

B. ANALYSE NUMÉRIQUE

Notations : la dérivée partielle par rapport à une variable d'une fonction $u(x, t)$ sera notée indifféremment $\frac{\partial u}{\partial x}$ ou u_x ; la dérivée seconde $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ou u_{xx} .

On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad u_t + f(u)_x = 0 \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad t > 0$$

où f est une application C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et u une fonction réelle de deux variables : $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

On dira que u est solution "classique" de (1) sur $\mathbb{R} \times [0, T[$ si u est continue sur $\mathbb{R} \times [0, T[$, de classe C^1 en dehors de segments de droites isolés sur $\mathbb{R} \times]0, T[$ et vérifie (1) en tout point de $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, T[$ de régularité de u .

Soit u une solution classique de (1) pour $f(u) = \frac{u^2}{2}$ et $t < T$.

- 1.- Montrer que u est constante sur les courbes $t \mapsto (x(t), t)$ d'un domaine U où u est C^1 (avec $t \in [0, T[$) et où $x(t)$ est C^1 et vérifie

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = u(x(t), t) \quad 0 < t < T.$$

En déduire que les courbes solutions de (2) sont des segments de droites et que, pour $t < T$, on peut si $(x, t) \in U$ exprimer $u(x, t)$ en fonction de u_0 .

- 2.- On considère la condition initiale :

$$(3) \quad u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Donner une solution classique de (1) avec (3) pour $t < 1$; tracer la courbe $x \mapsto u(x, t)$ pour $t < 1$.

- 3.- Montrer que la construction de la question 1 ne permet pas, pour le problème (1)-(3), de définir une solution continue pour $t \geq 1$.

Tournez la page S.V.P.

- 4.- Donnez une condition initiale non constante u_0 de (1) (avec $f(u) = \frac{1}{2}u^2$) permettant de déterminer une solution classique de (1) pour tout $t > 0$.
- 5.- Montrer que si u est une solution "classique" de (1) pour $t < T$, alors les courbes $t \mapsto (x(t), t)$ d'un domaine U où u est C^1 vérifiant

$$\frac{dx}{dt} = f'(u(x(t), t)) \quad x(0) = x_0$$

sont des segments d'équation :

$$x = f'(u_0(x_0))t + x_0 \quad t \in [0, T[.$$

- 6.- Dédurre de ce qui précède que, même si u_0 est indéfiniment dérivable, les solutions "classiques" de (1) sur $[0, T[$ peuvent ne pas être prolongeables par continuité en T .
- 7.- Si f est convexe, donnez une condition la moins contraignante sur u_0 pour qu'il existe une solution "classique" de (1) pour tout $t > 0$.
- 8.- Montrer que si u est une solution classique C^1 sur $\mathbb{R} \times [0, T[$ de (1) alors, pour toute fonction φ de \mathbb{R}^2 indéfiniment dérivable à support compact, on a :

$$(4) \quad \int_{\mathbb{R} \times [0, T[} (u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + f(u(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0.$$

Dans la suite on dira qu'une fonction u de $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ est solution "faible" de (1) si u vérifie (4) pour toute fonction φ indéfiniment dérivable et à support compact.

Soit u une solution faible de (1) dans $\mathbb{R} \times [0, T[$.

On suppose que u est continue par morceaux dans un ouvert $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times [0, T[$ et que u est discontinue le long d'une courbe régulière Γ qui sépare \mathcal{D} en deux composantes connexes \mathcal{D}_d et \mathcal{D}_g . On suppose que u est de classe C^1 dans \mathcal{D}_d et dans \mathcal{D}_g . On note $u_d(x, t)$ la limite de $u(y, s)$ quand (y, s) tend vers $(x, t) \in \Gamma$ en restant dans \mathcal{D}_d . On définit de même $u_g(x, t)$, $f(u)_d(x, t)$, $f(u)_g(x, t)$ le long de Γ .

On note :

$$[h](x, t) = h_d(x, t) - h_g(x, t)$$

le "saut" à travers Γ de toute fonction h continue par morceaux.

