

## MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

*Le problème comporte trois parties ; la partie II s'appuie sur un résultat qui sera démontré dans la partie III*

### PARTIE I

*Notations.*

$\ell^2$  est l'espace de Hilbert des suites  $a = (a_n)_{n \geq 0}$  de complexes telles que  $\sum_0^\infty |a_n|^2 < \infty$  ; il est muni de sa norme hilbertienne usuelle :  $\|a\| = \left( \sum_0^\infty |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ .

$Z^+$  est l'ensemble des entiers  $\geq 1$  ; si  $A$  est une partie finie de  $Z^+$ ,  $|A|$  désigne le cardinal de  $A$ .

Si  $a, b \in \ell^2$ ,  $a * b = c$  (convolée des suites  $a$  et  $b$ ) est par définition la suite  $c = (c_n)_{n \geq 0}$  où :

$$c_n = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} a_i b_j.$$

Pour  $E \subset Z^+$  on pose :  $\lambda_N(E) = |E \cap [N, 2N]|$  ( $N \in Z^+$ ) et  $\lambda(E) = \sup_{N \in Z^+} [\lambda_N(E)] \leq +\infty$ .

$E$  est dit lacunaire si  $\lambda(E) < \infty$  (propriété arithmétique de  $E$ ).

$E$  est dit régulier si  $a, b \in \ell^2 \Rightarrow (a * b) 1_E \in \ell^2$  (propriété analytique de  $E$ ).

(Si  $a * b = c$ ,  $d = c 1_E$  est par définition la suite  $(d_n)$  avec  $d_n = c_n$  si  $n \in E$ , 0 sinon.)

1. Donner un exemple de  $a, b \in \ell^2$  telles que  $a * b \notin \ell^2$ .

(Indication : on pourra prendre  $a_n = b_n = (n+1)^{-\alpha}$  pour  $\alpha > 0$  convenable.)

2. On suppose  $E$  régulier et on fixe  $b \in \ell^2$ .

a. Montrer que  $L_b$ , définie par  $L_b(a) = (a * b) 1_E$ , est une application linéaire continue de  $\ell^2$  dans  $\ell^2$ .

(Indication : soit  $(a^i)$  une suite de  $\ell^2$  ; montrer que les deux hypothèses  $a^i \rightarrow a$  et  $L_b(a^i) \rightarrow a'$  (où  $a, a'$  sont des éléments donnés de  $\ell^2$ ) entraînant la conclusion  $a' = L_b(a)$ .)

b. Montrer que  $L_b(a) = L_a(b) \forall a, b \in \ell^2$  et en déduire que  $\sup_{\|b\| \leq 1} \|L_b(a)\| < \infty \forall a \in \ell^2$ .

c. En utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, montrer qu'il existe une constante  $M < \infty$  telle que :

$$\forall a, b \in \ell^2 \quad \|(a * b) 1_E\| \leq M \|a\| \|b\|.$$

La meilleure constante  $M$  possible sera notée  $M(E)$ .

3. Soit  $E$  un ensemble régulier ; montrer que  $E$  est lacunaire et que plus précisément :

$$\lambda(E) \leq 4 (M(E))^2.$$

(Indication : pour  $N \in Z^+$  fixé, considérer  $a, b$  définies par  $a = b$  ;  $a_n = 1$  si  $0 \leq n \leq 2N$ ,  $a_n = 0$  sinon.)

**Tournez la page S.V.P.**

4. Soit  $E$  un ensemble lacunaire,  $a$  et  $b \in \ell^2$  avec  $\|a\| = \|b\| = 1$ ,  $c = a * b$ .

a. Montrer que  $c_n = \sum_{\substack{q < i \leq n}} a_i b_{n-i} + \sum_{\substack{q \leq i < n}} b_i a_{n-i}$ .

b. Montrer que  $|c_n|^2 \leq 2 \left[ \sum_{\substack{q < i \leq n}} |a_i|^2 + \sum_{\substack{q \leq i < n}} |b_i|^2 \right]$ .

c. Montrer que  $E$  est régulier et que plus précisément  $M(E) \leq C \sqrt{\lambda(E)}$  où  $C$  est une constante numérique dont on indiquera une valeur possible.

Ainsi,  $E$  régulier  $\Leftrightarrow E$  lacunaire.

5. Un ensemble  $F = \{\lambda_j\}_{j \geq 1} \subset \mathbb{Z}^+$ , avec  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_j < \lambda_{j+1} \dots$  est dit un ensemble de Hadamard si  $\lambda_{j+1} \geq 2\lambda_j \quad \forall j \geq 1$ . Pour  $E \subset \mathbb{Z}^+$ , montrer l'équivalence des propriétés :

- i.  $E$  est lacunaire ;
- ii.  $E$  est réunion finie d'ensembles de Hadamard.

