

ÉPREUVE A

L'épreuve est constituée d'un problème comportant quatre parties. Chaque partie peut être traitée indépendamment à condition d'admettre les résultats des parties précédentes. Le préambule comprend un certain nombre de résultats qui sont à admettre sans démonstration.

Les candidats porteront le numéro de chaque question traitée sans recopier le texte de la question. La rigueur sera un élément important pour l'évaluation des démonstrations.

Préambule. — On rappelle qu'un espace de Hilbert H est un espace vectoriel sur \mathbf{R} muni d'un produit scalaire, noté (\cdot, \cdot) , qui est *complet* pour la norme associée à ce produit scalaire. On note $|x| = (x, x)^{1/2}$.

On désigne par $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des applications linéaires et continues de H dans H et on note par $\|\cdot\|_H$ la norme sur $\mathcal{L}(H)$:

$$\|L\|_H = \text{Sup} \{ |Lx|, |x| = 1, x \in H \}.$$

On admettra (sans démonstration) que la boule unité fermée :

$$\bar{B}(0, 1) = \{ x \in H, |x| \leq 1 \}$$

est un compact de H si et seulement si H est de dimension finie.

On désigne par $\mathcal{L}^c(H)$ le sous-espace de $\mathcal{L}(H)$ formé par les applications *compactes*, c'est-à-dire que $L(\bar{B}(0, 1))$ est d'adhérence compacte dans H pour $L \in \mathcal{L}^c(H)$.

On désigne par $\mathcal{L}^o(H)$ le sous-espace de $\mathcal{L}(H)$ formé par les applications de rang fini, c'est-à-dire que $L \in \mathcal{L}^o(H)$ lorsque $L(H)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Dans ce problème, on ne considère que des espaces de Hilbert *séparables*, c'est-à-dire qu'il existe une partie *dénombrable* qui est dense dans H . On admettra alors qu'un sous-ensemble A de H est l'adhérence compacte dans H si et seulement si l'une des deux propriétés (K1) ou (K2) ci-dessous est vérifiée.

(K1) De toute suite de points de A , il est possible d'extraire une sous-suite convergente dans H .

(K2) Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, A peut être recouvert par un nombre fini de boules fermées de rayon ε .

C'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0, \exists (x_1, \dots, x_N) \in H^N, A \subset \bigcup_{i=1}^N \bar{B}(x_i, \varepsilon)$.

I. Opérateurs compacts

I.1. Montrer que $\mathcal{L}^o(H) \subset \mathcal{L}^c(H)$.

I.2. Montrer que, si H est de dimension finie, $\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}^o(H) = \mathcal{L}^c(H)$.

I.3. Montrer que, si $L \in \mathcal{L}^c(H)$ et $M \in \mathcal{L}(H)$, alors $M \circ L$ et $L \circ M$ appartiennent à $\mathcal{L}^c(H)$.

I.4. Montrer que $\mathcal{L}^c(H)$ est fermé dans $\mathcal{L}(H)$, c'est-à-dire que, si $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{L}^c(H)$ qui converge vers L dans $\mathcal{L}(H)$, alors $L \in \mathcal{L}^c(H)$ [on pourra utiliser (K2) pour montrer que $L(\bar{B}(0, 1))$ est d'adhérence compacte dans H].

Tournez la page S.V.P.

I.5. On désire montrer que $\mathcal{L}^\circ(H)$ est dense dans $\mathcal{L}^C(H)$. À cet effet, on se donne $L \in \mathcal{L}^C(H)$ et $\epsilon > 0$.

a. Montrer qu'il existe une suite finie y_1, \dots, y_N d'éléments de H telle que :

$$\forall x \in \bar{B}(0, 1), \exists i \in \{1, \dots, N\} \text{ tel que } |Lx - y_i| \leq \epsilon.$$

b. Soit V l'espace vectoriel engendré par les $\{y_i\}_{1 \leq i \leq N}$. On note par P la projection orthogonale dans H sur V , c'est-à-dire que, pour tout $z \in H$, $Pz \in V$ et

$$\forall y \in V, |z - Pz| \leq |z - y|.$$

Montrer que $N = P \circ L$ vérifie $\|L - N\|_H \leq \epsilon$.

c. Conclure que $\mathcal{L}^\circ(H)$ est dense dans $\mathcal{L}^C(H)$.

