

d'admission à l'école normale supérieure de Cachan est fixé conformément à l'annexe ci-jointe.

Art. 2. — Le directeur des Enseignements supérieurs est chargé de l'exécution du présent arrêté qui sera publié au *Journal officiel* de la République française et entrera en vigueur à compter de la session de 1990 des concours.

Pour le ministre et par délégation :

Le directeur des Enseignements supérieurs,

F. MÉTRAS

(10 du 13 mars 1990)

ANNEXE

Concours A1 donnant accès au département de mathématiques

Mathématiques

Programme d'analyse, probabilités et informatique

I - *Notions élémentaires de topologie générale, fonctions d'une ou plusieurs variables réelles*

1) Espaces topologiques, espaces séparés, espaces compacts, espaces localement compacts, espaces connexes, composantes connexes. Topologie de \mathbb{R} .

Limites, Applications continues, homéomorphismes, Applications continues définies sur un espace compact, Produit d'espaces topologiques en nombre fini.

Espaces métriques, suites, Applications uniformément continues, Suites de Cauchy, espaces complets, compacité d'un espace métrique. Théorème du point fixe. Norme de la convergence uniforme. Espace vectoriel normé, espace de Banach, espace dual.

Norme d'une application linéaire continue. Espace de Hilbert, Familles orthogonales, Bases hilbertiennes, Équité de Bessel-Parseval, Projection orthogonale. Meilleure approximation dans un espace de Hilbert.

2) Continuité des fonctions d'une ou plusieurs variables à valeurs dans \mathbb{R}^n . Propriétés des fonctions continues sur un compact, sur un connexe. Homéomorphismes d'un intervalle de \mathbb{R} . Fonctions réciproques. Fonctions monotones.

3) Fonctions convexes d'une variable. Inégalités de convexité.

II - *Calcul différentiel*

1) Fonctions réelles d'une variable réelle : dérivée en un point, dérivée à gauche, à droite.

Dérivées d'ordre supérieur, dérivée n-ième du produit de deux fonctions.

Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis.

Formules de Taylor : différentes formes du reste (reste de Lagrange, reste de Young, reste sous forme intégrale).

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Développements limités, développements asymptotiques.

2) Fonctions vectorielles d'une variable réelle : dérivée. Théorème des accroissements finis : formules de Taylor.

3) Différentielle d'une application d'un espace de Banach dans un autre. Théorème des fonctions composées : exemple des applications multilinéaires.

Applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p : dérivées partielles ; matrice jacobienne. Application au problème du changement de variables. Classe \mathcal{C}^1 des fonctions continûment différentiables sur un ouvert : sa caractérisation en termes de dérivées partielles.

4) Classe \mathcal{C}^k des applications k fois continûment différentiables sur un ouvert. Dérivées partielles d'ordre supérieur ; intervention de l'ordre des dérivations. Formules des accroissements finis, formules de Taylor.

5) Fonctions implicites, existence, continuité, différentiation. Théorème d'inversion locale.

6) Fonctions de plusieurs variables réelles à valeurs dans \mathbb{R} . Extremum local.

III - *Calcul intégral*

1) Tribus, mesures positives, mesure de Lebesgue, applications mesurables, intégrables.

2) Théorèmes de convergence intégrales dépendant d'un paramètre.

3) Mesure produit, théorème de Fubini.

4) Espaces L^p .

5) Changement de variables dans \mathbb{R}^n .

6) Exemples de méthodes de calcul approché d'une intégrale définie. Méthode des rectangles, des trapèzes, de Simpson.

IV - *Séries*

1) Séries à termes réels ou complexes : convergence, somme.

Cas des séries à termes réels positifs : comparaison de deux séries, comparaison d'une série et d'une intégrale.

Convergence absolue. Produit de deux séries absolument convergentes. Convergence commutative. Série double, produit infini.

Séries vectorielles (dans un espace de Banach). Convergence normale. Calcul approché de la somme d'une série.

2) Suites et séries de fonctions numériques : convergence simple ; convergence uniforme ; convergence normale d'une série ; application à l'étude de la continuité, de la dérivabilité, de l'intégrabilité d'une fonction définie par une suite ou une série.

3) Séries entières. Rayon de convergence. Somme et produit de deux séries entières. Convergence uniforme, continuité.