Soit φ une fonction indéfiniment dérivable et à support compact dans \mathcal{D} . On note $n_t(s)$ et $n_x(s)$ les deux composantes d'un vecteur unitaire normal à Γ en $s \in \Gamma$.

9.- Montrer que :

$$\int_{\Gamma} (n_t(s)[u](s) + n_x(s)[f(u)](s))\varphi(s)ds = 0$$

On suppose que la courbe de discontinuité Γ précédente peut être paramétrée par la variable t sous la forme :

$$\Gamma = \{(\xi(t), t); t \in]t_1, t_2[\}$$

où ξ est de classe C^1 sur $]t_1, t_2[$.

10.- Montrer que si u est solution "faible" de (1) on a :

$$(5) \quad \frac{d\xi}{dt}[u] = [f(u)]$$

en tout point de Γ .

11.- Montrer que si u est de classe C^1 dans \mathcal{D}_d et \mathcal{D}_g , vérifie (1) dans \mathcal{D}_d et \mathcal{D}_g et vérifie (5) sur Γ alors u est solution "faible" de (1) dans \mathcal{D} .

12.- Donner une solution faible de (1) - (3) avec $f(u) = \frac{u^2}{2}$ pour tout temps t .

13.- Pour $\alpha \geq 1$ on pose :

$$u_{\alpha}(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq \frac{1-\alpha}{2}t \\ -\alpha & \text{si } \frac{1-\alpha}{2}t < x \leq 0 \\ \alpha & \text{si } 0 < x \leq \frac{\alpha-1}{2}t \\ -1 & \text{si } \frac{\alpha-1}{2}t < x \end{cases}$$

Montrer que u_{α} est, pour tout $\alpha \geq 1$, solution faible de (1) avec la condition initiale $u_0(x) = -\text{sgn } x$ ($\text{sgn } x$ est le signe de x) et $f(u) = \frac{u^2}{2}$.

Soit $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^2 telles que :

$$(6) \quad F' = E' f'$$

On note u^{ε} la solution classique de l'équation

$$u_t^{\varepsilon} + f(u^{\varepsilon})_x = \varepsilon u_{xx}^{\varepsilon} \quad u^{\varepsilon}(x, 0) = u_0(x)$$

avec u_0 continue et bornée. On suppose que u^{ε} est bornée sur $\mathbb{R} \times]0, T[$ par une constante indépendante de ε et :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} u^{\varepsilon}(x, t) = u(x, t) \quad \text{presque partout dans } \mathbb{R} \times]0, T[$$

avec u solution faible de (1).

Tournez la page S.V.P.

14.- Montrer que, pour toute fonction φ positive indéfiniment dérivable et à support compact dans $\mathbb{R} \times]-\infty, T[$:

$$(7) \quad 0 \leq \int_{\mathbb{R} \times]0, T[} (E(u)\varphi_t + F(u)\varphi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} E(u_0(x))\varphi(x, 0) dx.$$

On suppose maintenant que $E(u) = |u - k|$ et $F(u) = \text{sgn}(u - k)(f(u) - f(k))$. On pose alors :

$$E_n = E * \rho_n \quad \text{avec} \quad \rho_n(s) = n\rho(ns)$$

où ρ est une fonction indéfiniment dérivable, positive et à support compact dans \mathbb{R} (* est le produit de convolution) telle que $\int_{\mathbb{R}} \rho(s) ds = 1$ et

$$F_n(s) = \int_0^s f'(y)E'_n(y) dy.$$

15.- En utilisant la question précédente avec E_n et F_n , montrer que (7) est encore vraie pour E et F .

Toute solution faible de (1) vérifiant (7) pour tout couple (E, F) vérifiant (6) et dite solution entropique.