I.6. On rappelle que l'adjoint de $L \in \mathcal{L}(H)$, noté tL , est l'élément de $\mathcal{L}(H)$ qui vérifie :

$$\forall x \in H, \forall y \in H, ({}^tLx, y) = (x, Ly);$$

et que l'application de $\mathcal{L}(H)$ dans $\mathcal{L}(H)$ qui fait correspondre à L son adjoint tL est linéaire et conserve la norme $\|{}^tL\|_H = \|L\|_H$.

Montrer que si $L \in \mathcal{L}^C(H)$ alors ${}^tL \in \mathcal{L}^C(H)$.

II. Opérateurs de Hilbert-Schmidt

On rappelle que tout espace de Hilbert séparable possède des bases hilbertiennes et qu'une base hilbertienne est une famille dénombrable $(e_i)_{i \in I}$ (l'ensemble I est dénombrable) qui vérifie :

$$(i) \quad (e_p, e_q) = \delta_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{si } p \neq q, \end{cases}$$

(ii) l'espace vectoriel engendré par les (e_i) est dense dans H .

On dit que $L \in \mathcal{L}(H)$ est de Hilbert-Schmidt, et on note $L \in HS(H)$, s'il existe une base hilbertienne $(e_i)_{i \in I}$ de H telle que la série de terme général $(|Le_i|^2)_{i \in I}$ est convergente dans \mathbb{R} :

$$\sum_{i \in I} |Le_i|^2 < \infty.$$

On note alors :

$$\|L\|_{HS} = \left(\sum_{i \in I} |Le_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On pourra toujours considérer que $I = \mathbb{N}$ et que H est de *dimension infinie dans ce qui suit*.

II.1. Montrer que l'espace $HS(H)$ et l'application $\|\cdot\|_{HS}$ sont indépendants de la base hilbertienne choisie.

II.2. Montrer que $HS(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(H)$ et que $\|\cdot\|_{HS}$ y définit une norme.

II.3. Montrer que, pour tout $L \in HS(H)$, $\|L\|_H \leq \|L\|_{HS}$.

II.4. Montrer que, si $L \in HS(H)$ et $M \in \mathcal{L}(H)$, alors $L \circ M$ et $M \circ L$ appartiennent à $HS(H)$ et

$$\|L \circ M\|_{HS} \leq \|L\|_{HS} \|M\|_H, \quad \|M \circ L\|_{HS} \leq \|L\|_{HS} \|M\|_H.$$

II.5. Montrer que, si $L \in HS(H)$ et $I + L$ est inversible, alors $(I + L)^{-1} - I \in HS(H)$. On a désigné par I l'application identique de H dans H .

- II.6. a. Montrer que $\mathcal{L}^0(H) \subset HS(H)$.
 b. Montrer que tout opérateur de Hilbert-Schmidt est limite, pour la norme $\|\cdot\|_{HS}$ d'opérateurs de rang fini.
 c. Montrer que $HS(H) \subset \mathcal{L}^C(H)$.

III. Théorie spectrale des opérateurs symétriques et compacts

III.1. Montrer que, si F est un sous-espace vectoriel invariant par L , alors F^\perp est invariant par L .

III.2. Montrer que si $L = L^*$ alors :

$$\|L\|_H = \sup \{ |(Lx, x)|, x \in H, |x| = 1 \},$$

on pourra écrire, pour $x \in H$ et $\lambda > 0$, l'identité :

$$4(L^2x, x) = 4|Lx|^2 = \left(L \left(\lambda x + \frac{1}{\lambda} Lx \right), \lambda x + \frac{1}{\lambda} Lx \right) - \left(L \left(\lambda x - \frac{1}{\lambda} Lx \right), \lambda x - \frac{1}{\lambda} Lx \right)$$

et majorer le membre de droite en utilisant :

$$S = \sup \{ |(Lx, x)| / |x|^2, x \in H, x \neq 0 \};$$

puis choisir $\lambda = |Lx| / |x|$.

III.3. On désire montrer que, si $L = L^*$ et $L \in \mathcal{L}^C(H)$, alors $\|L\|_H$ ou $-\|L\|_H$ est valeur propre de L .

a. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\bar{B}(0, 1)$ telle que $|(Lx_n, x_n)|$ converge vers $\|L\|_H$.

