

## MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

*Le problème comporte deux parties*

### PROBLÈME D'ANALYSE

On se donne une fonction  $f \in C^0 ]-1, 1[$  et une fonction  $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ , et on se propose dans le problème qui suit de démontrer par diverses méthodes l'existence de solutions à l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \begin{cases} -u''(x) = g(u(x)) + f(x), & \text{pour } x \in ]-1, 1[ \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Les parties I, II A, II B et II C sont indépendantes. Seule la partie II D utilise des résultats de II B et II C.

#### I. MÉTHODE DE MONOTONIE

1. Soit  $u \in C^2 ]-1, 1[ \cap C^0([-1, 1])$ , et soit  $k$  une constante réelle. On suppose que

$$\begin{cases} -u'' + k^2 u \geq 0 & \text{sur } ]-1, 1[ \\ u(-1) \geq 0 & \text{et } u(1) \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Montrer que  $u \geq 0$  sur  $] -1, 1[$ . Ce résultat est le principe du maximum. Que peut-on dire si  $u$  satisfait

$$\begin{cases} -u'' + k^2 u \leq 0 & \text{sur } ]-1, 1[ \\ u(-1) \leq 0 & \text{et } u(1) \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

au lieu de (1)?

2. Soit  $h \in C^0([-1, 1])$ . On considère l'équation :

$$\begin{cases} -u'' + k^2 u = h \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Montrer que la solution de (3), si elle existe, est unique.

3. Prouver l'existence, dans  $C^2 ]-1, 1[ \cap C^0([-1, 1])$ , d'une solution à (3). (On pourra considérer

$$v = \frac{1}{k} \int_0^x \operatorname{sh} k(s-x) y(s) ds \quad \text{où } \operatorname{sh}(z) \text{ désigne le sinus hyperbolique de } z.)$$

**Tournez la page S.V.P.**

4. On dit que  $\underline{u}$  (respectivement  $\bar{u}$ )  $\in C^2 ]-1, 1[ \cap C^0([-1, 1])$  est une sous-solution (respectivement une sur-solution) de  $(\mathcal{E})$  si et seulement si  $\underline{u}$  vérifie

$$\begin{cases} -\underline{u}'' \leq g(\underline{u}) + f(x) & \text{sur } ]-1, 1[ \\ \underline{u} \leq 0 & \text{sur } \{-1, 1\} \end{cases} \quad (4)$$

(respectivement

$$\begin{cases} -\bar{u}'' \geq g(\bar{u}) + f(x) & \text{sur } ]-1, 1[ \\ \bar{u} \leq 0 & \text{sur } \{-1, 1\} \end{cases} .) \quad (5)$$

Dans le cas où  $f = 0$ ,  $g(y) = \sin y$ , construire une sous-solution  $\underline{u}$  non nulle et une sur-solution  $\bar{u}$  non nulle de  $(\mathcal{E})$ , avec  $\underline{u} \leq \bar{u}$ .

5. On suppose qu'il existe une sous-solution  $\underline{u}$  et une sur-solution  $\bar{u}$  à  $(\mathcal{E})$ . On fait l'hypothèse que

$$\underline{u}(x) \leq \bar{u}(x) \quad \text{sur } ]-1, 1[ . \quad (6)$$

On va construire une solution de  $(\mathcal{E})$ . On choisit  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $\bar{g}(y) = g(y) + k^2 y$  soit une fonction croissante de  $y$  sur l'intervalle  $[\min(\underline{u}), \max(\bar{u})]$ . On considère la suite de fonctions  $(u_n)$  dans  $C^2 ]-1, 1[ \cap C^0([-1, 1])$  définie de la façon suivante :

- $u_0 = \underline{u}$ ;
- pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $u_{j+1}$  est une solution de

$$\begin{cases} -u_{j+1}'' + k^2 u_{j+1} = \bar{g}(u_j) + f(x) \\ u_{j+1}(-1) = u_{j+1}(1) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

a. Vérifier que la suite  $(u_n)$  existe et est unique.

b. Démontrer par récurrence que

$$\begin{cases} \forall j \in \mathbb{N}, \underline{u} \leq u_j \leq u_{j+1} \leq \bar{u} \\ \text{et } -u_j'' + k^2 u_j \leq \bar{g}(u_j) + f. \end{cases} \quad (8)$$

c. Montrer qu'il existe une fonction  $u$  sur  $]-1, 1[$  telle que sur tout compact  $K \subset ]-1, 1[$ ,  $u_j$  converge vers  $u$  dans la topologie  $C^2(K)$ .

Montrer que  $u$  est une solution de  $(\mathcal{E})$ .

