

Frédéric Robert
Université de Nice-Sophia Antipolis
Laboratoire J.-A.Dieudonné
Parc Valrose
06108 Nice Cedex 2
France

Habilitation à diriger des recherches

”Analyse variationnelle et phénomènes non-linéaires pour des équations elliptiques critiques”

Soutenue le 28 juin 2007 devant le jury composé de:

Philippe Delanoë	Directeur de Recherche CNRS Université de Nice
Nassif Ghoussoub	Rapporteur, Professeur UBC (Vancouver)
Emmanuel Hebey	Professeur Université de Cergy-Pontoise
Gilles Lebeau	Professeur Université de Nice
Frank Pacard	Professeur Université Paris 12
Tristan Rivière	Rapporteur, Professeur ETH Zürich
Michaël Struwe	Professeur ETH Zürich
Gabriella Tarantello	Rapporteur, Professeur Université de Rome 2

Remerciements

Je tiens tout tout d'abord à remercier Gilles Lebeau qui a accepté de présenter mon habilitation à diriger des recherches.

Mes pensées vont ensuite aux rapporteurs de mon mémoire. Je n'ai fait connaissance avec Gabriella Tarantello que récemment, mais j'ai cependant beaucoup profité de conversations et interactions scientifiques avec elle. J'ai eu le plaisir de faire connaissance avec Tristan Rivière lors de mon séjour comme assistant à l'ETH Zürich, et j'ai beaucoup bénéficié de son apport en particulier dans l'ouverture à de nouveaux thèmes scientifiques. Enfin, j'ai une pensée particulière pour Nassif Ghossoub avec lequel j'ai l'occasion de collaborer activement depuis quelques années tant à Nice qu'à Vancouver. Merci donc à tous les trois d'avoir accepté de rapporter sur le présent mémoire.

Philippe Delanoë, chef de l'équipe de Géométrie et d'Analyse niçoise, et Frank Pacard ont accepté d'être membres de mon jury, et je les en remercie vivement. Michael Struwe me fait aussi l'honneur d'être membre du jury: un grand merci à lui, en particulier pour m'avoir donné la chance de travailler avec lui à Zürich après mon doctorat. Un remerciement spécial à mon collaborateur et ami Emmanuel Hebey, anciennement directeur de thèse, qui a toujours suivi de près mes travaux et qui a su rester toujours disponible.

Merci à tous d'être présents aujourd'hui.

Depuis quatre ans, j'ai le plaisir d'être enseignant-chercheur au sein du laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné de l'Université de Nice-Sophia Antipolis. J'y apprécie grandement les conditions de travail qui y sont les miennes et le soutien constant que j'y reçois afin de mener à bien mes recherches que ce soit soutien financier, échange de services ou bien souplesse afin de faciliter mes déplacements.

Ici est aussi l'occasion de remercier les institutions qui m'ont témoigné leur confiance en m'invitant à séjourner et à travailler chez elles. Parmi elles, UBC à Vancouver et l'ETH Zürich ont bien entendu une place à part.

J'ai aussi une pensée pour tous mes collaborateurs, en particulier ceux faisant partie du jury et mon ami Olivier Druet. Ces collaborations sont toujours l'occasion d'échanges fructueux et intéressants.

D'un point de vue non scientifique, je n'aurais pas pu mener à bien mes travaux sans le soutien de certaines personnes. Je pense en premier lieu à ma mère sans le soutien inconditionnel de laquelle je ne serais pas ici aujourd'hui, ainsi qu'à mes grands-parents. Et puis une pensée spéciale pour Alexandra qui vit pour le moment plutôt bien la proximité des mathématiques.

Je dédie ces travaux à la mémoire de mon père et de mon grand-père.

**MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES:
ANALYSE VARIATIONNELLE ET PHÉNOMÈNES
NON-LINÉAIRES POUR DES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES
CRITIQUES**

FRÉDÉRIC ROBERT

SOMMAIRE

Introduction	1
L'invariance conforme	2
Le point de vue analytique: la renormalisation	3
1. Problèmes elliptiques d'ordre deux	4
1.1. Contexte	4
1.2. Aspect théorique	8
1.3. Inégalités de Hardy-Sobolev et problèmes liés	10
2. Problèmes elliptiques d'ordre quatre (et plus)	15
2.1. Résultats d'existence	18
2.2. Résultats de compacité	19
2.3. Les spécificités de la dimension quatre	25
Références	33

INTRODUCTION

Les travaux présentés dans ce mémoire se situent à l'intersection de l'analyse et de la géométrie. Le cadre dans lequel nous nous plaçons est d'ailleurs indifféremment le contexte d'un ouvert de l'espace euclidien \mathbb{R}^n ou bien celui plus géométrique d'une variété riemannienne. Dans tous les cas, nous considérons des équations aux dérivées partielles non-linéaires. La nonlinéarité induit elle-même une invariance de l'équation par un changement d'échelle adapté et conduit à développer une théorie de la renormalisation.

Les équations considérées dans ces travaux sont relativement générales et peuvent être reliées à des contextes variés. À titre d'exemple, la simplification classique du système cellulaire de Gierer-Meinhardt conduit à une équation elliptique non-linéaire du type de celles étudiées dans la première partie. En astrophysique, des théories proposent des modèles fondés sur des équations d'Emden-Fowler avec singularités semblables à celles auxquelles nous nous intéresserons: d'ailleurs, d'autres équations étudiées ici proviennent de travaux en physique, et certaines peuvent être interprétées via la mécanique statistique. Cependant, c'est surtout dans le cadre de la géométrie conforme que ces travaux trouvent naturellement leur place: en effet, le changement d'échelle et la nonlinéarité sont des conséquences directes de l'invariance conforme d'opérateurs naturels.

L'invariance conforme. Dans un premier temps, considérons des questions issues de la géométrie conforme. Dans tout le mémoire, (M, g) désignera une variété riemannienne compacte C^∞ sans bord de dimension $n \geq 2$. Deux métriques g_1 et g_2 sur M sont conformes s'il existe une fonction $f \in C^\infty(M)$ telle que $f > 0$ et $g_2 = f \cdot g_1$ (cela revient à dire que les angles sont conservés après changement de métrique): on appelle alors classe conforme de g , et on note $[g]$, l'ensemble des métriques conformes à g . Suivant la définition donnée dans Branson [30], un opérateur métrique $g \mapsto A_g$ est dit conformément covariant de bidegré (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$ si pour toute métrique conforme $\tilde{g} = e^{2w}g$, $w \in C^\infty(M)$, alors

$$A_{\tilde{g}}(\varphi) = e^{-bw}A_g(e^{aw}\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in C^\infty(M).$$

Davantage dans l'esprit de Graham-Jenne-Mason-Sparling [56], on demande en plus à ces opérateurs d'être différentiels et de s'écrire

$$(1) \quad A_g = \Delta_g^k + \text{termes d'ordres inférieurs},$$

avec $k = \frac{b-a}{2} \in \mathbb{N}$. Ici, $\Delta_g = -\text{div}_g(\nabla)$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami (le laplacien avec convention de signe moins). Parmi ces opérateurs, on pensera au laplacien conforme ($n \geq 2$, $k = 1$, $a = \frac{n-2}{2}$ et $b = \frac{n+2}{2}$), à l'opérateur de Paneitz-Branson [30, 76] ($n \geq 4$, $k = 2$, $a = \frac{n-4}{2}$ et $b = \frac{n+4}{2}$) et plus généralement aux opérateurs construits par Graham-Jenne-Mason-Sparling [56].