Construire une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\bar{B}(0, 1)$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Ly_n, y_n) = \ell \in \{ \|L\|_H, -\|L\|_H \},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ly_n = z.$$

b. Développer $|Ly_n - \ell y_n|^2$, puis montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Ly_n - \ell y_n) = 0.$$

c. En déduire que $\|L\|_H$ ou $-\|L\|_H$ est valeur propre de L .

d. Montrer que, si (λ, w) est un couple valeur propre-vecteur propre de L , alors $|\lambda| \leq \|L\|_H$.
 En déduire que la valeur propre de L de plus grand module (notée λ_0) vérifie $|\lambda_0| = \|L\|_H$.

III.4. On suppose toujours que $L = L^*$ et que $L \in \mathcal{L}^C(H)$. L'objet de cette question est de construire une suite de couples (λ_n, w_n) , $n \in \mathbb{N}$, tels que les propriétés (1) à (4) ci-dessous soient remplies :

(1) $|\lambda_n| \leq |\lambda_{n-1}| \leq \dots \leq |\lambda_0|,$

(2) $Lw_i = \lambda_i w_i, \quad w_i \neq 0,$

(3) $(w_i, w_j) = \delta_{ij},$

(4) soit $H_n = \{x \in H \text{ tel que } (x, w_i) = 0 \text{ pour } i = 0, \dots, n\}$, alors, $\forall x \in H_n,$
 $|Lx| \leq |\lambda_{n+1}| |x|.$

a. Montrer que w_0 peut être construit et que H_0 est invariant par L .

b. Montrer que la restriction de L à H_0 , notée L_0 , vérifie dans H_0 : $L_0 = L_0^*$ et $L_0 \in \mathcal{L}^C(H_0)$.
 En déduire la construction de (λ_1, w_1) .

c. Montrer que la construction de la suite (λ_n, w_n) vérifiant (1) à (4) est possible.

d. Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini (remarquer que si $\lambda_n \neq 0$,

$$w_n = L \frac{w_n}{\lambda_n} \text{ ne peut contenir de sous-suite convergente.}$$

Tournez la page S.V.P.

III.5. Soit $L \in \mathcal{L}^C(H)$ avec $L = L$ et (λ_n, w_n) la suite précédemment construite. Pour $x \in H$, on note :

$$x_n = x - \sum_{i=0}^n (x, w_i) w_i.$$

a. Montrer que $|Lx_n| \leq |\lambda_{n+1}| |x_n|$.

b. Montrer que la suite $\left(\sum_{i=0}^n (Lx, w_i) w_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans H vers Lx (on pourra remarquer que :

$$|x_n|^2 = |x|^2 - \sum_{i=0}^n |(x, w_i)|^2 \leq |x|^2).$$

c. En déduire que $Lx = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i (x, w_i) w_i$.

III.6. Montrer que toute valeur propre non nulle d'un opérateur compact est de multiplicité finie, c'est-à-dire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, le noyau de $L - \lambda I$ est de dimension finie.

IV. Un opérateur intégral

Dans cette partie, on particularise l'analyse précédente en se plaçant dans $H = L^2(0, 2\pi)$, que l'on munit du produit scalaire et de la norme usuels :

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt, \quad |f| = \left(\int_0^{2\pi} f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

IV.1. On note f_n , pour $n \in \mathbb{N}$, l'élément de H défini comme suit : pour $x \in [0, 2\pi]$ et $p \in \mathbb{N}^*$:

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

$$f_{2p}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin px, \quad f_{2p+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos px.$$

Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(0, 2\pi)$.

IV.2. Montrer que $(f_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ avec :

$$f_{n,m}(x, y) = f_n(x) f_m(y), \quad (x, y) \in [0, 2\pi]^2$$

forme une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi[\times]0, 2\pi[)$.

IV.3. Soit $k \in L^2([0, 2\pi[\times]0, 2\pi[)$. On note :

$$\|k\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} k^2(x, y) dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

a. Montrer que $h : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$h(x) = \left(\int_0^{2\pi} k^2(x, y) dy \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in [0, 2\pi],$$

appartient à $L^2(0, 2\pi)$ et que $|h|^2 = \|k\|_2^2$.

b. À toute fonction $f \in L^2(0, 2\pi)$, on associe la fonction $Kf : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$(Kf)(y) = \int_0^{2\pi} k(x, y) f(x) dx.$$

Montrer que $|Kf| \leq \|k\|_2 |f|$. En déduire (brièvement) que $K \in \mathcal{L}(H)$.

