire I à la place de I_n.

On identifiera les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ et la matrice qui leur est associée dans la base canonique. On appelle valeur propre d'une matrice $A \in \mathcal{M}(n,n)$ un nombre complexe λ tel que $A - \lambda I_n$ ne soit pas inversible. On désigne par $\rho(A)$ le maximum des modules des valeurs propres de A. On rappelle que si N est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{N}$ est la norme matricielle associée :

$$\mathcal{N}(A) = \sup_{\{x \in \mathbb{R}^n,\, N(x)=1\}} N(Ax), \ A \in \mathcal{M}(n,n),$$

alors on a

$$\rho(A) = \lim_{n \to +\infty} (\mathcal{N}(A^n))^{1/n}. \tag{1}$$

On utilisera la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$, elle est définie par

$$\|V\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (V_i)^2\right)^{1/2}, \ V \in \mathbb{R}^n.$$

La norme matricielle qui lui est associée est encore notée $\|\cdot\|$.

Pour $V^1, ..., V^k$ dans $\mathbb{R}^n$, on note $Vect(V^1, ..., V^k)$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $V^1, ..., V^k$.

Dans ce problème, on introduit et étudie une méthode rapide permettant d'inverser le système linéaire issu de la discrétisation du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2}(x) + 2\sigma u(x) = f(x), \ x \in]0,1[, \\ \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

où $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue. On sait qu'il existe une unique solution et qu'elle est de classe C^2 sur $[0,1]$.

Etant donné $l \in \mathbb{N}$, on introduit le pas de discrétisation $h_l = 2^{-(l+1)}$ et le schéma aux différences finies

$$\begin{cases} \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h_l^2} + 2\sigma u_i = f_i, \ i = 1, ..., n_l, \\ \\ u_0 = u_{n_l+1} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

où $f_i = f(ih_l)$ et $n_l = 2^{l+1} - 1$.

Tournez la page S.V.P.

Partie I

1. Soit $A \in \mathcal{M}(n,n)$ telle qu'il existe $P \in \mathcal{M}(n,n)$ inversible et une matrice $B \in \mathcal{M}(n,n)$ telle que

$$A = PBP^{-1}$$

et B est diagonale bloc, c'est à dire qu'il existe $0 = p_1 < p_2 < \ldots < p_{k+1} = n$ tels que $B_{ij} = 0$ s'il existe $l \in \{1, \ldots, k\}$ tel que (i,j) vérifie

$$p_l + 1 \leq i \leq p_{l+1} \text{ et } j \leq p_l$$

ou

$$p_l + 1 \leq i \leq p_{l+1} \text{ et } j \geq p_{l+1} + 1.$$

On définit les sous matrices $B_l \in \mathcal{M}(p_{l+1} - p_l, p_{l+1} - p_l)$, $l = 1, \ldots, k$ par

$$(B_l)_{ij} = B_{p_l+i, p_l+j}, \; 1 \leq i,j \leq p_{l+1} - p_l.$$

Montrer que

$$\rho(A) = \max_{l=1,\ldots,k} \rho(B_l)$$

et que si de plus $P^{-1} = P^T$ alors

$$\|A\| = \max_{l=1,\ldots,k} \|B_l\|$$

2. Montrer que pour $A_1,\ A_2 \in \mathcal{M}(n,n)$

$$\rho(A_1A_2) = \rho(A_2A_1).$$

(On pourra utiliser (1)).

3. Montrer que si $A \in \mathcal{M}(n,n)$ est une matrice symétrique alors

$$\rho(A) = \|A\|.$$

4. Montrer que si $A \in \mathcal{M}(n,n)$ alors

$$\|A\| \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij})^2 \right)^{1/2}.$$

5. Soit $A \in \mathcal{M}(n,n)$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. On appelle méthode itérative de résolution du système linéaire $Ax = b$ la donnée d'une application linéaire $\Phi \;:\; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et de la relation de récurrence $X^{n+1} = \Phi(X^n, b)$. Sous certaines conditions, après avoir choisi X^0 dans $\mathbb{R}^n$, on obtient une approximation de $A^{-1}b$ grâce à la suite d'itérés $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a. Montrer qu'à toute méthode itérative Φ on peut associer un unique couple de matrices M, N dans $\mathcal{M}(n,n)$ tel que pour tout $X, b \in \mathbb{R}^n$ on ait

$$\Phi(X,b) = MX + Nb.$$

On appelle M la matrice d'itération de la méthode et N la matrice auxiliaire.

b. Montrer que la suite d'itérés $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $A^{-1}b$ pour tout b et pour tout choix de X^0 si et seulement si $\rho(M) < 1$ et $N = (I - M)A^{-1}$.