Cette invariance conforme, si élégante à écrire, engendre cependant une dynamique extrêmement difficile à contrôler. À titre d'illustration, considérons un opérateur métrique conformément invariant A de bidegré (a, b) vérifiant (1) et $a \neq 0$. Soit

$$\mathcal{M} := \{\tilde{g} \in [g] / A_{\tilde{g}}(1) = 1\}$$

Si l'opérateur A est le laplacien conforme en dimension $n \geq 3$, \mathcal{M} est l'ensemble des métriques conformes à g de courbure scalaire égale à $\frac{4(n-1)}{n-2}$. On suppose ici que $\mathcal{M} \neq \emptyset$ (cette assertion n'est pas triviale, et dépend de la géométrie de M). Il suit des propriétés d'invariance conforme ci-dessus que

$$\mathcal{M} = \left\{ u^{\frac{2}{a}}g / u \in C^\infty(M) \text{ vérifie (2), } u > 0 \right\}$$

où

$$(2) \quad A_g(u) = u^{\frac{b}{a}}.$$

Dans l'esprit de Schoen, intéressons-nous à la structure de \mathcal{M} et demandons-nous si M est compact pour la topologie C^{2k} . Ceci reviendrait à dire que

$$(3) \quad u_i \text{ vérifie (2)} \forall i \Rightarrow \text{il existe } u \in C^{2k}(M) \text{ tel que } \lim_{i \rightarrow +\infty} u_i = u \text{ dans } C^{2k}(M)$$

à extraction près. Du fait de l'invariance conforme, des phénomènes plus subtils peuvent se produire. En effet, soit ϕ un difféomorphisme conforme, c'est-à-dire $\phi^*g \in [g]$: on définit alors $|\det \phi| \in C^\infty(M)$ tel que $\phi^*g = |\det \phi|^{\frac{2}{n}}g$. Pour u vérifiant (2), en posant

$$u_\phi := |\det \phi|^{\frac{a}{n}}u \circ \phi,$$

l'invariance conforme implique que

$$A_g(u_\phi) = u_\phi^{\frac{b}{a}}$$

et donc u_ϕ vérifie encore (2). Si l'ensemble des difféomorphismes conformes est suffisamment riche, alors l'ensemble \mathcal{M} sera lui aussi riche. En particulier, si le groupe conforme n'est pas non compact, alors \mathcal{M} non plus et on perdra la compacité recherchée dans (3)

Le groupe conforme n'est justement pas compact dans le cas d'une variété conformément difféomorphe à (\mathbb{S}^n, h) , la sphère unité de \mathbb{R}^{n+1} munie de sa métrique standard h (c'est même le seul cas, voir Lelong-Ferrand [65], Obata [75]). Via la projection stéréographique, on se ramène sur \mathbb{R}^n muni de la métrique euclidienne ξ . Soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u > 0$, une solution de

$$(4) \quad \Delta_\xi^k u = u^{\frac{b}{a}},$$

c'est-à-dire l'équation (2) avec $g = \xi$ (l'invariance conforme implique $A_\xi = \Delta_\xi^k$). Les homothéties étant trivialement conformes, la fonction

$$(5) \quad x \mapsto \mu^a u(x_0 + \mu x)$$

est elle aussi solution de (4) pour tout $\mu > 0$: c'est d'ailleurs la transformation naturelle qui préserve l'équation (4). Il suit des propriétés de l'opérateur A que sur (\mathbb{S}^n, h) , la fonction $A_h(1)$ est constante. On pose alors $c_n(A) \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $A_h(1) = c_n(A)$. Le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ étant fixé, définissons pour $\mu > 0$

$$u_\mu(x) := \left(\frac{\mu}{\mu^2 + \frac{|x-x_0|^2}{4c_n(A)^{\frac{2}{b-a}}}} \right)^a.$$

L'image inverse de la métrique h par la projection stéréographique étant $4(1 + |x|^2)^{-2}\xi$, il suit de l'invariance conforme que u_μ est solution de (4). De plus,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} u_\mu(x_0) = +\infty \text{ et } \lim_{\mu \rightarrow 0} u_\mu(x) = 0 \text{ pour } x \neq x_0.$$

On a alors un phénomène de concentration (ou encore d'explosion) en x_0 . Par conséquent, être solution positive de (4) n'implique nullement une convergence à extraction près comme suggérée plus haut dans (3). Cet exemple passe très bien sur la sphère via la projection stéréographique.

Le point de vue analytique: la renormalisation. Ce point de vue s'étend à une variété compacte quelconque, et même à un ouvert de \mathbb{R}^n . Adaptons pour cela un point de vue plus analytique: on se place toujours sur (M, g) de dimension n munie d'un opérateur A comme ci-dessus. Plutôt que de considérer des solutions de (2), considérons plus généralement une suite $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^{2k}(M)$ telle que

$$(6) \quad \Delta_g^k u_\alpha + \sum_{i=0}^{2k-1} a_i(x) \cdot \nabla^i u_\alpha = u_\alpha^{\frac{b}{a}}$$

qui est une équation non-linéaire pour $b \neq a$ (ce sera toujours le cas). Ici, $a_i \in \Lambda_{(0,i)}^\infty(M)$ est un tenseur i fois contravariant pour tout i . L'opérateur linéaire n'est pas nécessairement A_g , mais la partie principale est la même. En lieu et place de (M, g) , on peut parfaitement considérer un ouvert de \mathbb{R}^n muni de la métrique euclidienne ξ : on récupère alors dans le terme de gauche un opérateur elliptique dont la partie principale est Δ_ξ^k . On dira qu'on a compacité pour les (u_α) si, à extraction près, ils convergent dans C^{2k} . Soient $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in M$ et $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}$.

Via l'application exponentielle, on effectue un changement d'échelle dans l'esprit de (5) en posant

$$(7) \quad \tilde{u}_\alpha(x) := \mu_\alpha^a u_\alpha(\exp_{x_\alpha}(\mu_\alpha x))$$

pour $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $|x| < \mu_\alpha^{-1} i_g(M)$ (on a assimilé l'espace tangent à \mathbb{R}^n et $i_g(M)$ désigne le rayon d'injectivité). L'équation (6) est invariante par le changement d'échelle (7) au sens suivant:

$$(8) \quad \Delta_{g_\alpha}^k \tilde{u}_\alpha + \sum_{i=0}^{2k-1} \mu_\alpha^{2k-i} (\exp_{x_\alpha}^* a_i(\mu_\alpha x)) \cdot \nabla^i \tilde{u}_\alpha = \tilde{u}_\alpha^{\frac{b}{a}}$$

avec $g_\alpha := \exp_{x_\alpha}^* g(\mu_\alpha x)$. Dans le cas particulier de la métrique euclidienne $g = \xi$, le changement d'échelle s'écrit sous la forme plus agréable $\tilde{u}_\alpha(x) = \mu_\alpha^a u_\alpha(x_\alpha + \mu_\alpha x)$ et on trouve $g_\alpha = \xi$.

L'équation renormalisée (8) est semblable à (6). En effet, même si on n'a pas exactement la même équation, on conserve quand même un laplacien à la puissance k et la nonlinéarité qui sont les composantes essentielles. En faisant tendre μ_α vers 0 quand $\alpha \rightarrow +\infty$, l'équation (8) tend formellement vers l'équation limite (4)

$$\Delta_\xi^k u = u^{\frac{b}{a}} \text{ sur } \mathbb{R}^n.$$

Du coup, comme sur \mathbb{R}^n , ce changement d'échelle va autoriser (a priori) des comportements plus subtils que la simple convergence d'une sous-suite de (u_α) dans C^{2k} : si \tilde{u}_α se comporte comme u_μ ci-dessus avec $x_0 = 0$ et $\mu = 1$, alors u_α va se comporter comme

$$(9) \quad \left(\frac{\mu_\alpha}{\mu_\alpha^2 + \frac{d_g(x, x_\alpha)^2}{4c_n(A)^{\frac{2}{b-a}}}} \right)^a$$

au voisinage de x_α , et donc exploser en x_α lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$.

Toujours du point de vue analytique, et même plus exactement du point de vue variationnel, ce phénomène d'explosion et de non-compacité est dû à la nonlinéarité $u^{\frac{b}{a}}$ qui est critique pour les plongements de Sobolev. Du point de vue des inclusions de Sobolev, la criticalité se traduit par une perte de compacité. C'est de ce défaut de compacité, autant que de l'invariance par changement d'échelle, que vont venir la plupart des difficultés. On verra que le défaut de compacité et l'explosion des suites sont, à divers niveaux, très bien décrits par des "bulles" de type (9). La description précise d'une éventuelle explosion permettra de retrouver de la compacité: on verra que l'opérateur conforme joue ici un rôle critique.

