A. PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Définitions et rappels

Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où Ω est un ensemble, $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur Ω, et P une probabilité définie sur $\mathcal{A}$. La σ-algèbre $\mathcal{A}$ sera toujours supposée P-complète, c'est-à-dire que si $A \in \mathcal{A}$ est tel que $P(A) = 0$, alors $\mathcal{A}$ contient tous les sous-ensembles de A (ensembles P-négligeables). Une variable aléatoire X définie sur cet espace est une application $\mathcal{A}$-mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ étant muni de sa tribu borélienne. La loi d'une variable aléatoire X, est la mesure image de P par X sur $\mathbb{R}$.

On notera $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'espace de Hilbert des classes d'équivalence (pour l'égalité presque sûre) des variables aléatoires $\mathcal{A}$-mesurables X : $\Omega \to \mathbb{R}$ telles que

$$E(X^2) := \int_\Omega X^2 dP < \infty,$$

muni du produit scalaire $\langle X\,,\,Y\rangle = E[XY]$ et de la norme associée.

Une variable aléatoire X est gaussienne réduite si et seulement si sa loi a pour densité $p(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. La variable X est gaussienne de moyenne m et de variance σ^2 si et seulement si $(X - m)/\sigma$ est gaussienne réduite. Si $m = 0$, X est dite centrée. Par extension, une variable aléatoire constante sera également considérée comme gaussienne.

La fonction caractéristique (transformée de Fourier) d'une variable aléatoire gaussienne réduite X est

$$E(e^{itX}) = e^{-\frac{t^2}{2}},\ \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

et cette identité <u>caractérise</u> la loi de X.

Soit T un ensemble arbitraire. Un processus gaussien indexé par T, défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in T)$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(t_1, \ldots, t_n) \in T^n$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i X_{t_i}$ soit une variable aléatoire gaussienne <u>centrée</u>.

Soit $X = (X_t, t \in T)$ et $Y = (Y_t, t \in T)$ deux processus gaussiens indexés par T définis sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que Y est une <u>modification</u> de X si, pour tout $t \in T$, il existe un ensemble $N_t \in \mathcal{A}$ tel que $P(N_t) = 0$ et $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ si $\omega \in \Omega \setminus N_t$.

Pour tout $(s,t) \in T^2$ on note $R_X(s,t)$ la covariance

$$R_X(s,t) = E(X_s X_t)$$

d'un processus gaussien X indexé par T. On dira que deux processus gaussiens $X = (X_t, t \in T)$ et $Y = (Y_t, t \in T)$ (pas nécessairement définis sur le même espace) sont <u>équivalents</u> si et seulement si leurs covariances coïncident.

La notation $\ln x$ désignera le logarithme népérien du réel positif x.

Tournez la page S.V.P.

Les parties A et B sont indépendantes et font appel à certains résultats de la partie préliminaire.

Questions préliminaires

P-1) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

P-1-a) Calculer la fonction caractéristique $t \to E(e^{itX})$ d'une variable aléatoire gaussienne X de moyenne m et de variance σ^2.

P-1-b) On suppose que $(Y_n, n \geq 0)$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes qui converge vers une variable aléatoire X dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que X est une variable aléatoire gaussienne.

P-2) Soit $(X_t, t \in T)$ un processus gaussien défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(t_1, \ldots, t_n) \in T^n$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j R_X(t_i, t_j) \geq 0 \tag{1}$$

Une telle fonction R définie sur T^2 est dite de type positif.

On admettra le résultat suivant : *pour toute fonction R de type positif sur T^2, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et un processus gaussien $(X_t, t \in T)$ de covariance R défini sur cet espace.*

P-3) Soit X une variable aléatoire gaussienne réduite définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que pour tout $a > 0$, on a

$$P(X > a) \leq \frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{a\sqrt{2\pi}}.$$

En déduire une majoration de $P(|X| > a)$.

Partie A

Soit $X = (X_t, t \in T)$ un processus gaussien indexé par un ensemble T, défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et soit $R = R_X$ sa covariance.

A-1) On appelle H_X le sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ engendré par la famille $(X_t, t \in T)$. Montrer que tous les éléments de H_X sont des variables aléatoires gaussiennes.

A-2) Si $Z \in H_X$, on définit la fonction $\Phi_X(Z) : T \to \mathbb{R}$, par $\Phi_X(Z)(t) = \int_\Omega X_t Z dP$. Notant $\mathcal{F}(T, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur T, montrer que

$$\Phi_X : H_X \to \mathcal{F}(T, \mathbb{R})$$

est injective.

A-3) On appelle $\mathcal{H}_X$ l'image de H_X par Φ_X. On définit sur $\mathcal{H}_X$ le produit scalaire

$$\langle f , g \rangle_X = \int_\Omega \Phi_X^{-1}(f) \Phi_X^{-1}(g) dP,$$

ce qui munit $\mathcal{H}_X$ d'une structure d'espace de Hilbert isométrique à H_X.