(Indication : montrer d'abord la convergence simple, puis que  $u_j$ ,  $u_j''$  et  $u_j'$  sont bornés, puis la convergence uniforme, puis la convergence  $C^2(K)$ .)

## II. MÉTHODE VARIATIONNELLE

On note  $G(y) = \int_0^y g(t) dt$ . On définit l'espace  $\mathcal{L}^2 ]-1, 1[$  comme l'espace des fonctions  $\varphi$  mesurables de  $] - 1, 1[$  vers  $\mathbb{R}$  qui satisfont à

$$\int_{-1}^1 \varphi(x)^2 dx < + \infty .$$

On introduit sur  $\mathcal{L}^2 ]-1, 1[$  la relation d'équivalence :

$$\varphi \mathcal{R} \psi \Leftrightarrow \varphi = \psi \text{ p.p.}$$

L'espace quotient  $\frac{\mathcal{L}^2 ]-1, 1[}{\mathcal{R}}$  est noté  $L^2 ]-1, 1[$ .

On munit  $L^2 ]-1, 1[$  du produit scalaire :

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2} = \int_{-1}^1 \varphi(x) \psi(x) ds,$$

et de la norme  $\|\varphi\|_{L^2} = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle_{L^2}}$ .

On rappelle que  $C_c^\infty ]-1, 1[$  désigne l'ensemble des fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $] - 1, 1[$ .

Si  $\varphi \in L^2 ]-1, 1[$ , on dit que  $\varphi$  admet une dérivée au sens faible dans  $L^2 ]-1, 1[$  si

$$\exists \psi \in L^2 ]-1, 1[, \forall \alpha \in C_c^\infty ]-1, 1[,$$

$$\int_{-1}^1 [\alpha'(x) \varphi(x) + \alpha(x) \psi(x)] ds = 0 .$$

On rappelle qu'alors  $\psi$  est unique et on note  $\psi = \varphi'$ , la dérivée au sens faible de  $\varphi$ . On note :

$$H^1 ]-1, 1[ = \{ \varphi \in L^2 ]-1, 1[ / \varphi \text{ a une dérivée faible } \varphi' \text{ dans } L^2 ]-1, 1[ \} .$$

$H^1 ]-1, 1[$  est muni du produit scalaire :

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{H^1} = \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2} + \langle \varphi', \psi' \rangle_{L^2}$$

et de la norme  $\|\varphi\|_{H^1} = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle_{H^1}}$ .

On rappelle que  $(L^2 ]-1, 1[, \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$  et  $(H^1 ]-1, 1[, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1})$  sont des espaces de Hilbert.

**Tournez la page S.V.P.**

A

Dans cette partie, on montre deux résultats préliminaires qui seront utilisés dans les parties ultérieures. On considère les fonctions :

$$e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$e_{2k}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2\Pi^2}} \cos k\Pi x, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

$$e_{2k+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2\Pi^2}} \sin k\Pi x, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

On rappelle que l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies des vecteurs  $e_j$  est dense dans  $H^1 ]-1, 1[$ .

1. Vérifier que  $(e_j)$  est une base orthonormée de  $H^1$ .

Soit  $u \in H^1 ]-1, 1[$ . On note  $\alpha_j = \langle u, e_j \rangle$ . On rappelle que

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j e_j \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 = \|u\|_{H^1}^2.$$

2. Montrer le résultat suivant :

$C^1 ]-1, 1[$  est dense dans  $H^1 ]-1, 1[$ . C'est-à-dire  $\forall \varphi \in H^1 ]-1, 1[$ , il existe une suite  $(\varphi_n)$  dans  $C^1 ]-1, 1[$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\varphi - \varphi_n\|_{H^1} = 0$ .

3. Soit  $(\varphi_n)$  une suite dans  $H^1 ]-1, 1[$ . On suppose que  $(\|\varphi_n\|_{H^1})$  est une suite bornée de  $\mathbb{R}$ . Démontrer que l'on peut extraire une sous-suite  $n'$  de  $n$  telle que  $\forall j \in \mathbb{N}$ ,  $\langle e_j, \varphi_{n'} \rangle$  tend vers une limite  $a_j \in \mathbb{R}$ . Soit  $(\varphi_n)$  une suite dans  $H^1 ]-1, 1[$ , et soit  $\varphi \in H^1 ]-1, 1[$ . On dit que  $\varphi_n$  converge faiblement vers  $\varphi$  dans  $H^1$ , et on note  $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$  dans  $H^1$ , si

$$\forall \alpha \in H^1 ]-1, 1[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \varphi_n, \alpha \rangle_{H^1} = \langle \varphi, \alpha \rangle_{H^1}.$$