Ce mémoire est divisé en deux grandes parties: la première concerne les problèmes elliptiques d'ordre deux ($k = 1$), et la seconde les problèmes d'ordre supérieur ($k = 2$ et plus).

1. PROBLÈMES ELLIPTIQUES D'ORDRE DEUX

1.1. Contexte. On considère dans cette section diverses questions dont la formulation variationnelle donne naissance à une équation elliptique non linéaire d'ordre deux développant potentiellement des singularités. Un des exemples historiques le plus parlant est le problème de Yamabe qui s'énonce comme suit: soit (M, g) une

variété riemannienne compacte: existe-t-il une métrique \tilde{g} conforme à g dont la courbure scalaire est constante?

Les courbures scalaires de deux métriques conformes sont reliées entre elles par une formule très simple et élégante. En effet, si (M, g) est une variété riemannienne de dimension 2 et si $\tilde{g} = e^{2u}g$, $u \in C^\infty(M)$, est une métrique conforme à g , alors

$$\Delta_g u + \frac{1}{2}R_g = \frac{1}{2}R_{\tilde{g}}e^{2u} \text{ sur } M.$$

où, R_g désigne la courbure scalaire de la métrique g . En dimension $n \geq 3$, on prend traditionnellement $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$, $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$, et on obtient la relation

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)}R_g u = \frac{n-2}{4(n-1)}R_{\tilde{g}}u^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ sur } M.$$

Le problème de Yamabe étant invariant conforme (le résoudre sur (M, g) revient à le résoudre sur (M, g') où g' est conforme à g), il est naturel que les opérateurs concernés soient eux aussi invariants conformes. Si (M, g) est de dimension 2 et si $\tilde{g} = e^{2u}g$, $u \in C^\infty(M)$, on a

$$(10) \quad \Delta_{\tilde{g}} = e^{-2u}\Delta_g.$$

Si (M^n, g) est de dimension $n \geq 3$ avec $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$, $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$, alors

$$L_g^n(u\varphi) = u^{\frac{n+2}{n-2}}L_{\tilde{g}}^n\varphi \text{ pour tout } \varphi \in C^\infty(M),$$

où

$$L_g^n := \Delta_g + \frac{n-2}{4(n-1)}R_g$$

est le laplacien conforme: suivant la terminologie adoptée dans l'introduction, le laplacien conforme est un opérateur métrique conformément invariant de bidegré $(\frac{n-2}{2}, \frac{n+2}{2})$, et il vérifie (1) avec $k = 1$. Dorénavant, on se place en dimension $n \geq 3$. Le problème de Yamabe peut alors se reformuler dans le langage EDP de la façon suivante: existe-t-il une fonction $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$ telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(11) \quad \Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)}R_g u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ sur } M?$$

Dans ce cas, la métrique $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$ est à courbure scalaire constante et $R_{\tilde{g}} = \frac{4(n-1)}{n-2}\lambda$. Comme on l'a vu dans l'introduction, la difficulté de cette question provient autant de l'exposant $\frac{n+2}{n-2}$ qui rend inefficaces les techniques variationnelles classiques que de l'invariance par changement d'échelle. Concentrons-nous provisoirement sur le problème de l'exposant. Posons

$$H_1^2(M) := \{\text{complété de } C^\infty(M) \text{ dans } L^2(M) \text{ pour } \|\cdot\|_{H_1^2}\},$$

où

$$\|v\|_{H_1^2(M)} := \sqrt{\int_M |\nabla v|_g^2 dv_g + \int_M |v|^2 dv_g}.$$

Ici, dv_g est l'élément de volume riemannien. Il suit des inégalités de Sobolev que toute fonction de $H_1^2(M)$ est en fait dans $L^{2^*}(M)$ avec $2^* := \frac{2n}{n-2}$ et que le plongement $H_1^2(M) \hookrightarrow L^{2^*}(M)$ est continu. Du coup, toute fonction u solution de (11)

est, à homothétie près, un point critique de la fonctionnelle

$$I(v) := \frac{\int_M (|\nabla v|_g^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g v^2) dv_g}{(\int_M |v|^{2^*} dv_g)^{\frac{2}{2^*}}}$$

définie pour $v \in H_1^2(M) \setminus \{0\}$. Inversement, une fonction $u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}$, $u \geq 0$, point critique de I est en fait C^∞ , strictement positive et solution de (11). La stratégie naturelle est alors de minimiser I sur les $v \in H_1^2(M) \setminus \{0\}$. Par définition, l'invariant de Yamabe est l'infimum de cette fonctionnelle: on le note $\text{Yam}(M, [g])$, car il est indépendant du choix de l'élément de $[g]$. On peut le voir de manière plus géométrique comme

$$\text{Yam}(M, [g]) = \inf_{\tilde{g} \in [g]} \frac{\frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R_{\tilde{g}} dv_{\tilde{g}}}{\text{Vol}(M, \tilde{g})^{\frac{n-2}{2}}}.$$

Le problème est que le plongement de Sobolev $H_1^2(M) \hookrightarrow L^{2^*}(M)$ est continu, mais pas compact. En effet, considérons la suite de fonctions

$$v_\alpha(x) := \left(\frac{\mu_\alpha}{\mu_\alpha^2 + \frac{d_g(x, x_\alpha)^2}{n(n-2)}} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$

avec $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in M$ et $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}$ telle que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mu_\alpha = 0$. On constate sans peine que cette suite est bornée dans $H_1^2(M)$, qu'elle converge vers 0 dans $L^q(M)$ pour $q \in [1, 2^*)$ mais pas dans $L^{2^*}(M)$. Du coup, une suite minimisante (même renormalisée) pour I n'est pas nécessairement convergente dans $H_1^2(M)$ à extraction près et il n'y a pas d'assurance de trouver des minimiseurs pour I , et donc un point critique. Cette difficulté est loin d'être technique. La preuve initiale de l'existence de solutions de (11) par Yamabe [101] en 1960 était fautive. Le problème de Yamabe attendit plus de vingt ans avant d'être enfin résolu, la preuve étant la somme de résultats dus à Trudinger [97], à Aubin [26] et à Schoen [82]. Pour résumer l'histoire de façon abusivement courte, disons seulement que toute suite minimisante renormalisée est relativement compacte dans $H_1^2(M)$ tant que M n'est pas conformétement difféomorphe à (\mathbb{S}^n, h) : Trudinger prouva ceci en 1968 dans le cas où l'invariant de Yamabe est inférieur ou égal à zéro, Aubin en 1976 dans le cas où (M, g) n'est pas localement conformétement plate et $n \geq 6$, et les cas restant furent traités par Schoen en 1984 via le théorème de la masse positive. L'historique de la résolution du problème n'ayant pas sa place dans ce mémoire, on renvoie le lecteur intéressé à l'article de Lee et Parker [64]. L'approche par minimisation n'est pas la seule possible: on renvoie par exemple à Schwetlick-Struwe [87] et R.Ye [102] pour des approches par le flot et à Bahri [29] pour une approche par des méthodes topologiques.