6. Soit  $E = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$  l'ensemble des termes de la suite de Fibonacci définie par  $u_0 = u_1 = 1$ ,  $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$  si  $n \geq 1$ . Montrer que  $E$  est lacunaire et calculer  $\lambda(E)$ .

## PARTIE II

*Notations :*  $L^1$  est l'ensemble des classes de fonctions complexes localement intégrables  $2\pi$ -périodiques, muni de la norme :

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt.$$

Pour  $f \in L^1$  et  $n \in \mathbb{Z}$  on pose  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ .

On définit de façon analogue  $L^2$ , muni de la norme :  $\|f\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ .

On définit aussi pour  $j = 1, 2$  :  $H^j = \{f \in L^j; \hat{f}(n) = 0 \quad \forall n < 0\}$ .

On admet dans cette partie le résultat fondamental suivant :

(\*)  $\forall f \in H^1, \exists g$  et  $h \in H^2$  telles que  $f = gh$  et  $\|f\|_1 = \|g\|_2 \|h\|_2$ .

1. Montrer que  $\forall g \in H^2, \exists G \in H^2$  telle que :

- a.  $\hat{G}(n) = |\hat{g}(n)| \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ ;
- b.  $\|G\|_2 = \|g\|_2$ .

2. Soit  $f \in H^1$ ; montrer qu'il existe  $F \in H^1$  telle que :

- a.  $|\hat{f}(n)| \leq \hat{F}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ ;
- b.  $\|F\|_1 \leq \|f\|_1$ .

[Indication : utiliser (\*).]

3. Soit  $a$  l'élément de  $L^1$  défini par  $a(t) = i(\pi - t)$  si  $0 \leq t < 2\pi$ .

Montrer que  $n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \hat{a}(n) = \frac{1}{n}$ .

4. Soient  $f, F$  comme dans la question 2.

a. Montrer que  $\sum_1^{\infty} \frac{\hat{F}(n)}{n} \leq \pi \|F\|_1$ .

b. Montrer que  $\sum_1^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|}{n} \leq \pi \|f\|_1$ .

5. Soit  $E \subset \mathbb{Z}^+$  un ensemble lacunaire et soit  $f \in H^1$ . Montrer que  $\left( \sum_{n \in E} |\hat{f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \sqrt{\lambda(E)} \|f\|_1$ , où  $C$  est comme dans I.4.c.

6. On rappelle les propriétés du noyau de Féjer  $k_N$  ( $N \in \mathbb{Z}^+$ ):

$$k_N(t) = \sum_{j=-N}^N \left(1 - \frac{|j|}{N}\right) e^{ijt} \quad \text{et} \quad k_N(t) \geq 0 \quad \forall t.$$

À l'aide de  $E = \{2^j\}_{j \geq 0}$  et de  $f = k_N$ , montrer que l'inégalité de la question 5 n'est pas valable en général pour les fonctions de  $L^1$ .

### PARTIE III

On se propose de démontrer le résultat (\*) de la partie II.

*Notations.*

$w$  est une fonction positive de  $L^1$ .

$L^2(w)$  est l'espace de Hilbert des fonctions complexes  $f$  telles que  $|f|^2 w \in L^1$ , muni de la norme :

$$\|f\|_{L^2(w)} = \left( \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 w(t) \frac{dt}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $e_n$  est la fonction définie par  $e_n(x) = e^{inx}$ .

$V$  est l'espace vectoriel engendré par les  $(e_n)_{n>0}$ .  $\bar{V}$  est l'adhérence de  $V$  dans  $L^2(w)$ .

$W$  est l'espace vectoriel engendré par les  $(e_n)_{n \neq 0}$ .

$$W_r = \{R \in W; R = \bar{R}\}.$$

1. a. Montrer que  $f \in \bar{V}$  et  $n > 0$  entraînent :  $e_n f \in \bar{V}$ .

b. Montrer que  $R \in W_r \Leftrightarrow R = P + \bar{P}$  avec  $P \in V$ .

2. a. Montrer qu'il existe un unique  $\varphi \in \bar{V}$  tel que :

$$\|1 + \varphi\|_{L^2(w)} = \inf_{P \in V} \|1 + P\|_{L^2(w)}.$$

b. Si  $\phi = 1 + \varphi$ , montrer les deux égalités suivantes :

$$(**) \int_0^{2\pi} (\bar{\phi} e_n w)(t) \frac{dt}{2\pi} = 0 \quad \text{si} \quad n > 0.$$

$$(***) \int_0^{2\pi} (|\phi|^2 e_n)(t) \frac{dt}{2\pi} = 0 \quad \text{si} \quad n > 0.$$

c. En déduire qu'il existe  $c \geq 0$  tel que  $(|\phi|^2 w)(t) = c^2 dt$  presque partout.