Démontrer que de toute suite  $(\varphi_n)$  bornée de  $H^1 ]-1, 1[$  (c'est-à-dire telle que  $\|\varphi_n\|_{H^1}$  est borné), on peut extraire une sous-suite  $\varphi_{n'}$  telle que

$$\varphi_{n'} \rightharpoonup \varphi \text{ dans } H^1.$$

### B. Minimisation

1. Pour tout  $x_0 \in ]-1, 1[$  on note  $\chi_{x_0}$  la fonction de  $]-1, 1[$  vers  $\mathbb{R}$  telle que

$$\forall x \in ]-1, x_0[, \chi_{x_0}(x) = [\text{th}(1+x_0) + \text{th}(1-x_0)]^{-1} \frac{\text{ch}(1+x)}{\text{ch}(1+x_0)}$$

$$\forall x \in ]x_0, 1[, \chi_{x_0}(x) = [\text{th}(1+x_0) + \text{th}(1-x_0)]^{-1} \frac{\text{ch}(1-x)}{\text{ch}(1-x_0)}$$

$$\chi_{-1}(x) = \frac{\text{ch}(1-x)}{\text{sh}2}; \quad \chi_1(x) = \frac{\text{ch}(1+x)}{\text{sh}2},$$

où  $\text{th}$  désigne la tangente hyperbolique et  $\text{ch}$  désigne le cosinus hyperbolique.

Démontrer que  $\chi_{x_0} \in H^1(]-1, 1[)$ , et calculer  $\|\chi_{x_0}\|_{H^1}$ .

2. Soit  $\varphi \in C^1([-1, 1])$ , montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], |\varphi(x)| \leq C(x) \|\varphi\|_{H^1}, \quad (9)$$

où

$$C(x) = [\text{th}(1+x) + \text{th}(1-x)]^{-\frac{1}{2}} \leq (\text{th}2)^{-\frac{1}{2}} = C_1.$$

3. Soit  $\varphi \in H^1(]-1, 1[)$ . D'après A.2., il existe une suite  $\varphi_n \in C^1([-1, 1])$ , telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{H^1} = 0$ .

Démontrer que  $\varphi_n$  converge uniformément vers une fonction continue sur  $[-1, 1]$ . En déduire que  $\varphi$  est continue sur  $[-1, 1]$  (c'est-à-dire que l'on peut choisir un représentant continu sur  $[-1, 1]$  pour  $\varphi$ ).

4. Démontrer que  $\forall u \in H^1(]-1, 1[)$ ,  $\forall x, y \in ]-1, 1[$ ,

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_{L^2} \sqrt{|x-y|}. \quad (10)$$

On note  $H_0^1(]-1, 1[) = \{\varphi \in H^1(]-1, 1[) / \varphi(-1) = \varphi(1) = 0\}$ .

Démontrer que  $\forall u \in H_0^1(]-1, 1[)$ ,

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|u'\|_{L^2},$$

où  $C$  est une constante que l'on précisera.

5. Soit  $(\varphi_n)$  une suite de  $H_0^1(]-1, 1[)$ . On suppose que  $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$   $H^1$  (voir A.3.).

Montrer que  $\forall x \in [-1, 1]$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ ; en déduire en particulier que  $\varphi \in H_0^1(]-1, 1[)$ , c'est-à-dire que  $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ .

**Tournez la page S.V.P.**

6. Soit  $(\varphi_n)$  une suite comme au 5. On suppose de plus qu'il existe  $M \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\|\varphi_n'\|_{L^2} \leq M$ .  
Montrer que  $\varphi_n$  converge uniformément vers  $\varphi$ .

7. On considère pour tout  $u \in H^1 ]-1, 1[$ ,

$$E(u) = \int_{-1}^1 \left[ \frac{(u'(x))^2}{2} - G(u(x)) - f(x)u(x) \right] dx.$$

Montrer que  $E$  est minoré sur  $H_0^1 ]-1, 1[$ . Soit  $(u_n)$  une suite minimisante de  $E$  dans  $H_0^1 ]-1, 1[$ , c'est-à-dire

$$\begin{cases} u_n \in H_0^1 ]-1, 1[ \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} E(u_n) = \inf_{\varphi \in H_0^1 ]-1, 1[} E(\varphi). \end{cases} \quad (12)$$

a. Montrer que  $\|u_n\|_{H^1}$  est bornée dans  $\mathbb{R}$ . En déduire, grâce au résultat énoncé au A.3., que l'on peut extraire une sous-suite  $(n')$  de  $n$  telle que

$$u_{n'} \rightharpoonup u \text{ en } H^1.$$

Pour alléger les notations, on posera dans la suite  $n' = n$ .

b. Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(u_n) = E(u)$ .

c. En déduire que  $u$  est solution au sens faible de  $(\mathcal{E})$ , c'est-à-dire  $\forall \alpha \in H_0^1 ]-1, 1[$

$$\int_{-1}^1 [u''(x) + g(u(x)) + f(x)] \alpha(x) dx = 0 \quad (13)$$

$$\text{(où l'on pose } \int_{-1}^1 u''(x) \alpha(x) dx = \int_{-1}^1 -u'(x) \alpha'(x) dx \text{.)}$$

### C. Un lemme géométrique

Soit  $p \in \mathbb{N}$ . On considère l'espace  $\mathbb{R}^p$  muni du produit scalaire  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^p x^i y^i$ . On se donne une fonction  $I$  dans  $C^2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ . On fait les hypothèses suivantes sur  $I$ :

- i.  $I(0) = 0$ ;
- ii.  $\exists y \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}, I(y) \leq 0$ ;
- iii.  $\exists r \in ]0, \infty[$ ,  $\exists \alpha > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^p$ , si  $\|x\| = r$  alors  $I(x) \geq \alpha$ ;
- iv. Si  $c \in \mathbb{R}$ , et si  $(x_n)$  est une suite de  $\mathbb{R}^p$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(x_n) = c$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I'(x_n) = 0$ , alors il existe une sous-suite  $(n')$  de  $(n)$ , et un point  $x$  de  $\mathbb{R}^p$ , tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n'} = x \in \mathbb{R}^p$ . (Ici  $I'(x)$  est le gradient de  $I$  au point  $x$ , c'est-à-dire le vecteur de  $\mathbb{R}^p$  dont les composantes sont  $\frac{\partial I}{\partial x^i}$ ,  $i \in \{1, \dots, p\}$ .)

L'objet de cette section est de prouver que sous les hypothèses i., ii., iii. et iv. il existe  $a \in \mathbb{R}^p$  tel que  $I'(a) = 0$ .

1. On note  $V = \{ \gamma \in C^0([0, 1], \mathbb{R}^p) / \gamma(0) = 0, \gamma(1) = y \}$ . Dédurre de i., ii. et iii. l'inégalité

$$c \equiv \inf_{\gamma \in V} \sup_{s \in [0,1]} I(\gamma(s)) \geq \alpha.$$

Faire un dessin illustrant cette propriété dans le cas  $p = 2$ .

2. Soit  $I \in C^2(\mathbb{R}^p)$  une fonction telle que  $\exists R > 0, \exists \lambda > 0, \forall x \in \mathbb{R}^p, \|x\| \geq R \Rightarrow \|I'(x)\| \geq \lambda$ .

Expliquer pourquoi dans ce cas-là  $I$  satisfait iv. Trouver un exemple de fonction  $I \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  pour lequel iv. n'est pas vrai.

3. On considère  $I$  vérifiant i., ii., iii. et iv. On suppose que  $\{x / I'(x) = 0, I(x) = c\} = \emptyset$ .

Démontrer,  $\exists \varepsilon > 0$  avec  $\varepsilon < \alpha, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}^p,$

$$I(x) \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon] \Rightarrow \frac{\|I'(x)\|}{1 + \|I'(x)\|^2} \geq \delta. \tag{14}$$

4. Soit  $\varepsilon$  comme au 3. et soit  $\chi$  une fonction de  $C^1(\mathbb{R}, [0, 1])$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [c - \varepsilon, c + \varepsilon], \chi(x) = 0,$$

$$\forall x \in \left[ c - \frac{\varepsilon}{2}, c + \frac{\varepsilon}{2} \right], \chi(x) = 1.$$

On considère le champ de vecteur  $X$  sur  $\mathbb{R}^p$  défini par

$$X(x) = -\chi[I(x)] \frac{I'(x)}{1 + \|I'(x)\|^2}.$$

On considère  $\eta : [0, 1] \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p, (t, x) \mapsto \eta(t, x)$

solution de 
$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t}(t, x) = X(\eta(t, x)) \\ \eta(0, x) = x. \end{cases}$$

Expliquer pourquoi  $\eta$  existe et est  $C^1$ . Démontrer que pour tout  $x$  fixé,  $t \mapsto I(\eta(t, x))$  est une fonction décroissante, et que l'on a

• si  $|I(x) - c| \geq \varepsilon, \forall t \in [0, 1], \eta(t, x) = x$ .