4) Série de Taylor, développement de fonction en série entière.

5) Développement en série entière des fonctions usuelles. Fonction exponentielle complexe.

6) Séries de Fourier. Coefficients et série de Fourier d'une fonction. Théorème de Dirichlet. Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Théorie L^2 des séries de Fourier.

V - *Équations différentielles*

1) Théorèmes fondamentaux (existence de solutions, unicité, prolongement, dépendance des conditions initiales et des paramètres).

2) Équations linéaires. Cas des coefficients constants.

3) Traitement numérique des équations différentielles. Méthodes à un pas (Euler, Runge-Kutta).

VI - *Transformation de Fourier*

Convolution, transformation de Fourier sur S, L^1 et L^2 . Inversion de la transformation de Fourier.

VII - *Fonctions d'une variable complexe*

1) Fonctions holomorphes, développement en série entière du maximum.

2) Inégalités de Cauchy, théorème de Liouville, principe du maximum.

3) Intégrales curvilignes, formule de Cauchy.

4) Séries de Taylor et de Laurent. Points singuliers isolés.

5) Théorème des résidus.

Programme des concours d'admission en troisième année à l'école normale supérieure de Cachan

NON : MEN29000550A

RLR : 441-0d

Arrêté du 7 mars 1990

(Éducation nationale, Jeunesse et Sports : bureau DESUP 4)

Vu D. n° 85-789 du 24-7-1985 ; D. n° 87-506 du 8-7-1987 ; D. n° 87-698 du 26-8-1987 ; A. 7-3-1990.

Article premier. — Le programme des concours

1) Variables aléatoires. loi, indépendance. Espérance, moments.

2) Fonction caractéristique

3) Convergence en loi. Théorème de Lévy

4) Variable gaussienne

5) Théorème de la limite centrale

6) Loi des grands nombres

IX - Algorithmique

Algorithmique et Informatique. Algorithmes séquentiels. Exemples d'algorithmes séquentiels. Exemples d'algorithmes de tri. Exemples de comparaison d'algorithmes.

Notion de type de données, de variable, d'adresse. Instructions d'affectation, instructions conditionnelles et boucles.

Fonctions et sous-programmes, passage de paramètres. Exemples de récursivité

Mise en œuvre de la programmation structurée dans la rédaction d'une séquence d'un petit nombre d'instructions pouvant utiliser des sous-programmes (ou procédures) ou des fonctions données, en vue de résoudre un problème. Cette rédaction pourra être faite, au choix du candidat, dans un des langages évolués suivants : Pascal, Fortran.

Programme d'algèbre et géométrie

I - Généralités

Vocabulaire de la théorie des ensembles. Produit de deux ensembles. Applications d'un ensemble dans un ensemble. Composition des applications. Restriction, application réciproque. Image, image réciproque. Application injective, surjective, bijective. Permutations d'un ensemble. Relations d'ordre. Relations d'équivalence. Ensemble N des entiers naturels. Cardinal d'un ensemble fini ou dénombrable. Nombre de parties de cardinal p dans un ensemble de cardinal n .

II - Algèbre générale

Théorie des groupes

Groupes. Homomorphismes de groupes. Sous-groupes ; classes d'équivalence modulo un groupe. Sous-groupes distingués ; groupes quotients. Produits directs et semi-directs de groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Groupes monogènes. Ordre d'un élément.

Opération d'un groupe sur un ensemble ; orbites, stabilisateurs.

Groupes abéliens.

Groupes finis : théorème de Sylow ; théorème de Cauchy

Groupe symétrique - décomposition en cycles ; signature d'une permutation, groupe alterné

Théorie des anneaux

Anneaux Homomorphismes d'anneaux. Sous anneaux

Anneaux commutatifs : formule du binôme. Idéaux et anneaux quotients. Idéal engendré par une partie. Idéal de type fini, anneau noetherien.

Idéaux premiers, anneaux commutatifs Intégrés. Idéaux maximaux ; corps commutatifs.

Divisibilité dans les anneaux commutatifs Intégrés : éléments irréductibles ; éléments associés. Anneaux factoriels, plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun. Anneaux principaux, théorème de Bezout. Anneaux euclidiens ; algorithme du calcul du plus grand diviseur commun dans un anneau euclidien.