Un point important est que l'énoncé du théorème de Yamabe, à savoir l'existence d'une métrique à courbure scalaire constante dans la classe conforme d'une variété riemannienne, cache un point fondamental de la preuve: la disjonction selon que la variété soit conformétement difféomorphe à la sphère standard ou pas. Suite à la résolution du problème de Yamabe, Schoen conjectura que dans la classe conforme d'une variété compacte à invariant de Yamabe positif, l'ensemble des métriques à courbure scalaire constante égale à 1 est compact pour la topologie C^2 , sauf si la variété est conforme à la sphère (le résultat correspondant pour un invariant de

Yamabe inférieur ou égal à 0 se règle aisément). Vue du côté de l'analyse, cette question revient à l'énoncé suivant: soit (M, g) une variété compacte de dimension $n \geq 3$ dont l'invariant de Yamabe est positif et non conformément difféomorphe à la sphère,

$$\mathcal{S}(M, g) = \left\{ u \in C^2(M) / \Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = u^{2^*-1}, u > 0 \right\}$$

est-il compact pour la topologie C^2 ? On retombe alors dans les problématiques évoquées dans l'introduction. Dans le cas de la sphère standard (\mathbb{S}^n, h) , l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{S}^n, h)$ est parfaitement connu, et il est non compact (ce fait est intimement lié à la non-compacité du groupe conforme de la sphère). Cette question est loin d'être évidente, toujours à cause du plongement non compact dans $L^{2^*}(M)$. En revanche, si on remplace l'exposant $2^* - 1$ par un exposant strictement plus petit, alors la compacité a lieu car le plongement associé est compact.

Schoen a prouvé cette conjecture dans le cas non conformément plat [85] et en dimension $n = 3$ [84]. Elle fut prouvée par Druet [45] en dimensions $n = 4, 5$, par Marques [72] en dimensions $n = 6, 7$ et par Li-Zhang [67] en dimensions $n = 8, 9$. Les développements récents tendent à montrer qu'il y aurait des contre-exemples en grande dimension.

Venons-en à l'invariance par changement d'échelle. Dans l'esprit de ce qui vient d'être dit, les travaux présentés ici concernent les propriétés de compacité des solutions $u \in C^2(M)$ d'équations du type

$$(12) \quad \Delta_g u + au = u^{2^*-1}, u > 0$$

avec $a \in C^{0,\theta}(M)$, $\theta \in (0, 1)$. Soit une suite $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^2(M)$ de solutions de (12): on dira qu'elle est compacte s'il existe $u \in C^2(M)$ tel que, à extraction près,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} u_\alpha = u \text{ dans } C^2(M).$$

Au même titre que le défaut de compacité, l'invariance par changement d'échelle va être cruciale et générer un phénomène de concentration. En effet, soit $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in M$ et soit $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mu_\alpha = 0$. On pose alors, comme dans (7)

$$\tilde{u}_\alpha(x) := \mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}} u_\alpha(\exp_{x_\alpha}(\mu_\alpha x))$$

pour $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $|x| < \mu_\alpha^{-1} i_g(M)$ (on a assimilé l'espace tangent à \mathbb{R}^n). La nouvelle fonction \tilde{u}_α vérifie alors

$$\Delta_{g_\alpha} \tilde{u}_\alpha + \mu_\alpha^2 a(\exp_{x_\alpha}(\mu_\alpha x)) \tilde{u}_\alpha = \tilde{u}_\alpha^{2^*-1} \text{ dans } B_{\mu_\alpha^{-1} i_g(M)}(0).$$

Si la famille \tilde{u}_α converge dans C^2 lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$ vers une fonction $v > 0$, alors v est solution de l'équation limite

$$\Delta_\xi v = v^{2^*-1} \text{ sur } \mathbb{R}^n.$$

Les solutions de cette équation sont explicites et ont été déterminées par Caffarelli-Gidas-Spruck [33]: il existe $\lambda > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$(13) \quad v(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + \frac{|x-x_0|^2}{n(n-2)}} \right)^{\frac{n-2}{2}} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Du coup, dans le cas $x_0 = 0$ et $\lambda = 1$, en faisant le changement de variable inverse, on récupère que, du moins pour les points x suffisamment proches de x_α , $u_\alpha(x)$ est proche de

$$(14) \quad B_\alpha^{(2)}(x) := \left(\frac{\mu_\alpha}{\mu_\alpha^2 + \frac{d_g(x, x_\alpha)^2}{n(n-2)}} \right)^{\frac{n-2}{2}},$$

qui est la fonction v_α déjà utilisée ci-dessus. Une telle fonction $B_\alpha^{(2)}$ sera dorénavant appelée "Bulle". Ces bulles vont s'avérer très importantes dans la suite.

Les fonctions v ci-dessus sont reliées aux inégalités de Sobolev. En effet, il suit du théorème de Sobolev qu'il existe $c > 0$ tel que $\|u\|_{2^*} \leq c\|\nabla u\|_2$ pour tout $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. En posant $D_1^2(\mathbb{R}^n)$ le complété de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $u \mapsto \|\nabla u\|_2$, on pose alors

$$(15) \quad \frac{1}{K(n, 2)^2} := \inf_{u \in D_1^2(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}}.$$

Cette constante est explicite et a été calculée ainsi que ses extrémales par Rodemich [80], Aubin [27] et Talenti [92]: les extrémales sont, à multiplication par un scalaire près, de la forme (13). Du coup, pour chaque fonction v , on obtient que

$$\|v\|_{2^*}^{2^*} = K(n, 2)^{-n},$$

et la norme ne peut pas être arbitrairement petite. Par conséquent, pour les bulles, grâce à l'invariance conforme, on obtient

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|B_\alpha^{(2)}\|_{2^*}^{2^*} = K(n, 2)^{-n}$$

1.2. Aspect théorique. On se consacre ici essentiellement au défaut de compacité du plongement $H_1^2(M) \hookrightarrow L^{2^*}(M)$ et à la description par des bulles. La description de ce phénomène s'avère particulièrement importante dans les problèmes variationnels et est depuis des dizaines d'années le sujet de nombreux travaux. Les premières contributions en ce sens remontent à Wente [100] et Sacks-Uhlenbeck [81]. Pierre-Louis Lions [70] donna une très belle description dans le contexte général des mesures. Concernant les solutions de (12), le contexte naturel est celui des suites de Palais-Smale. Soit $\theta \in (0, 1)$ et soit $a \in C^{0, \theta}(M)$. On considère la fonctionnelle

$$J(v) := \frac{1}{2} \int_M (|\nabla v|_g^2 + av^2) dv_g - \frac{1}{2^*} \int_M |v|^{2^*} dv_g$$

définie pour $v \in H_1^2(M)$. On constate sans difficulté que J est C^1 sur $H_1^2(M)$ et que ses points critiques $u \in H_1^2(M)$ satisfont au sens faible

$$(16) \quad \Delta_g u + au = |u|^{2^*-2}u \text{ dans } \mathcal{D}'(M),$$

c'est-à-dire, si $u \geq 0$, l'équation (12). Par définition, $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in H_1^2(M)$ est une suite de Palais-Smale pour J si $(J(u_\alpha))_{\alpha \in \mathbb{N}}$ est bornée et si $(J'(u_\alpha))_{\alpha \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers 0 dans $H_1^2(M)'$. Par exemple, toute suite de solutions de (12) dont la norme L^{2^*} est uniformément bornée est une suite de Palais-Smale pour la fonctionnelle J . Les suites de Palais-Smale se sont avérées être un outil extrêmement utile pour l'étude d'équations telles que (12). En 1984, Michael Struwe prouva le résultat suivant:

Théorème 1.1 (Struwe [88], 1984). *Soit $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in H_1^2(M)$ une suite de Palais-Smale pour J . On suppose que $u_\alpha \geq 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. Alors, à extraction près, il existe $u_\infty \in H_1^2(M)$ une solution faible de (16), il existe $N \in \mathbb{N}$, il existe des suites $(x_{1,\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}}, \dots, (x_{N,\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}} \in M$, il existe $(\mu_{1,\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}}, \dots, (\mu_{N,\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mu_{i,\alpha} = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ et*

$$(17) \quad u_\alpha = u_\infty + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mu_{i,\alpha}}{\mu_{i,\alpha}^2 + \frac{d_g(\cdot, x_{i,\alpha})^2}{n(n-2)}} \right)^{\frac{n-2}{2}} + R_\alpha$$

où $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} R_\alpha = 0$ fortement dans $H_1^2(M)$. De plus,

$$J(u_\alpha) = J(u_\infty) + \frac{N}{nK(n, 2)^n} + o(1)$$

avec $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} o(1) = 0$.