On dira que la méthode est convergente si $\rho(M) < 1$ et $N = (I - M)A^{-1}$. On appelle $\rho(M)$ le taux de convergence de la méthode.

Partie II

1. Ecrire (3) sous la forme matricielle

$$A_{\sigma,l}U_l = F_l$$

où $U_l = (u_1, ..., u_{n_l})^T$, $F_l = (f_1, ..., f_{n_l})^T$ et $A_{\sigma,l}$ est une matrice que l'on précisera.

2. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de $A_{\sigma,l}$. On notera les vecteurs propres V_l^k, $k = 1, ..., n_l$ et on les cherchera sous la forme $(V_l^k)_j = \sin(j\frac{k\pi}{n_l+1})$, $j = 1, ..., n_l$.

3. Montrer que $(V_l^1, ..., V_l^{n_l})$ forme une base orthogonale. Calculer la norme de ces vecteurs.

4. Montrer que pour tout $l \geq 1$ et $\sigma \geq 0$, $A_{\sigma,l}$ est inversible et

$$\|A_{\sigma,l}^{-1}\| \leq \frac{1}{4+2\sigma}.$$

On introduit la méthode itérative $\Phi_{\sigma,J,l}$, dite de Jacobi relaxée, de matrice d'itération $M_{\sigma,J,l}$ et de matrice auxiliaire $N_{\sigma,J,l}$ données par

$$M_{\sigma,J,l} = (1-\omega)I - \tfrac{\omega}{2(1+\sigma h_l^2)}(L + L^T),$$

$$N_{\sigma,J,l} = \tfrac{\omega h_l^2}{2(1+\sigma h_l)^2} I$$

où L est donnée par

$$(L)_{ij} = -1,\ i = 2, ..., n_l,\ j = i-1,$$

$$(L)_{ij} = 0,\ j \neq i-1,$$

et $\omega \in \mathbb{R}$.

5. Montrer que pour tout $\omega \in]0,1[$ et tout l cette méthode converge.

On suppose dorénavant que $\omega \in]0,1[$.

6. Montrer que le taux de convergence est minoré par $1 - \frac{\omega}{2}(\pi^2 + 2\sigma)h_l^2$.

On construit la suite d'itérés $U_{n+1} = \Phi_{\sigma,J,l}(U_n, F_l)$.

7. On suppose que $\omega(\pi^2 + 2\sigma)h_l^2 \leq 1$, montrer qu'il existe U_0 tel que l'erreur $e_n = \|U_n - A^{-1}b\|$ vérifie

$$e_n \geq \frac{1}{2}e_0$$

pour $n \leq (\omega(\pi^2 + 2\sigma)h_l^2)^{-1}$.

(On pourra utiliser, après l'avoir justifiée, l'inégalité $\ln(1-x) \geq -(2\ln 2)x$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$.)

8.a. Montrer que si $U^0 - A^{-1}b \in Vect(V_l^{n_{l-1}+1}, ..., V_l^{n_l})$, alors

$$e_n \leq (\delta(\omega))^n e_0$$

où $\delta(\omega) = \max(|1-2\omega|, 1-\omega)$.

b. Trouver ω_0 tel que $\delta(\omega_0) = \min_{\omega \in]0,1[} \delta(\omega)$.

On déduit des questions II.5. à II.8. que la méthode de Jacobi relaxée converge très lentement mais a la propriété de faire diminuer très vite la composante de l'erreur le long des vecteurs $V_l^{n_{l-1}+1}, ..., V_l^{n_l}$. *On se propose d'exploiter cette propriété et de coupler cette méthode avec une autre qui possède une propriété complémentaire.*

Tournez la page S.V.P.