Anneau Z des entiers relatifs : division euclidienne ; Z/nZ , indicateur d'Euler, bases de numération

Algèbre sur un anneau commutatif

Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif Intégré. Algèbre des fonctions polynomiales. Expression d'un polynôme symétrique à l'aide des polynômes symétriques élémentaires ; formules de Newton. Racines d'un polynôme à une indéterminée, multiplicité, relations entre coefficients et racines.

Théorie des corps

Corps (commutatifs). Sous-corps. Corps premier. Caractéristique.

Corps des fractions d'un anneau commutatif Intégré. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps (commutatif). Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.

Corps de rupture d'un polynôme irréductible. Corps de décomposition d'un polynôme.

Extension algébrique. Élément algébrique sur un corps.

Corps finis.

Corps 0 des nombres rationnels.

Corps R des nombres réels
Corps C des nombres complexes. Théorème de d'Alembert-Gauss.

III - Algèbre linéaire

Espaces vectoriels. Sous espaces vectoriels. Applications linéaires. Image, noyau. Somme de sous espaces vectoriels, somme directe.

Espaces vectoriels de dimension finie

Bases, dimension. Supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang.

Espace dual, espace bidual ; transposée d'une application linéaire ; orthogonalité

Base duale. Rang de la transposée. Isomorphisme entre un espace et son bidual.

Matrices : opérations sur les matrices. Matrice d'un endomorphisme relativement à une base ; changement de base. Rang d'une matrice, rang de sa transposée, déterminant d'une matrice et d'un endomorphisme. Matrice des colinéaires. Trace d'une matrice et d'un endomorphisme.

Résolution d'un système d'équations linéaires ; rang du système, compatibilité, formules de Cramer ; méthode de Gauss.

Réduction d'un endomorphisme, polynôme minimal et caractéristique d'un endomorphisme.

Diagonalisation, trigonalisation, Théorème de Cayley-Hamilton.

IV - Algèbre bilinéaire

Généralités sur les formes bilinéaires symétriques sur un espace vectoriel de dimension finie (la caractéristique du corps étant supposée différente de 2) : rang, orthogonalité, matrice relativement à une base et changement de base, discriminant. Existence d'une base orthogonale.

Classification des formes quadratiques sur R et C .

Espaces vectoriels euclidiens

Produit scalaire, Inégalité de Cauchy-Schwarz, norme euclidienne.

Adjoint d'un endomorphisme.

Groupe orthogonal : description des éléments en dimension 2 et 3. Réduction des endomorphismes orthogonaux et symétriques.

Espaces vectoriels hermitiens

Produit hermitien, norme hermitienne. Adjoint d'un endomorphisme.

Groupe unitaire. Réduction des endomorphismes normaux.

V - Géométrie affine

Espace affine et espace vectoriel associés de dimension finie. Barycentres. Repères affines. Applications affines. Sous-espaces affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine. Groupe des homothéties, translations.

Géométrie affine euclidienne plane

Notion d'angle. Coordonnée polaires.

Similitudes.

Géométrie affine euclidienne en dimension trois

Coordonnées cylindriques et sphériques. Déplacement, rotation, vissage. Décomposition d'une similitude en produit de symétries par rapport à des plans. Similitudes.

Résumé ou commentaire composé

L'épreuve a pour but d'appécier l'aptitude des candidats à dégager le sens et l'intérêt d'un texte, à apporter avec rigueur une réponse méthodique et personnelle. On accorde une grande importance aux qualités de forme : logique de la composition, correction et précision du style.

Langue vivante étrangère

L'épreuve écrite est constituée par la version d'un texte à caractère scientifique ou technique. Un dictionnaire bilingue est autorisé.

L'épreuve orale comporte la présentation et le commentaire d'un document en langue étrangère à caractère scientifique ou technique. Cette épreuve pourra se dérouler partiellement en laboratoire de langues.

Épreuve d'entretien

L'épreuve d'entretien prend la forme d'un exposé du candidat à partir d'un texte d'intérêt général, scientifique ou suivi de questions permettant d'apprécier :

l'aptitude du candidat à s'exprimer correctement et à communiquer ;

l'aptitude du candidat à dégager pour l'essentiel le sens et l'intérêt du texte et à manifester une réaction personnelle ;

la culture du candidat et ses motivations quant aux études et à la carrière qu'il désire poursuivre.