Ici, on a $u_\alpha \rightharpoonup u_\infty$ faiblement dans $H_1^2(M)$ lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$. L'égalité (17) décrit donc exactement ce qui manque pour avoir de la convergence forte: ce sont exactement les bulles précisées dans (14). Par ailleurs, un phénomène de quantification a lieu: l'existence d'une bulle implique au moins l'énergie $n^{-1}K(n, 2)^{-n}$. On notera aussi que pour toute bulle $(B_\alpha^{(2)})_{\alpha \in \mathbb{N}}$ comme dans (14), on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} J(B_\alpha^{(2)}) = \frac{1}{nK(n, 2)^n}.$$

Cette description est optimale: en effet, toute suite s'écrivant comme (17) est une suite de Palais-Smale pour J (avec cependant quelques restrictions sur la distance entre les centres des bulles). Pour être complet, il convient de dire que le résultat originel de Struwe concerne des suites de Palais-Smale sans hypothèse de signe: par souci de clarté, on a préféré se restreindre au cas positif. De plus, le résultat originel est énoncé sur un ouvert borné de \mathbb{R}^n : la preuve s'étend au cas d'une variété riemannienne.

Donnons maintenant plus de structure et considérons des solutions exactes. Plus précisément, soit $\theta \in (0, 1)$ et soit une suite de fonctions $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^{0,\theta}(M)$ et $a_\infty \in C^{0,\theta}(M)$ telles que

$$(18) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} a_\alpha = a_\infty \text{ dans } C^{0,\theta}(M) \text{ et } \Delta_g + a_\infty \text{ est coercif.}$$

Soit une suite $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^2(M)$ telle que $u_\alpha > 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et

$$(19) \quad \Delta_g u_\alpha + a_\alpha u_\alpha = u_\alpha^{2^*-1} \text{ dans } M$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. On suppose de plus qu'il existe $\Lambda > 0$ tel que

$$(20) \quad \|u_\alpha\|_{2^*} \leq \Lambda$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. La suite (u_α) est une suite de Palais-Smale pour la fonctionnelle J (en prenant $a := a_\infty$) et admet donc une décomposition de Struwe de type (17), décomposition qu'on désignera comme "décomposition H_1^2 ". Étant donné que nous considérons maintenant des équations, on peut raisonnablement espérer récupérer plus d'informations, en particulier une description ponctuelle. C'est effectivement le cas: dans un travail en collaboration avec Olivier Druet et Emmanuel Hebey, on montre le résultat suivant:

Théorème 1.2 (Druet-Hebey-Robert [7], 2003). *Soient $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^2(M)$ et $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^{0,\theta}(M)$ tels que (18), (19), (20) ont lieu. Alors, à extraction près, il existe $u_\infty \in C^2(M)$ telle que $u_\infty > 0$ ou $u_\infty \equiv 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, il existe des suites $(x_{1,\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}}, \dots, (x_{N,\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}} \in M$, il existe $(\mu_{1,\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}}, \dots, (\mu_{N,\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mu_{i,\alpha} = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ et il existe $C > 0$ tel que*

$$(21) \quad \frac{1}{C} \left(u_\infty(x) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mu_{i,\alpha}}{\mu_{i,\alpha}^2 + \frac{d_g(x, x_{i,\alpha})^2}{n(n-2)}} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right) \leq u_\alpha(x) \leq C \left(u_\infty(x) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mu_{i,\alpha}}{\mu_{i,\alpha}^2 + \frac{d_g(x, x_{i,\alpha})^2}{n(n-2)}} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right)$$

pour tout $x \in M$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}$.

On passe alors à une description ponctuelle par les bulles, que nous qualifierons de "décomposition C^0 ". Un des avantages de cette nouvelle description est qu'on peut légitimement "remplacer" la fonction par les bulles en de nombreuses situations: par exemple, dans des identité de type Pohozaev, la fonction d'origine est intégrée sur divers domaines, et les divers termes qui interviennent peuvent être très précisément estimés grâce à la décomposition C^0 .

Cette description est optimale: Druet-Hebey [48] on exhibé des suites $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ telles qu'il existe des suites de solution de (19) qui explosent en développant autant de bulles que l'on veut qui ne sont pas nécessairement isolées. On entend par "isolées" des bulles centrées en $(x_{i,\alpha}), (x_{j,\alpha}) \in M$ tels que $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} |x_{i,\alpha} - x_{j,\alpha}| \neq 0$. De plus, la borne sur l'énergie (20) est indispensable: des exemples de solutions de (19) d'énergie tendant vers l'infini sont exhibées. On renvoie à Druet-Hebey [48] pour plus de précisions.

Cette description ponctuelle trouve plusieurs applications. On mentionnera en particulier le problème des meilleures constantes dans les inégalités de Sobolev: dans ce cas, on a $u_\infty \equiv 0$ et $N = 1$. Pour plus de détails concernant cette question, on renvoie aux articles de Hebey-Vaugon [62, 63], Druet [43], Robert [11], ainsi qu'aux monographies Hebey [60] et Druet-Hebey [47]. D'ailleurs, les premières descriptions C^0 furent faites dans ce contexte, et plus généralement dans le contexte d'une bulle $N = 1$ (Atkinson-Peletier [25], Brézis-Peletier [32], Druet-Robert [2], Han [58], Rey [79], Robert [1], entre autres). Bien entendu, cette théorie s'applique aux questions de compacité mentionnées plus haut, et on renvoie à Druet [44] pour cela. On renvoie aussi à la sous-section 1.3 dans laquelle cette théorie s'applique à des questions de compacité et de multiplicité pour des équations elliptiques issues des inégalités de Hardy-Sobolev.

La difficulté supplémentaire dans le cadre général du théorème 1.2 par rapport au cas $N = 1$ est due à la présence de plusieurs bulles ($N > 1$) qui peuvent interagir entre elles. Du coup, l'analyse de ces bulles devient beaucoup plus délicate et requiert un travail précis et minutieux.

1.3. Inégalités de Hardy-Sobolev et problèmes liés. Comme nous venons de le voir, les questions de compacité sont intimement liées aux inégalités de Sobolev. C'est en fait aussi le cas pour de nombreuses autres inégalités fonctionnelles. On

s'intéresse ici aux inégalités de Hardy-Sobolev qui se formulent ainsi: soit $n \geq 3$ et $s \in [0, 2]$, alors il existe $C(n, s) > 0$ tel que

$$(22) \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^{\frac{2(n-s)}{n-2}} dx}{|x|^s} \right)^{\frac{n-2}{n-s}} \leq C(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|_{\xi}^2 dx$$

pour tout $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour $s = 2$, on retrouve l'inégalité de Hardy, et pour $s = 0$, on retrouve l'inégalité de Sobolev classique (15): l'inégalité (22) est obtenue par interpolation entre l'inégalité de Hardy et l'inégalité de Sobolev. L'inégalité (22) hérite de propriétés issues de ces deux inégalités fonctionnelles. Elle peut être aussi vue comme un cas particulier des inégalités obtenues par Catrina-Wang [35] et Caffarelli-Kohn-Nirenberg [34] (on renvoie aussi au livre de Maz'ya [73]). Soit Ω un domaine régulier de \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. On pose

$$H_{1,0}^2(\Omega) := \{\text{complété de } C_c^\infty(\Omega) \text{ pour } \|\cdot\|_{H_{1,0}^2}\},$$

où $\|u\|_{H_{1,0}^2(\Omega)} := \|\nabla u\|_2$. Il suit de l'inégalité (22) que le plongement dans l'espace à poids

$$(23) \quad H_{1,0}^2(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*(s)}(\Omega, |x|^{-s})$$

a lieu et que ce plongement est continu. En général, ce plongement n'est pas compact et on retrouve les problématiques précédentes. En saturant l'inégalité (22), on pose

$$(24) \quad I_\Omega(u) := \frac{\int_\Omega |\nabla u|_{\xi}^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^{\frac{2(n-s)}{n-2}} dx}{|x|^s} \right)^{\frac{n-2}{n-s}}} \text{ et } \mu_s(\Omega) := \inf_{u \in H_{1,0}^2(\Omega) \setminus \{0\}} I_\Omega(u)$$

Cette définition incite à se poser plusieurs questions:

- (i) quelle est la valeur de la constante optimale $\mu_s(\Omega)$?
- (ii) A-t-on des extrémales pour $\mu_s(\Omega)$? C'est-à-dire existe-t-il $u_\Omega \in H_{1,0}^2(\Omega) \setminus \{0\}$ telle que $\mu_s(\Omega) = I_\Omega(u_\Omega)$?