Partie III

Dans toute cette partie ainsi que dans la suivante, on ne considère que le cas $\sigma = 0$. On notera

$$A_l = A_{0,l},\ M_{J,l} = M_{0,J,l},\ \text{et } N_{J,l} = N_{0,J,l}.$$

On introduit les matrices $R_l \in \mathcal{M}(n_{l-1}, n_l)$ et $P_l \in \mathcal{M}(n_l, n_{l-1})$ définies par

$$(R_l U)_i = \frac{1}{4}(U_{2i-1} + 2U_{2i} + U_{2i+1})$$

pour $U \in \mathbb{R}^{n_l}$ et $i = 1, ..., n_{l-1}$, et

$$(P_l V)_{2i} = V_i,\ i = 1, ..., n_{l-1},$$

$$(P_l V)_{2i+1} = \tfrac{1}{2}(V_i + V_{i+1}),\ i = 1, ..., n_{l-1} - 1,$$

$$(P_l V)_1 = \tfrac{1}{2}V_1,$$

$$(P_l V)_{n_l} = \tfrac{1}{2}V_{n_{l-1}},$$

pour $V \in \mathbb{R}^{n_{l-1}}$.

On choisit deux entiers ν_1, ν_2 et on définit la méthode à deux grilles $\Phi^l_{\nu_1,\nu_2}$ qui associe à U^n le vecteur $U^{n+1} = \Phi^l_{\nu_1,\nu_2}(U^n, F_l)$ calculé par les trois étapes suivantes :

Etape 1 : Faire ν_1 itérations de Jacobi relaxée :

* $U^{n,0} = U^n$,
* Pour $k = 0, ..., \nu_1 - 1$, $U^{n,k+1} = M_{J,l}U^{n,k} + N_{J,l}F_l$.
* $U^{n+1/3} = U^{n,\nu_1}$.

Etape 2 : Correction par la grille grossière :

* Calcul du résidu : $r^n = A_l U^{n+1/3} - F_l$.
* Restriction : $\rho^n = R_l r^n$.
* Calcul de la correction : $\varepsilon^n = A_{l-1}^{-1}\rho^n$.
* Prolongement : $e^n = P_l \varepsilon^n$.
* Correction de $U^{n+1/3}$: $U^{n+2/3} = U^{n+1/3} - e^n$.

Etape 3 : Faire ν_2 itérations de Jacobi relaxée :

* $U^{n+2/3,0} = U^{n+2/3}$,
* Pour $k = 0, ..., \nu_2 - 1$, $U^{n+2/3,k+1} = M_{J,l}U^{n+2/3,k} + N_{J,l}F_l$,
* $U^{n+1} = U^{n+2/3,\nu_2}$.

On note $\mathcal{M}_l(\nu_1, \nu_2)$ la matrice d'itération et $\mathcal{N}_l(\nu_1, \nu_2)$ la matrice auxiliaire correspondant à cette méthode.

1. Montrer que

$$\mathcal{N}_l(\nu_1, \nu_2) = (I - \mathcal{M}_l(\nu_1, \nu_2))A_l^{-1}.$$

2. Exprimer $\mathcal{M}_l(\nu_1, \nu_2)$ en fonction de $M_{J,l}$, P_l, R_l, A_l, A_{l-1}^{-1}, ν_1 et ν_2.

3. Montrer que pour $\nu_1 = \nu_2 = 0$, la méthode n'est pas convergente.

4. Montrer que pour $k = 1, ..., n_{l-1}$:

$$P_l V_{l-1}^k = c_k^2 V_l^k - s_k^2 V_l^{n_l+1-k}$$

où on a posé

$$c_k = \cos\frac{k\pi}{2(n_l+1)}, \text{ et } s_k = \sin\frac{k\pi}{2(n_l+1)}.$$

5. Pour $k = 1, ..., n_{l-1}$, calculer $R_l V_l^k$ et $R_l V_l^{n_l+1-k}$.

6. Montrer que pour $k = 1, ..., n_{l-1}$, $Vect(V_l^k, V_l^{n_l+1-k})$ est stable par $\mathcal{M}_l(\nu_1, \nu_2)$.

7. Calculer $\mathcal{M}_l(\nu_1, \nu_2)V_l^{n_{l-1}+1}$.

8. Montrer que pour tout ν_1,$\nu_2 \geq 0$:

$$\rho(\mathcal{M}_l(\nu_1, \nu_2)) = \rho(\mathcal{M}_l(0, \nu_1 + \nu_2)).$$

9. Montrer que pour tout $\nu \geq 0$,

$$\rho(\mathcal{M}_l(0,\nu)) \leq \rho_\nu(\omega) = \max_{\xi\in[0,\frac{1}{2}]} |\xi(1-2\omega\xi)^\nu + (1-\xi)(1-2\omega(1-\xi))^\nu|$$

et

$$\|\mathcal{M}_l(0,\nu))\| \leq m_\nu(\omega) = \max_{\xi\in[0,\frac{1}{2}]} \sqrt{2\xi^2(1-2\omega\xi)^{2\nu} + 2(1-\xi)^2(1-2\omega(1-\xi))^{2\nu}}.$$

(On pourra utiliser la question I.1.)