Vérifier que pour tout $s \in T$, la fonction $R^s \in \mathcal{F}(T, \mathbb{R})$ définie par $R^s(t) = R(s,t)$ appartient à $\mathcal{H}_X$ et calculer $\langle R^s , R^t \rangle_X$.

$\mathcal{H}_X$ est appelé espace auto-reproduisant associé au processus gaussien X.

A-4) Montrer que deux processus gaussiens $X = (X_t, t \in T)$ et $Y = (Y_t, t \in T)$ sont équivalents si et seulement si $\mathcal{H}_X = \mathcal{H}_Y$ et $\langle . , . \rangle_X = \langle . , . \rangle_Y$.

A-5) On suppose dans cette question que $T = \{1, \ldots, n\}$ et pour un vecteur gaussien $X = (X_1, \ldots, X_n)$, on note $\Sigma = (r_{ij}, i, j = 1, \ldots, n)$ sa matrice de covariance, avec $r_{ij} = E(X_i X_j)$. On suppose que Σ est inversible. Décrire, en fonction de Σ, l'espace $\mathcal{H}_X$ et le produit scalaire associé.

A-6) On suppose à nouveau que $T = \{1, \ldots, n\}$ et qu'il existe des réels $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < 1$ tels que $X = (X_t, t \in T)$ soit un processus gaussien de covariance $R_X(i,j) = \min(t_i, t_j)$. Décrire en explicitant complètement les calculs l'espace $\mathcal{H}_X$ et le produit scalaire associé.

A-7) On suppose que $T = [0,1]$ et que $(X_T, t \in T)$ est un processus gaussien de covariance $R_X(s,t) = \min(s,t)$. Montrer que l'espace auto-reproduisant $\mathcal{H}_X$, est constitué des fonctions du type

$$f(t) = \int_0^t q(s) ds$$

avec $q \in L^2([0,1])$, et que, si $f(.) = \int_0^{\cdot} q(s) ds$, $g(.) = \int_0^{\cdot} r(s) ds$ sont des éléments de $\mathcal{H}_X$, on a $\langle f , g \rangle_X = \int_0^1 qr ds$.

Tournez la page S.V.P.

Partie B

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire

$$(f,g) \mapsto \langle f\,,\,g\rangle .$$

On notera $\|f\| = \sqrt{\langle f\,,\,f\rangle}$ la norme Hilbertienne sur $\mathcal{H}$.

Soit $Y = (Y_f, f \in \mathcal{H})$ un processus gaussien sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indexé par $\mathcal{H}$, de covariance $R_Y(f,g) = \langle f\,,\,g\rangle$. Soit C un sous ensemble de $\mathcal{H}$.

B-1) Montrer que $f \mapsto Y_f$, de $\mathcal{H}$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est linéaire.

B-2) Montrer que si $A \subset C$ est un ensemble fini et $a > 0$,

$$P\left[\sup\left\{\frac{|Y_{f-g}|}{\|f-g\|}, (f,g) \in A^2, f \neq g\right\} > a\right] \leq card(A)^2 \frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{a}.$$

B-3) On suppose que $(A_n, n \geq 0)$ est une suite de sous ensembles finis de C, de cardinal croissant, et $(a_n, n \geq 0)$ une suite de réels positifs tels que

$$\sum_{n\geq 0} card(A_n)^2 \frac{e^{-\frac{a_n^2}{2}}}{a_n} < \infty .$$

Montrer qu'il existe un sous-ensemble $\mathcal{N} \subset \Omega$ tel que $P(\mathcal{N}) = 0$ et pour tout $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}$, il existe un entier $n(\omega) > 0$ tel que pour tout $n > n(\omega)$, pour tout $(f,g) \in (A_n \cup A_{n-1})^2$,

$$|Y_{f-g}(\omega)| \leq a_n \|f-g\| ..$$

B-4) Pour $\delta > 0$ on note $N(\delta)$ le plus petit nombre k, tel qu'il existe des éléments $g_1, \ldots, g_k$ dans $\mathcal{H}$ tels que $\forall f \in C$, $\exists i \in \{1, \ldots, k\}$ avec $\|f - g_i\| \leq \delta$. On suppose que $N(\delta)$ est fini pour tout $\delta > 0$.

Soit $(\delta_n, n \geq 0)$ une suite décroissante tendant vers 0. On suppose construite une suite croissante $(a_n, n \geq 0)$ telle que

$$\sum_{n\geq 0} N(\delta_n)^2 \frac{e^{-\frac{a_n^2}{2}}}{a_n} < \infty \text{ et } \sum_{n\geq 1} \delta_{n-1} a_n < \infty .$$

B-4-a) Soit $A_n \subset \mathcal{H}$ un ensemble de cardinal $N(\delta_n)$ tel que, pour tout $f \in C$, il existe $g \in A_n$ tel que $\|f - g\| \leq \delta_n$. On choisit, pour tout $f \in C$ et $n \geq 0$, un tel élément $g \in A_n$ que l'on notera $p_n(f)$.