Dans le cas $s = 0$, la réponse est connue depuis longtemps et $\mu_0(\Omega) = \mu_0(\mathbb{R}^n) = K(n, 2)^{-2}$ et, si Ω est borné, on n'a pas d'extrémale. Le cas $s \in (0, 2)$ se révèle beaucoup plus délicat et, comme on peut s'y attendre, les réponses aux deux questions ci-dessus dépendent fortement de la position relative de 0 par rapport à Ω .

Le cas $0 \notin \bar{\Omega}$ n'a que peu d'intérêt: en effet, le plongement de Sobolev devient compact et on récupère l'existence d'extrémales. Le cas $0 \in \Omega$ s'avère assez proche du cas $s = 0$: l'ouvert Ω se comporte localement comme \mathbb{R}^n au voisinage de 0, et c'est \mathbb{R}^n qui devient l'espace modèle pour ce problème. En particulier, on récupère par localisation que $\mu_s(\Omega) = \mu_s(\mathbb{R}^n)$ et on n'a pas d'extrémale si Ω est borné. La valeur de $\mu_s(\mathbb{R}^n)$ et les extrémales pour (24) sont explicites (ce résultat est dû à Lieb [68], voir aussi Ghoussoub-Yuan [55]).

Le cas $0 \in \partial\Omega$ s'avère beaucoup plus riche pour plusieurs raisons. Tout d'abord, les phénomènes de concentration ont obligatoirement lieu au voisinage du bord et localement, à difféomorphisme près, l'ouvert Ω est un morceau du demi-plan $\mathbb{R}_-^n := \{x \in \mathbb{R}^n / x_1 < 0\}$. L'espace modèle devient alors \mathbb{R}_-^n . Du coup, on montre

que $\mu_s(\Omega) \leq \mu_s(\mathbb{R}^n_-)$, mais il n'y a pas égalité a priori. Les extrémales de $\mu_s(\mathbb{R}^n_-)$ sont des solutions positives de l'équation limite

$$(25) \quad \Delta_\xi u = \frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^s} \text{ dans } \mathbb{R}^n_-, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\mathbb{R}^n_-.$$

Pour cette équation, on a de nouveau une invariance par changement d'échelle. En effet, soit $\mu > 0$ et soit la fonction

$$(26) \quad u_\mu(x) := \mu^{\frac{n-2}{2}} u(\mu x)$$

Alors $u_\mu \in H_{1,0}^2(\mathbb{R}^n_-)$ vérifie encore (25). On l'a vu dans le cadre d'équations de type Yamabe, cette invariance génère des phénomènes de concentration. Cette invariance nous fournit ainsi une preuve de la non-compacité du plongement (23): soit $u \in H_{1,0}^2(\mathbb{R}^n_-)$ solution de (25). Soit $\varphi : B_1(0) \rightarrow U$ un difféomorphisme sur U ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0 tel que $\varphi(B_1(0) \cap \{x_1 < 0\}) = \varphi(B_1(0)) \cap \Omega$ et $\varphi(B_1(0) \cap \{x_1 = 0\}) = \varphi(B_1(0)) \cap \partial\Omega$; on choisit alors $\eta \in C_c^\infty(U)$ telle que $\eta \equiv 1$ au voisinage de 0. À transformation affine près, on peut supposer que $\varphi(0) = 0$ et que $d\varphi_0 = Id_{\mathbb{R}^n}$. On pose

$$(27) \quad w_\alpha(x) = \eta(x) \mu_\alpha^{-\frac{n-2}{2}} u\left(\frac{\varphi^{-1}(x)}{\mu_\alpha}\right)$$

pour $x \in \Omega$ et $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}$ telle que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mu_\alpha = 0$. Dans ce contexte, de telles fonctions seront appelées "Bulles". On constate alors que $u_\alpha \in H_{1,0}^2(\Omega)$ et que

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_\Omega |\nabla w_\alpha|^2 dx = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_\Omega \frac{|w_\alpha|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx = \mu_s(\mathbb{R}^n_-)^{\frac{n-s}{2-s}}$$

$$\text{et } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_\Omega \frac{|w_\alpha|^q}{|x|^s} dx = 0 \text{ pour } 1 \leq q < 2^*(s).$$

Le plongement (23) n'est donc pas compact. Il serait utile d'avoir une expression exacte des extrémales pour $\mu_s(\mathbb{R}^n_-)$, comme c'était le cas sur \mathbb{R}^n . Or, les extrémales ne sont pas connues, ce qui est un problème pour la minimisation de la fonctionnelle I_Ω : en effet afin de retrouver la compacité des suites minimisantes renormalisées, on estime traditionnellement la fonctionnelle à minimiser (ici I_Ω) en des fonctions-test issues des extrémales (ici w_α) et on fait un développement limité afin d'atteindre des valeurs sous le niveau d'énergie d'explosion (ici $\mu_s(\mathbb{R}^n_-)$). Les extrémales n'étant pas explicites, ce schéma ne fonctionne que partiellement, mais donne quand même quelques résultats (voir à ce propos Ghoussoub-Kang [54]).

Dans ce type de problème de minimisation, on remplace la fonctionnelle I_Ω par une fonctionnelle sous-critique (il suffit de remplacer $2^*(s)$ par $2^*(s) - \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ petit dans la définition de I_Ω) pour laquelle on récupère de la compacité, et donc des minimiseurs. On se ramène alors à l'étude quand $\epsilon \rightarrow 0$ de solutions $u_\epsilon \in H_{1,0}^2(\Omega) \setminus \{0\}$ telles que $u_\epsilon \geq 0$ et

$$\Delta_\xi u_\epsilon = \frac{u_\epsilon^{2^*(s)-1-\epsilon}}{|x|^s} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

avec une borne uniforme sur la norme $L^{2^*(s)}$ des $(u_\epsilon)_{\epsilon > 0}$. Les solutions faibles d'une telle équation sont en fait dans $C^1(\overline{\Omega})$ dès que ϵ est assez petit.

Après changement d'échelle comme en (26) et en faisant tendre ϵ vers 0, on récupère l'équation limite (25). Comme ce qui a été fait dans la section précédente, on souhaite alors récupérer un contrôle par les bulles (27). Le résultat suivant a lieu:

Théorème 1.3 (Ghoussoub-Robert [15], 2006). *Soit Ω un ouvert borné régulier orienté de \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, tel que $0 \in \partial\Omega$. Soit $s \in (0, 2)$ et soit $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^1(\overline{\Omega})$ telle que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} a_\alpha = a_\infty \in C^1(\overline{\Omega})$ dans $C^1(\overline{\Omega})$. Soit une suite $(p_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in [0, 2^*(s) - 2)$ telle que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} p_\alpha = 0$. Soit une suite $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in H_{1,0}^2(\Omega)$ telle que*

$$(28) \quad \Delta_\xi u_\alpha + a_\alpha u_\alpha = \frac{|u_\alpha|^{2^*(s)-2-p_\alpha} u_\alpha}{|x|^s} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

On suppose qu'il existe $\Lambda > 0$ tel que $\|u_\alpha\|_{H_{1,0}^2(\Omega)} \leq \Lambda$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. Alors, à extraction près, il existe $C > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, il existe $(\mu_{\alpha,1})_{\alpha \in \mathbb{N}}, \dots, (\mu_{\alpha,N})_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mu_{\alpha,i} = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ et

$$|u_\alpha(x)| \leq C|x| + C \sum_{i=1}^N \frac{\mu_{\alpha,i}^{\frac{n}{2}} |x|}{(\mu_{\alpha,i}^2 + |x|^2)^{\frac{n}{2}}}$$

pour tout $x \in \Omega$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}$.

