A. PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Toutes les variables aléatoires (v.a.) considérées dans ce problème sont à valeurs réelles et définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si X est une v.a. et B un borélien de $\mathbb{R}$, on pose $[X \in B] = X^{-1}(B)$. L'opérateur d'espérance est noté E. L'expression presque surement est abrégée en p.s, tandis que la convergence en moyenne quadratique est appelée convergence dans L^2. Enfin les lettres n, k, ℓ désignent des entiers.

- I -

$(\gamma_\ell)_{\ell \geq 0}$ est une suite de réels positifs telle que $\sum_{\ell \geq 0} \gamma_\ell < +\infty$.

Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. de carrés intégrables telles que, pour tout $n \geq 1$ et $\ell \geq 0$,

$$E[Z_n] = 0, \quad |E[Z_n Z_{n+\ell}]| \leq \gamma_\ell.$$

On pose $U_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$.

1 . Montrer que, pour n et $\ell \geq 0$, $E[(U_{n+\ell} - U_n)^2] \leq \ell\gamma_0 + 2\sum_{j=1}^{\ell-1}(\ell - j)\gamma_j$.

En déduire qu'il existe une constante K telle que, pour tout n et $\ell \geq 0$,

$$E[(U_{n+\ell} - U_n)^2] \leq K\ell.$$

2 .

a . Pour $\epsilon > 0$, établir la convergence de la série de terme général

$$u_n = P[|U_{n^2}| > \epsilon n^2].$$

b . Prouver que la suite $\left(\frac{U_{n^2}}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers 0.

3 . On pose, pour $n \geq 1$, $V_n = \max\{|U_k - U_{n^2}| : n^2 < k < (n+1)^2\}$.

a . Soit $\epsilon > 0$, justifier l'égalité

$$P[V_n > \epsilon n^2] \leq \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} P[|U_k - U_{n^2}| > \epsilon n^2].$$

b . Prouver que la suite $\left(\frac{V_n}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers 0.

4 . Conclure que la suite $\left(\frac{U_k}{k}\right)_{k\geq 1}$ converge p.s. vers 0.

Tournez la page S.V.P.

- II -

Notations et préliminaires pour le reste du problème

Désormais $(c_k)_{k\geq 0}$ est une suite de réels telle que $\sum_{k\geq 0} c_k^2 < +\infty$ et $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de v.a. indépendantes, de carrés intégrables, telles que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$E[\xi_k] = 0, \qquad E[\xi_k^2] = 1,$$

sauf exception signalée, ces v.a. seront supposées de même loi.

On note $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, la tribu engendrée par les v.a. ξ_i, $i \leq n$, c'est à dire la plus petite sous-tribu de $\mathcal{F}$ rendant mesurable ces v.a.

1 . Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la série $\sum_{k\geq 0} c_k \xi_{n-k}$ converge dans L^2.

2 . Indiquer pourquoi cette convergence est aussi vraie p.s.

On pose dorénavant, pour $n \in \mathbb{Z}$, $X_n = \sum_{k\geq 0} c_k \xi_{n-k}$ et, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{\ell=1}^{n} X_\ell.$$

- III -

1 . Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\ell \geq 0$, justifier l'existence de $E[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell]$ et établir l'égalité

$$E[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell] = \sum_{k\geq n} c_k \xi_{\ell+n-k} \quad p.s.$$

2 . On pose, pour $n \geq 0$, $r_n = \left(\sum_{k\geq n} c_k^2\right)^{1/2}$, et l'on fait l'hypothèse $\sum_{n\geq 0} r_n < +\infty$. On désigne ci-dessous par ℓ un entier ≥ 0.

a . Prouver que la série $\sum_{n\geq 1} E[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell]$ converge dans L^2.

b . Soit Z_ℓ la somme de cette série. Vérifier qu'il existe une constante s telle que, pour $\ell \geq 1$,

$$X_\ell + Z_\ell - Z_{\ell-1} = s\xi_\ell.$$

c . Utiliser le fait que les v.a. Z_n, $n \geq 1$, ont même loi et sont de carrés intégrables, pour montrer que $\left(\frac{Z_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers 0. Conclure que la suite $\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ converge vers une loi normale centrée dont on précisera la variance σ^2.

- IV -

Dans cette partie, on suppose que les v.a. ξ_k, $k \in \mathbb{Z}$, ont la même loi gaussienne μ centrée de variance 1.

On pose, pour $n \geq 1$, $W_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \xi_\ell$ et l'on note $\mathcal{L}$ l'espace des fonctions bornées, lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

Dans les questions 1 et 2 ci-dessous, f_0 désigne un élément de $\mathcal{L}$ tel que $\int f_0 d\mu = 0$.