10. Calculer $\rho_1(\omega)$ pour $\omega \in]0,1[$ et trouver ω_0 tel que $\rho_1(\omega_0) = \min \rho_1(\omega)$.

11. On suppose $\omega = \frac{1}{2}$. Montrer que la méthode à deux grilles est convergente pour tout $(\nu_1, \nu_2) \neq (0,0)$.

12. Montrer que $\nu\rho_\nu(\frac{1}{2})$ et $\nu m_\nu(\frac{1}{2})$ ont une limite (que l'on précisera) quand $\nu \to +\infty$.

La méthode à deux grilles présente l'inconvénient de nécessiter le calcul exact de $A_{l-1}^{-1}\rho_n$ ce qui n'est pas acceptable dans la pratique. On remédie à ce problème en utilisant de manière récursive le passage à une grille plus grossière.

Partie IV

Pour trois entiers ν_1, ν_2 et γ, on définit la méthode multigrille à l grilles $\Psi^l_{\nu_1,\nu_2,\gamma}$ qui, pour $l \geq 2$, associe à U^n le vecteur $U^{n+1} = \Psi^l_{\nu_1,\nu_2,\gamma}(U^n, F_l)$ calculé par les trois étapes suivantes :

Etape 1 : Faire ν_1 itérations de Jacobi relaxée :

* $U^{n,0} = U^n$,
* Pour $k = 0, ..., \nu_1 - 1$, $U^{n,k+1} = M_{J,l}U^{n,k} + N_{J,l}F_l$.
* $U^{n+1/3} = U^{n,\nu_1}$.

Etape 2 : Correction par la grille grossière :

* Calcul du résidu : $r^n = A_l U^{n+1/3} - F_l$.
* Restriction : $\rho^n = R_l r^n$.
* Calcul de la correction : $\eta^{n,0} = 0$, pour $k = 0, ...\gamma - 1$,
$\eta^{n,k+1} = \Psi^{l-1}_{\nu_1,\nu_2,\gamma}(\eta^{n,k}, \rho^n)$, $\varepsilon^n = \eta^{n,\gamma}$.
* Prolongement : $e^n = P_l \varepsilon^n$.
* Correction de $U^{n+1/3}$: $U^{n+2/3} = U^{n+1/3} - e^n$.

Etape 3 : Faire ν_2 itérations de Jacobi relaxée :

* $U^{n+2/3,0} = U^{n+2/3}$,
* Pour $k = 0, ..., \nu_2 - 1$, $U^{n+2/3,k+1} = M_{J,l}U^{n+2/3,k} + N_{J,l}F_l$,
* $U^{n+1} = U^{n+2/3,\nu_2}$.

Pour $l = 1$, on prend $\Psi^1_{\nu_1,\nu_2,\gamma} = \Phi^1_{\nu_1,\nu_2}$.

On note $\widetilde{\mathcal{M}}_l(\nu_1, \nu_2, \gamma)$ la matrice d'itération et $\widetilde{\mathcal{N}}_l(\nu_1, \nu_2, \gamma)$ la matrice auxiliaire correspondant à cette méthode.

1. Montrer que pour tout l, :

$$\widetilde{\mathcal{N}}_l(\nu_1, \nu_2, \gamma) = (I - \widetilde{\mathcal{M}}_l(\nu_1, \nu_2, \gamma))A_l^{-1}.$$

2. Montrer que pour $l \geq 2$:

$$\widetilde{\mathcal{M}}_l(\nu_1, \nu_2, \gamma) = \mathcal{M}_l(\nu_1, \nu_2) + C_l \left(\widetilde{\mathcal{M}}_{l-1}(\nu_1, \nu_2, \gamma)\right)^\gamma D_l$$

où C_l et D_l sont des matrices que l'on explicitera en fonction de $M_{J,l}$, P_l, R_l, A_l, A_{l-1}^{-1}, ν_1 et ν_2.