Quelques remarques sur ce résultat. Les fonctions considérées pouvant changer de signe, on ne récupère pas le contrôle inférieur par le terme de droite de l'inégalité comme dans le théorème 1.2. D'autre part, on n'obtient a priori pas exactement le contrôle par bulles annoncé. Cependant, on montre dans [15] que pour chaque solution u de (25) obtenue dans l'étude, il existe $C > 0$ tel que

$$|u(x)| \leq C \frac{|x_1|}{(1 + |x|^2)^{\frac{n}{2}}}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_-^n$, le contrôle de u par le terme de droite ayant aussi lieu par en-dessous dans le cas où $u > 0$. En revenant à la bulle w_α de (27), on obtient

$$|w_\alpha(x)| \leq C \frac{\mu_\alpha^{\frac{n}{2}} |x|}{(\mu_\alpha^2 + |x|^2)^{\frac{n}{2}}}$$

pour $x \in \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}$. Du coup, le contrôle obtenu est licite: on peut même l'améliorer et le rendre optimal dans le cas des solutions positives (il faut alors un peu modifier les bulles).

En injectant cette estimée dans une identité de type Pohozaev, on obtient le résultat de compacité suivant, dans l'esprit de Druet [44]:

Théorème 1.4 (Ghoussoub-Robert [15], 2006). *Soit Ω un ouvert borné orienté de \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, tel que $0 \in \partial\Omega$. Soit $s \in (0, 2)$ et soit $a \in C^1(\overline{\Omega})$. Soit $(p_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in [0, 2^*(s) - 2)$ telle que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} p_\alpha = 0$ et soit $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in H_{1,0}^2(\Omega)$ bornée dans $H_{1,0}^2(\Omega)$ vérifiant (28) avec $a_\alpha \equiv a$. Alors la suite $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ est pre-compacte dans la topologie C^1 dans chacun des deux cas suivants:*

(1) *les courbures principales de $\partial\Omega$ en 0 sont inférieures ou égales à 0 et non toutes nulles,*

(2) *$u_\alpha \geq 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et la courbure moyenne de $\partial\Omega$ en 0 est strictement négative.*

La convention de signe est prise de façon à ce que sur la sphère unité, vue comme le bord de la boule orientée, les courbures principales sont positives, ainsi que la courbure moyenne.

Comparé à d'autres résultats de compacité, ce résultat amène plusieurs remarques. Pour les équations de type Yamabe, la compacité dépend du comportement de la variété et du terme linéaire d'un point de vue local ou bien global: en effet, soit (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord de dimension $n \geq 3$, soient une suite $(h_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^2(M)$ telle que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} h_\alpha = h_\infty \in C^2(M)$ dans $C^2(M)$ et une suite $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^2(M)$ telle que

$$\Delta_g u_\alpha + h_\alpha u_\alpha = u_\alpha^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ sur } M, \quad \|u_\alpha\|_{\frac{2n}{n-2}} \leq \Lambda$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. Olivier Druet a montré que la suite $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $C^2(M)$ dans les cas suivants:

- (i) $n = 3$, $h_\alpha \leq \frac{n-2}{4(n-1)} R_g$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et $h_\infty \not\equiv \frac{n-2}{4(n-1)} R_g$,
- (ii) $n \geq 4$, $n \neq 6$ et $h_\infty(x) \neq \frac{n-2}{4(n-1)} R_g(x)$ pour tout $x \in M$.

Pour les petites dimensions, c'est le global qui prime, pour les grandes, c'est le local. Pour la compacité dans Hardy-Sobolev, la structure même du problème induit qu'il n'y a pas de phénomène de petite dimension, mais en plus, que le terme linéaire a_∞ n'intervient pas, et seule la géométrie de l'ouvert Ω en 0 est à prendre en compte.

Comme corollaires du théorème 1.4, on obtient les résultats suivants:

Théorème 1.5 (Ghoussoub-Robert [17, 15], 2006). *Soit Ω un ouvert borné orienté de \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, tel que $0 \in \partial\Omega$. Soit $s \in (0, 2)$. On suppose que la courbure moyenne de $\partial\Omega$ en 0 est strictement négative. Alors il existe des extrémales pour $\mu_s(\Omega)$.*

Ce théorème généralise les résultats antérieurs de Ghoussoub et Kang [54]. Dans le cas d'un cône (donc non borné), ce problème a été étudié par Egnell [51]. D'autre part, en combinant la compacité du théorème 1.4 avec des méthodes topologiques telles que celles développées dans Ghoussoub [53], on obtient un résultat de multiplicité:

Théorème 1.6 (Ghoussoub-Robert [15], 2006). *Soit Ω un ouvert borné orienté de \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, tel que $0 \in \partial\Omega$. Soit $s \in (0, 2)$ et $a \in C^1(\overline{\Omega})$ tel que $\Delta_\xi + a$ est coercif. On suppose que les courbures principales de $\partial\Omega$ en 0 sont inférieures ou égales à 0 et non toutes nulles. Alors il existe une infinité de solutions $u \in H_{1,0}^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ de*

$$\Delta_\xi u + au = \frac{|u|^{2^*(s)-2} u}{|x|^s} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Pour terminer, précisons que la présentation de ces résultats sur les inégalités de Hardy-Sobolev ne respecte pas le cheminement exacte des travaux effectués: l'analyse fut tout d'abord effectuée en dimension $n \geq 4$ avec une bulle dans l'article Ghoussoub-Robert [17], puis généralisée dans Ghoussoub-Robert [15]. Le terme $|x|$ désigne la distance à l'origine: dans l'esprit de Badiale-Tarantello [28] (voir également Mazja [73]), on peut aussi le remplacer par la distance à un sous-espace vectoriel de dimension supérieure à 1. Ce cas est étudié dans Ghoussoub-Robert [22].

2. PROBLÈMES ELLIPTIQUES D'ORDRE QUATRE (ET PLUS)

Les questions abordées jusqu'ici se généralisent naturellement à des opérateurs elliptiques d'ordre quatre (et même au-delà). Le contexte sera principalement celui de l'opérateur de Paneitz-Branson: cependant, nous nous référerons souvent au contexte euclidien, en particulier en ce qui concerne la dimension quatre. Plus précisément, soit (M^4, g) une variété riemannienne compacte sans bord de dimension quatre. En 1983, Paneitz [76] définit l'opérateur

$$(29) \quad P_g^4(u) := \Delta_g^2 u - \operatorname{div}_g \left(\left(\frac{2}{3} R_g g - 2 \operatorname{Ric}_g \right) du \right)$$

pour $u \in C^4(M)$. Ici, Ric_g est le tenseur de Ricci et R_g est toujours la courbure scalaire. Cet opérateur est invariant conforme au sens suivant: si $\tilde{g} = e^{2u}g$, $u \in C^\infty(M)$, est une métrique conforme à g , alors l'opérateur $P_{\tilde{g}}^4$ est relié de façon simple à g par la relation

$$(30) \quad P_{\tilde{g}}^4 = e^{-4u} P_g^4.$$

Cette formule est le pendant quadri-dimensionnel de la formule (10) d'invariance conforme en dimension deux. À cet opérateur, Branson [30] a associé une courbure, appelée la Q -courbure, définie par

$$(31) \quad Q_g^4 := \frac{1}{6} \Delta_g R_g + \frac{1}{6} R_g^2 - \frac{1}{2} |\operatorname{Ric}_g|_g^2.$$