Montrer qu'il existe un ensemble $\mathcal{N}$ P-négligeable tel que pour tout $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $n(\omega) > 0$ tel que, pour tout $f \in C$, $Y_{p_n(f)}(\omega)$ converge vers une limite notée $Y_f^*(\omega)$ et

$$|Y_{p_n(f)}(\omega) - Y_f^*(\omega)| \leq \epsilon$$

si $n \geq n(\omega)$.

B-4-b) Montrer que Y^* est une modification de Y.

B-4-c) Montrer qu'il existe une constante K telle que, pour tout $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}$, il existe un entier $n(\omega)$ tel que, pour tout $n \geq n(\omega)$, pour tout couple $(f,g) \in C^2$,

$$|Y^*_{f-g}(\omega)| \leq K \left(a_n \|f-g\| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \delta_{k-1} a_k \right)$$

B-5) Vérifier que s'il existe des suites $(\delta_n, n \geq 0)$ et $(a_n, n \geq 0)$ de nombres positifs, avec (δ_n) décroissante, telles que

$$\sum_{n \geq 0} N(\delta_n)^2 \frac{e^{-\frac{a_n^2}{2}}}{a_n} < \infty \text{ et } \sum_{n \geq 1} \delta_{n-1} a_n < \infty,$$

alors a_n tend vers l'infini et $\int_0^{\delta_0} \sqrt{\ln N(u)} du < \infty$.

B-6) On suppose que $\int_0^1 \sqrt{\ln N(u)} du < \infty$ et que $N(u)$ tend vers l'infini si u tend vers 0. On définit par récurrence la suite $(\delta_n, n \geq 0)$, ainsi qu'une autre suite $(\epsilon_n, n \geq 0)$ en posant $\epsilon_0 = 1$,

$$\delta_n = 2 \inf\{\delta, N(\delta) \leq N(\epsilon_n)^2\}.$$

et $\epsilon_{n+1} = \min(\epsilon_n/3, \delta_n)$.

On pose enfin $a_n = 3\sqrt{\ln N(\epsilon_n)}$

B-6-a) Montrer que

$$\sum_{n \geq 0} N(\delta_n)^2 \frac{e^{-\frac{a_n^2}{2}}}{a_n} \text{ et } \sum_{n \geq 1} \delta_{n-1} a_n$$

convergent.

B-6-b) Montrer qu'il existe une constante K', un ensemble $\mathcal{N}$ P-négligeable, tels que, pour tout $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}$, il existe un entier $n(\omega) \geq 0$ tel que, si $(f,g) \in C^2$ et $\|f-g\| \leq \epsilon_{n(\omega)}$, alors

$$|Y^*_{f-g}(\omega)| \leq K' \int_0^{\|f-g\|} \sqrt{\ln N(u)} du.$$

(On pourra discuter selon la valeur du $n \geq n(\omega)$ tel que $\epsilon_{n+1} \leq \|f-g\| \leq \epsilon_n$).

B-6-c) En déduire que pour tout $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}$, il existe une constante $M(\omega)$ telle que, pour tout couple $(f,g) \in C^2$

$$|Y^*_{f-g}(\omega)| \leq M(\omega) \int_0^{\|f-g\|} \sqrt{\ln N(u)} du.$$

Partie C

Soit $T = [0,1]$ et $X = (X_t, t \in T)$ un processus gaussien défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de covariance $R_X(s,t) = \min(s,t)$. Soit H_X le sous espace qu'il engendre dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et $\mathcal{H}_X$ l'espace auto-reproduisant associé, muni de la norme

$$\|f\|_X^2 = \langle f\,,\, f\rangle_X$$

(cf. question A-3).

C-1) Soit $C = \{R^s, s \in T\} \subset \mathcal{H}_X$ avec $R^s : t \mapsto R(s,t)$. Montrer que

$$\begin{aligned} L:\ & T \to C \\ & s \mapsto R^s \end{aligned}$$

est une bijection. Pour $(s,t) \in T^2$, on note $d(s,t) = \|R^s - R^t\|_X$ la distance induite sur T par cette bijection. Pour tout $\delta > 0$, on note $N_T(\delta)$ le plus petit nombre k, tel qu'il existe des éléments $s_1, \ldots, s_k$ de T tels que $\forall t \in T$, $\exists i \in \{1, \ldots, k\}$ avec $d(s_i, t) \le \delta$.

Calculer $N_T(\delta)$ et appliquer les résultats de la partie B pour montrer qu'il existe une modification X^* de X telle que, pour presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \to X_t^*(\omega)$ soit continue sur T muni de la distance d et que l'on a, pour une certaine constante $M(\omega)$ et tout $(s,t) \in T^2$

$$|X_s^*(\omega) - X_t^*(\omega)| \le M(\omega) \int_0^{d(s,t)} \sqrt{\ln N_T(u)}du\,.$$

C-2) En déduire que l'ensemble

$$\left\{ \frac{|X_s^*(\omega) - X_t^*(\omega)|}{\sqrt{-|t-s| \ln |t-s|}}, (s,t) \in [0,1]^2, s \neq t \right\}$$

est borné pour presque tout $\omega \in \Omega$.