3. Montrer que pour tout $l \geq 2$,

$$\|\widetilde{\mathcal{M}}_l(\nu_1, \nu_2, \gamma)\| \leq \|\mathcal{M}_l(\nu_1, \nu_2)\| + \|\widetilde{\mathcal{M}}_{l-1}(\nu_1, \nu_2, \gamma)\|^\gamma.$$

4. On prend $\gamma = 2$. Montrer qu'il existe une fonction κ définie sur $[0, \frac{1}{4}]$ telle que si $m_{\nu_1+\nu_2}(\omega) \leq \frac{1}{4}$ alors pour tout $l \leq 1$

$$\|\widetilde{\mathcal{M}}_l(\nu_1, \nu_2, 2)\| \leq \kappa(m_{\nu_1+\nu_2}(\omega))$$

et

$$\frac{\kappa(m)}{m} \to 1$$

quand $m \to 0$.

5. Montrer que pour $\omega = \frac{1}{2}$ et $\gamma = 2$, il existe ν_0 tel que pour $\nu_1 + \nu_2 \geq \nu_0$, la méthode multigrille $\Psi_l(\nu_1, \nu_2, 2)$ converge pour tout $l \geq 1$ avec un taux de convergence que l'on peut majorer indépendamment de l.

Partie V

On considère maintenant le cas $\sigma > 0$. On généralise la méthode à deux grilles de la partie III dans le cas $\nu_1 = \nu > 0$ et $\nu_2 = 0$.

On se restreint au cas $\omega = \frac{1}{2}$ pour lequel les calculs sont plus simples.

On obtient la méthode $\phi^l_{\sigma,\nu}$ qui associe à U^n le vecteur $U^{n+1} = \phi^l_{\sigma,\nu}(U^n, F_l)$ calculé par les deux étapes suivantes :

Etape 1 : Faire ν itérations de Jacobi relaxée :

* $U^{n,0} = U^n$,
* Pour $k = 0, ..., \nu - 1$, $U^{n,k+1} = M_{\sigma,J,l}U^{n,k} + N_{\sigma,J,l}F_l$.
* $U^{n+1/2} = U^{n,\nu_1}$.

Etape 2 : Correction par la grille grossière :

* Calcul du résidu : $r^n = A_{\sigma,l}U^{n+1/2} - F_l$.
* Restriction : $\rho^n = R_l r^n$.
* Calcul de la correction : $\varepsilon^n = A^{-1}_{\sigma,l-1}\rho^n$.
* Prolongement : $e^n = P_l \varepsilon^n$.
* Correction de U^{n+1} : $U^{n+1/2} = U^{n+1/3} - e^n$.

On note $\mathcal{M}_{\sigma,l}(\nu)$ la matrice d'itération et $\mathcal{N}_{\sigma,l}(\nu)$ la matrice auxiliaire correspondant à cette méthode.

1. Montrer que si $0 \leq \mu \leq \|A_{\sigma,l}\|^{-1}$ alors

$$\|A_{\sigma,l}\left(I - \mu A_{\sigma,l}\right)^{\nu}\| \leq \frac{1}{\mu(\nu+1)}$$

2. Montrer que

$$\|A_{\sigma,l}(M_{\sigma,J,l})^{\nu}\| \leq \frac{4(1+\sigma h_l^2)}{h_l^2(\nu+1)}.$$

3. Montrer que

$$\|A^{-1}_{\sigma,l} - P_l A^{-1}_{\sigma,l-1} R_l\| \leq \frac{\sqrt{5}}{2} h_l^2.$$

(On pourra utiliser les questions I.1. et I.4.)

4. Montrer que pour ν assez grand, la méthode à deux grilles $\phi^l_{\sigma,\nu}$ est convergente et que son taux de convergence peut être majoré par $\frac{\zeta_\sigma}{\nu}$ où ζ_σ ne dépend pas de l.

5. En vous inspirant de la partie IV, proposer une méthode multigrille $\psi^l_{\sigma,\nu,\gamma}$ construite en évitant le calcul de $A^{-1}_{\sigma,l-1}\rho^n$ dans la seconde étape de $\phi^l_{\sigma,\nu}$.

6. Montrer la convergence de cette méthode pour $\gamma = 2$ et ν assez grand.