1 . Pour $1 \leq n < n + \ell$, on pose $W_{n,\ell} = \dfrac{1}{\sqrt{n+\ell}} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+\ell} \xi_k$.

a . Etablir l'égalité $E[f_0(W_n) f_0(W_{n+\ell})] = E[f_0(W_n)\big(f_0(W_{n+\ell}) - f_0(W_{n,\ell})\big)]$.

b . Prouver qu'il existe une constante C telle que, pour tout n, ℓ, $1 \leq n < n + \ell$,

$$\big|E[f_0(W_n) f_0(W_{n+\ell})]\big| \leq C \Big(\frac{n}{n+\ell}\Big)^{1/2}.$$

2 .

a . Pour $k \geq 1$, on pose $Z_k = \displaystyle\sum_{j=4^{k-1}}^{4^k - 1} \frac{1}{j} f_0(W_j)$. Prouver qu'il existe une constante C' telle que, pour $1 \leq k \leq k + \ell$, $E[Z_k Z_{k+\ell}] \leq C' \times 2^{-\ell}$. En déduire que la suite $\Big(\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k\Big)_{n \geq 1}$ converge p.s. vers 0.

b . Prouver qu'il existe $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ tel que $P(\Omega_0) = 1$ et que, pour $\omega \in \Omega_0$,

$$\lim_n \frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} f_0(W_j(\omega)) = 0.$$

(On rappelle que $\displaystyle\lim_n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln n = \gamma > 0$.)

On fait désormais sur la suite $(c_k)_{k \geq 0}$ les hypothèses de la question III-2, en supposant $\sigma^2 > 0$.

3 . Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{L}$, il existe $\Omega_f \in \mathcal{F}$ tel que $P(\Omega_f) = 1$ et que, pour $\omega \in \Omega_f$,

$$\lim_n \frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} f\Big(\frac{S_j(\omega)}{\sigma\sqrt{j}}\Big) = \int f d\mu.$$

Tournez la page S.V.P.

4 . On note Φ la fonction de répartition de μ et $F_{n,\omega}$ la fonction de répartition de la mesure positive $\mu_{n,\omega}$ définie par

$$\int h d\mu_{n,\omega} = \frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} h\Big(\frac{S_j(\omega)}{\sigma\sqrt{j}}\Big),$$

où h est une fonction numérique quelconque.

a . Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe Ω_t tel que $P(\Omega_t) = 1$ et $\lim_n F_{n,\omega}(t) = \Phi(t)$. (On pourra faire usage d'encadrements de la fonction indicatrice $1_{[t,+\infty[}$ par des fonctions de $\mathcal{L}$.)

b . Conclure qu'il existe $\widetilde{\Omega}$ tel que $P(\widetilde{\Omega}) = 1$ et que, pour tout $\omega \in \widetilde{\Omega}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_n F_{n,\omega}(t) = \Phi(t)$.

- V -

Dans cette partie, on suppose que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$P[\xi_k = +1] = P[\xi_k = -1] = \frac{1}{2}.$$

On désigne par G le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ engendré par la partie $\{c_k : k \in \mathbb{N}\}$.

1 . Soit B un borélien de $\mathbb{R}$, on pose $A = [X_0 \in B + G]$.

a . Soit $n \geq 0$. Déterminer $A_n \in \mathcal{F}_{-n}$ tel que, pour tout $(s_i)_{i=0}^{n-1} \in \{-1, +1\}^n$,

$$A \cap \Big(\bigcap_{i=0}^{n-1} [\xi_{-i} = s_i]\Big) = A_n \cap \Big(\bigcap_{i=0}^{n-1} [\xi_{-i} = s_i]\Big).$$

b . Montrer que, si $P[X_0 \in B] > 0$, alors $P[X_0 \in B + G] = 1$.

2 . Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Prouver que la loi ν de X_0 est soit discrète, soit singulière par rapport à λ (c'est à dire telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\nu(\{x\}) = 0$ et qu'il existe N tel que $\lambda(N) = 0$ et $\nu(N) = 1$), soit absolument continue par rapport à λ.

3 .

a . Identifier ν dans le cas où $(c_k)_{k\geq 0} = (2^{-k-1})_{k\geq 0}$.

b . Lorsque $(c_k)_{k\geq 0} = (3^{-k-1})_{k\geq 0}$, indiquer auquel des types énumérés en 2 appartient ν.

- VI -

1 . Pour cette question exceptionnellement, on ne fait pas l'hypothèse que les v.a. ξ_k, $k \in Z$, sont de même loi, mais on suppose $\sum_{k\geq 0} |c_k| < +\infty$. Montrer que la suite $\big(\frac{S_n}{n}\big)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers 0.

2 . On revient au cadre général défini en (II). Prouver que la suite $\big(\frac{S_n}{n}\big)_{n\geq 1}$ converge vers 0 p.s. et dans L^2.