**Tournez la page S.V.P.**

3. a. On suppose que la constante  $c$  de la question précédente est  $> 0$  et on pose  $h = \frac{1}{\phi}$ ; montrer que  $h \in H^2$ . [Indication : utiliser (\*\*).]

b. Montrer que  $P \in V \Rightarrow c^2 \hat{h}(0) = \int_0^{2\pi} [(1 + P) \bar{\phi} w](t) \frac{dt}{2\pi}$  puis que  $\hat{h}(0) = 1$ .

Dans la suite de III, on aura besoin de la notation suivante :

$$\|u\|_0 = \exp \left[ \int_0^{2\pi} \text{Ln} (|u(t)|) \frac{dt}{2\pi} \right] \quad (\text{où } u \in L^1 \text{ et } \text{Ln} \text{ est le logarithme népérien}).$$

(On a  $0 \leq \|u\|_0 < \infty$ ).

4. a. Montrer que  $\|u\|_0 \leq \|u\|_1 \quad \forall u \in L^1$ .

b. Montrer que si  $u, v, uv$  sont dans  $L^1$  :  $\|uv\|_0 = \|u\|_0 \|v\|_0$ .

c. Soit  $R \in W_r$ ; montrer que  $\|w\|_0 \leq \int_0^{2\pi} e^{R(t)} w(t) \frac{dt}{2\pi}$ .

d. On suppose  $\text{Ln } w \in L^1$  et  $\int_0^{2\pi} (\text{Ln } w)(t) dt = 0$ ; montrer qu'il existe une suite  $g_n$  de fonctions réelles, bornées et d'intégrale nulle sur  $[0, 2\pi]$  par rapport à  $dt$ , telles que  $\int_0^{2\pi} e^{g_n(t)} w(t) \frac{dt}{2\pi} \rightarrow 1$ .

e. Pour  $n$  fixé, on pose  $R_n = k_n * g_n$ ; montrer que  $R_n \in W_r$  et que :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} e^{P_{N_j}(t)} w(t) \frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} e^{g_n(t)} w(t) \frac{dt}{2\pi}$$

où  $(N_j)$  est une sous-suite convenable de la suite des entiers  $\geq 1$ .

f. Montrer qu'on a toujours (c'est-à-dire même si  $\text{Ln } w \notin L^1$ ) :

$$\|w\|_0 = \inf_{R \in W_r} \int_0^{2\pi} e^{R(t)} w(t) \frac{dt}{2\pi}.$$

5. a. Montrer que  $\|w\|_0 = \inf_{P \in V} \left[ \int_0^{2\pi} (|e^P|^2 w)(t) \frac{dt}{2\pi} \right]$ .

b. Montrer que si  $P \in V$ , il existe une suite  $(Q_n)_{n \geq 1}$  de  $V$  avec  $1 + Q_n \rightarrow e^P$  uniformément sur  $[0, 2\pi]$  et en déduire que :

$$\|w\|_0 \geq \inf_{Q \in V} \int_0^{2\pi} (|1 + Q|^2 w)(t) \frac{dt}{2\pi}$$

puis que  $\| |1 + P|^2 \|_0 \geq 1 \quad \forall P \in V$ .

c. Montrer que  $\|w\|_0 = \inf_{Q \in V} \int_0^{2\pi} (|1 + Q|^2 w)(t) \frac{dt}{2\pi}$ .

6. Soit  $f \in H^1$ .

a. Montrer que  $Q \in V \Rightarrow |\hat{f}(0)|^2 \leq \int_0^{2\pi} (|1 + Q|^2 |f|^2)(t) \frac{dt}{2\pi}$ .

b. Montrer que  $|\hat{f}(0)| \leq \|f\|_0$ .

c. Montrer que  $f \neq 0 \Rightarrow \|f\|_0 > 0$ .

7. Soit  $f \in H^1, f \neq 0$  et soit  $w = |f|$ .

a. Montrer que la constante  $c$  de la question III.3.a. est  $> 0$ . Avec les notations de cette question, on pose :

$$\alpha = ch \quad \text{et} \quad \beta = \frac{f}{\alpha}.$$

b. Montrer qu'il existe une suite  $Q_n$  de  $V$  telle que  $\int_0^{2\pi} (|\phi f - (1 + Q_n)f|)(t) \frac{dt}{2\pi} \rightarrow 0$  et en déduire que  $\phi f \in H^1$ .

c. Conclure :  $f = \alpha\beta$ ;  $\alpha$  et  $\beta$  sont dans  $H^2$ ; et  $\|\alpha\|_2 \|\beta\|_2 = \|f\|_1$ .