Démontrer qu'il existe  $\bar{\varepsilon} > 0$  tel que

• si  $I(x) \leq c + \bar{\varepsilon},$  alors  $I(\eta(1, x)) \leq c - \bar{\varepsilon}$ .

5. Démontrer qu'il existe  $\gamma \in V$  tel que

$$\max_{s \in [0,1]} I(\gamma(s)) \leq c + \bar{\varepsilon}.$$

Que peut-on dire sur  $s \mapsto \eta(1, \gamma(s))$ ? Conclure.

Tournez la page S.V.P.

**D. Application**

Dans cette partie,  $g$  n'est plus une fonction bornée, mais on suppose que  $f = 0$  et  $g(y) = |y|^{p-1} y$  où  $p \in ]1, +\infty[$ . On cherche  $u$ , solution faible de

$$\begin{cases} -u'' + |u|^{p-1} u = 0 & \text{sur } ]-1, 1[ \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Pour cela, on considère la fonctionnelle :

$$I(u) = \int_{-1}^1 \left( \frac{(u')^2}{2} + \frac{|u|^{p+1}}{p+1} \right) dx,$$

sur  $H_0^1(]-1, 1[)$ .

1. Démontrer que  $I$  est dans  $C^1(H^1(]-1, 1[), \mathbb{R})$ . Calculer  $I'(u)$ . Existe-t-il  $u \in H_0^1(]-1, 1[)$  qui minimise  $I$ ? On admettra dans la suite que  $I$  est dans  $C^2(H^1(]-1, 1[), \mathbb{R})$ .
2. On admet la généralisation suivante du résultat démontré dans la partie C. Si  $I$  est une fonctionnelle dans  $C^2(H_0^1(]-1, 1[), \mathbb{R})$  et si :

i.  $I(0) = 0$ ;

ii.  $\exists \varphi_0 \in H_0^1(]-1, 1[), I(\varphi_0) \leq 0$ ;

iii.  $\exists r \in ]0, \infty[$ ,  $\|\varphi_0\|_{H^1} = r$ ,  $\exists \alpha > 0$ ,  $\forall \varphi \in H_0^1(]-1, 1[), \text{ si } \|\varphi\|_{H^1} = r \text{ alors } I(\varphi) \geq \alpha$ ;

iv. Si  $c \in \mathbb{R}$  et si  $(\varphi_n)$  est une suite de  $H_0^1(]-1, 1[)$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(\varphi_n) = c$  et  $I'(\varphi_n) \rightarrow 0$  dans  $H^{-1}(]-1, 1[)$ , alors il existe une sous-suite  $(n')$  de  $(n)$  telle que  $\varphi_{n'} \rightharpoonup \varphi$  dans  $H^1(]-1, 1[)$ .

(On rappelle que  $H^{-1}(]-1, 1[)$  est le dual de  $H_0^1(]-1, 1[)$  et que cet espace est muni de la norme

$$\|\psi\|_{H^{-1}} = \sup \{ (\psi, \varphi) / \varphi \in H^1(]-1, 1[), \|\varphi\|_{H^1} \leq 1 \},$$

où  $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit de dualité entre  $H^{-1}$  et  $H^1$ .)

Alors il existe  $u \in H_0^1(]-1, 1[)$  tel que  $I'(u) = 0$ .

Démontrer que  $I$  vérifie i., ii. et iii.

3. On considère une suite  $(\varphi_n)$  dans  $H_0^1(]-1, 1[)$ . On suppose que  $\exists C > 0, |I(\varphi_n)| \geq C$  et que  $I'(\varphi_n) \rightarrow 0$  dans  $H^{-1}$ .

a. Montrer que  $\|\varphi_n\|_{H^1} \leq 2 \sqrt{C + \frac{1}{p+1} \int_{-1}^1 |\varphi_n|^{p+1} dx}$ .

b. Montrer que  $\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{-1}^1 |\varphi_n|^{p+1} dx \leq C + \frac{1}{2} \|I'(\varphi_n)\|_{H^{-1}} \|\varphi_n\|_{H^1}$ .

c. Montrer que  $\int_{-1}^1 |\varphi_n|^{p+1} dx$  et  $\|\varphi_n\|_{H^1}$  sont bornés.

d. Démontrer qu'il existe  $u \in H_0^1(]-1, 1[)$  et une sous-suite  $(n')$  de  $(n)$  telle que  $\varphi_{n'} \rightharpoonup u$  dans  $H^1$ . Montrer que  $u$  est un point critique de  $I$ , et que  $u \neq 0$ .