16.- En prenant pour E la fonction $u \mapsto |u - k|$ où k est un paramètre réel quelconque, montrer que si u est solution entropique de (1) alors en tout point de la courbe Γ (définie à la question 10) :

$$\text{si } u_g < u_d \quad \alpha f(u_g) + (1 - \alpha)f(u_d) \leq f(\alpha u_g + (1 - \alpha)u_d) \quad \text{pour tout } \alpha \in [0, 1]$$

$$\text{si } u_g > u_d \quad \alpha f(u_g) + (1 - \alpha)f(u_d) \geq f(\alpha u_g + (1 - \alpha)u_d) \quad \text{pour tout } \alpha \in [0, 1]$$

On montre (ce n'est pas demandé !) que la solution faible entropique est unique.

17.- Montrer que si f est convexe, la solution faible entropique de (1) n'admet que des discontinuités décroissantes.

18.- Quelle est la solution faible entropique de la question 13 ?

Soit v_j^n une approximation de $u(j\Delta x, n\Delta t)$ où Δx et Δt sont respectivement le pas d'espace et le pas de temps. Pour approcher la solution de (1) (qui peut être discontinue), on utilise le schéma :

$$(8) \quad \begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_j^n - \lambda(F(v_j^n, v_{j+1}^n) - F(v_{j-1}^n, v_j^n)) \\ &= H(v_{j-1}^n, v_j^n, v_{j+1}^n) \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

où

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{et} \quad v_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{(j-\frac{1}{2})\Delta x}^{(j+\frac{1}{2})\Delta x} u_0(x) dx$$

avec $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $F(v, v) = f(v)$

On notera dans la suite

$$H(v_{-1}, v_0, v_1) = v_0 - \lambda(F(v_0, v_1) - F(v_{-1}, v_0))$$

19.- Montrer que

$$\sum_{j=-1}^1 \frac{\partial F}{\partial v_j}(v, v) = f'(v) \quad \text{et} \quad \sum_{j=-1}^1 \frac{\partial H}{\partial v_j}(v, v, v) = 1$$

en déduire que

$$\sum_{j=-1}^1 j \frac{\partial H}{\partial v_j}(v, v, v) = -\lambda f'(v).$$

On montre que, si u solution de (4) est suffisamment régulière, on a :

$$(9) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t}(u(x, t + \Delta t) - H(u(x - \Delta x, t), u(x, t), u(x + \Delta x, t))) \\ &= -\Delta t \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta(u, \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} \right) (x, t) + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

où

$$\beta(u, \lambda) = \frac{1}{2\lambda^2} \sum_{j=-1}^1 j^2 \frac{\partial H}{\partial v_j}(u, u, u) - \frac{1}{2}(f'(u))^2$$

On dit que le schéma (8) est "monotone" si H est une fonction monotone croissante pour chacun de ses arguments.

20.- Montrer que si (8) est monotone alors $\beta(u, \lambda) \geq 0$ et $\beta(u, \lambda) \neq 0$ sauf dans un cas trivial.

(On dit alors que le schéma (8) est, d'après (9), "au plus du premier ordre").

Dans le schéma de Lax-Friedrichs on a :

$$F(v_1, v_2) = \frac{1}{2}(f(v_1) + f(v_2)) + \frac{1}{2\lambda}(v_1 - v_2)$$

avec $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

21.- Montrer que le schéma de Lax-Friedrichs est monotone sous réserve de la réalisation d'une condition sur λ que l'on explicitera.

Pour une suite $\bar{v} = (v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ on pose :

$$VT(\bar{v}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |v_{j+1} - v_j|$$

c'est la "variation totale" de la suite \bar{v} . Si $v^n = (v_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ on note $L(v^n) = (v_j^{n+1})_{j \in \mathbb{Z}}$ la suite obtenue par le schéma (8).

22.- Si on écrit le schéma (8) sous la forme :

$$v_j^{n+1} = v_j^n + C_{j+\frac{1}{2}}^n (v_{j+1}^n - v_j^n) - D_{j-\frac{1}{2}}^n (v_j^n - v_{j-1}^n)$$

montrer que si :

$$C_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0 \quad D_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0 \quad \text{et} \quad C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1$$

pour tout $n \geq 0$ et tout $j \in \mathbb{Z}$ alors le schéma (8) est à variation totale décroissante (sur un plan pratique on n'a pas création d'oscillations).