IV.4. On écrit $k(x, y) = \sum_{(n, m) \in \mathbb{N}^2} k_{n, m} f_{n, m}(x, y)$.

Montrer que :

$$\|k\|_2^2 = \sum_{(n, m) \in \mathbb{N}^2} k_{n, m}^2.$$

IV.5. a. Calculer $|Kf_n|$ en fonction des $(k_{n, m})_{m \in \mathbb{N}}$.

b. En déduire que K est de Hilbert-Schmidt et calculer $\|K\|_{HS}$ en fonction de $\|k\|_2$.

IV.6. On suppose dans la suite du problème que $k(x, y) = k(y, x)$ pour presque tout $(x, y) \in]0, 2\pi]^2$.

Montrer que ${}^tK = K$ et en déduire l'existence d'une suite (λ_n, w_n) vérifiant les points (1) à (4) de la question III.4.

IV.7. Montrer que le développement de la question III.5.c. s'écrit ici :

$$(Kf)(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \left(\int_0^{2\pi} f(x) w_i(x) dx \right) w_i(y)$$

(préciser dans quel sens).

IV.8. On suppose dorénavant que la fonction k est continue sur $[0, 2\pi]^2$. Montrer, que pour $\lambda_i \neq 0$, la fonction w_i est continue.

IV.9. a. On suppose désormais que $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n \geq 0$. On note alors pour $n \in \mathbb{N}$:

$$k_n(x, y) = k(x, y) - \sum_{i=0}^n \lambda_i w_i(x) w_i(y).$$

Montrer que k_n est continue et que, pour toute fonction :

$$f \in L^2(0, 2\pi), \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(x, y) f(y) f(x) dx dy \geq 0.$$

b. En déduire que $k_n(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$.

IV.10. Montrer que, pour tout $x \in [0, 2\pi]$, la série à termes positifs $(\sum \lambda_i w_i^2(x))$ est convergente et que :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i w_i^2(x) \leq k(x, x).$$

IV.11. Soit M le maximum de $k(x, x)$. Montrer que pour tout $(x, y) \in [0, 2\pi]^2$,

$$\left| \sum_{i=m}^{\infty} \lambda_i w_i(x) w_i(y) \right|^2 \leq M \sum_{i=m}^{\infty} \lambda_i w_i^2(x).$$

En déduire que, pour tout x fixé, la série de fonctions $(\sum \lambda_i w_i(x) w_i)$ converge uniformément vers la fonction $\ell(x, \cdot)$ sur $[0, 2\pi]$ où pour $y \in [0, 2\pi]$:

$$\ell(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i w_i(x) w_i(y).$$

Tournez la page S.V.P.

IV.12. a. Montrer que, pour toute fonction continue f de $[0, 2\pi]$ dans \mathbb{R} , on a :

$$\int_0^{2\pi} \ell(x, y) f(y) dy = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i w_i(x) \int_0^{2\pi} f(y) w_i(y) dy.$$

b. En déduire que, pour toute fonction f , continue sur $[0, 2\pi]$, et pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$\int_0^{2\pi} (\ell(x, y) - k(x, y)) f(y) dy = 0.$$

c. Montrer que $\ell(x, y) = k(x, y)$ et en déduire que $\ell(x, x) = k(x, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i w_i^2(x)$.

d. Montrer que la série de fonctions $(\sum \lambda_i w_i^2)$ converge *uniformément* sur $[0, 2\pi]$ vers la fonction $x \mapsto \ell(x, x)$.

IV.13. En utilisant l'inégalité :

$$\left| \sum_{i=m}^{\infty} \lambda_i w_i(x) w_i(y) \right|^2 \leq \sum_{i=m}^{\infty} \lambda_i w_i^2(x) \sum_{i=m}^{\infty} \lambda_i w_i^2(y),$$

montrer que le développement de la question IV.7. est valable, au sens de la convergence uniforme sur $[0, 2\pi]$.