Dans une classe conforme, deux courbures sont reliées entre elles par une relation très simple: si $\tilde{g} = e^{2u}g$, alors

$$P_{\tilde{g}}^4 u + Q_{\tilde{g}}^4 = Q_g^4 e^{4u} \text{ sur } M.$$

On renvoie à Chang [36] pour plus de précisions sur cet opérateur. De même qu'à l'ordre deux, cet opérateur se généralise aux dimensions supérieures. En effet, sur une variété (M^n, g) de dimension $n \geq 5$, Branson a défini l'opérateur

$$P_g^n(u) := \Delta_g^2 u - \operatorname{div}_g((a_n R_g g - b_n \operatorname{Ric}_g) du) + \frac{n-4}{2} Q_g^n u$$

pour $u \in C^4(M)$, avec $a_n := \frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)}$, $b_n := \frac{4}{n-2}$ et

$$Q_g^n := \frac{1}{2(n-1)} \Delta_g R_g + \frac{n^3 - 4n^2 + 16n - 16}{8(n-1)^2(n-2)^2} R_g^2 - \frac{2}{(n-2)^2} |\operatorname{Ric}_g|_g^2.$$

est la Q -courbure. Tout comme le laplacien conforme, l'opérateur de Paneitz-Branson est invariant conforme: si $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-4}}g$, $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$, est une métrique conforme à g , alors $P_{\tilde{g}}^n$ est relié à P_g^n par la formule

$$P_{\tilde{g}}^n \varphi = u^{-\frac{n+4}{n-4}} P_g^n(u\varphi)$$

pour tout $\varphi \in C^\infty(M)$. Ainsi, pour reprendre la terminologie de l'introduction, l'opérateur de Paneitz-Branson est un opérateur métrique conformément covariant de bidegré $(\frac{n-4}{2}, \frac{n+4}{2})$ et il vérifie (1) avec $k = 2$.

Toujours en dimension $n \geq 5$, en prenant $\varphi \equiv 1$, on obtient la relation

$$(32) \quad P_g^n u = f u^{\frac{n+4}{n-4}}, \quad u > 0 \text{ avec } f = \frac{n-4}{2} Q_{\tilde{g}}^n.$$

On peut alors se demander sous quelles hypothèses une fonction $f \in C^\infty(M)$ est Q -courbure d'une métrique conforme à g . Par ailleurs, dans l'esprit de la première

partie sur l'ordre deux, on pourra étudier les propriétés de compacité des solutions d'une équation de type (32). La difficulté commune avec l'ordre deux provient d'un exposant critique autant que de l'invariance conforme. Concernant l'exposant critique, soit

$$H_2^2(M) := \{\text{complété de } C_c^\infty(M) \text{ pour } \|\cdot\|_{H_2^2}\}$$

où $\|u\|_{H_2^2} := \|u\|_2 + \|\nabla u\|_2 + \|\nabla^2 u\|_2$. Il suit des théorèmes de Sobolev que $H_2^2(M)$ se plonge dans $L^{2^\sharp}(M)$, avec $2^\sharp := \frac{2n}{n-4}$ et que ce plongement est continu. Les solutions de (32) sont, à homothétie près, les points critiques de la fonctionnelle

$$(33) \quad \frac{\int_M u P_g^n u \, dv_g}{\left(\int_M f |u|^{2^\sharp} \, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}}$$

définie pour $u \in H_2^2(M) \setminus \{0\}$ dès que $f > 0$. Ici, le numérateur est à prendre au sens des distributions. Tout comme à l'ordre deux, la technique de minimisation fonctionne mal car le plongement $H_2^2(M) \hookrightarrow L^{2^\sharp}(M)$ n'est pas compact. La non-compacité est illustrée par la famille de fonctions suivante: soit $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in M$ et soit $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}$ telle que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mu_\alpha = 0$, on définit alors

$$(34) \quad w_\alpha(x) := \eta_{x_\alpha}(x) \left(\frac{\mu_\alpha}{\mu_\alpha^2 + \frac{d_g(x, x_\alpha)^2}{\sqrt{n(n-4)(n^2-4)}}} \right)^{\frac{n-4}{2}} \quad \text{pour } x \in M \text{ et } \alpha > 0$$

où η_{x_α} est définie comme suit: $\eta_{x_\alpha}(x) := \eta(\exp_{x_\alpha}^{-1}(x))$ pour $d_g(x, x_\alpha) < i_g(M)$ et 0 sinon, avec $\eta \in C_c^\infty(B_{i_g(M)}(0))$ qui est telle que $\eta(x) \equiv 1$ dans $B_{i_g(M)/2}(0)$. Un calcul rapide montre qu'il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|w_\alpha\|_{H_2^2} = c_1$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|w_\alpha\|_{L^{2^\sharp}} = c_2$ et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|w_\alpha\|_{L^q} = 0$ pour tout $q \in [1, 2^\sharp)$. Ceci pose problème tant pour les questions d'existence que pour les questions de compacité. On renvoie ici à la section précédente pour plus de développements sur ce phénomène.

Considérons maintenant l'invariance conforme. On s'intéressera à des solutions $u \in C^4(M)$ de

$$(35) \quad \Delta_g^2 - \text{div}_g(Adu) + au = u^{2^\sharp-1}, \quad u > 0$$

avec $A \in \Lambda_{(2,0)}^{1,\theta}(M)$ un champ de tenseur deux fois covariant et $a \in C^{0,\theta}(M)$, $\theta \in (0, 1)$. Les questions posées à l'ordre deux s'étendent à l'ordre quatre. Soit une suite $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^4(M)$ de solutions de (35): existe-t-il $u \in C^4(M)$ telle que, à extraction près,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} u_\alpha = u \text{ dans } C^4(M)?$$

Là encore, l'invariance par changement d'échelle va générer un phénomène de concentration. En effet, soit $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in M$ et soit $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mu_\alpha = 0$. On pose alors, comme dans (7)

$$\tilde{u}_\alpha(x) := \mu_\alpha^{\frac{n-4}{2}} u_\alpha(\exp_{x_\alpha}(\mu_\alpha x))$$

pour $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $|x| < \mu_\alpha^{-1} i_g(M)$ (on a assimilé l'espace tangent à \mathbb{R}^n). La nouvelle fonction \tilde{u}_α vérifie alors

$$\Delta_{g_\alpha}^2 \tilde{u}_\alpha - \mu_\alpha^2 \text{div}_{g_\alpha}((\exp_{g_\alpha}^* A)(\mu_\alpha x) d\tilde{u}_\alpha) + \mu_\alpha^4 a(\exp_{x_\alpha}(\mu_\alpha x)) \tilde{u}_\alpha = u_\alpha^{2^\sharp-1}$$

dans $B_{\mu_\alpha^{-1}i_g(M)}(0)$. Si la famille \tilde{u}_α converge dans C^4 lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$ vers une fonction $v > 0$, alors v est solution de l'équation limite

$$\Delta_\xi^2 v = v^{2^\sharp - 1} \text{ sur } \mathbb{R}^n.$$

Les solutions de cette équation sont explicites et ont été déterminées par C.S.Lin [69]: il existe $\lambda > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$(36) \quad v(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + \frac{|x-x_0|^2}{\sqrt{n(n-4)(n^2-4)}}}} \right)^{\frac{n-4}{2}} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Du coup, dans le cas $x_0 = 0$ et $\lambda = 1$, en faisant le changement de variable inverse, on récupère que, du moins pour les points x suffisamment proches de x_α , $u_\alpha(x)$ est proche de

$$(37) \quad B_\alpha^{(4)}(x) := \eta_{x_\alpha}(x) \left(\frac{\mu_\alpha}{\mu_\alpha^2 + \frac{d_g(x, x_\alpha)^2}{\sqrt{n(n-4)(n^2-4)}}}} \right)^{\frac{n-4}{2}},$$

qui est la fonction w_α définie en (34). Pour l'ordre quatre, les fonctions $B_\alpha^{(4)}$ ci-dessus seront qualifiées de bulles. Ici encore, on montrera que le défaut de compacité est particulièrement bien décrit par les bulles.

Comme à l'ordre deux, les fonctions v ci-dessus sont reliées aux inégalités de Sobolev. En effet, il suit du théorème de Sobolev qu'il existe $c > 0$ tel que $\|u\|_{2^\sharp} \leq c \|\Delta_\xi u\|_2$ pour tout $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. En posant $D_2^2(\mathbb{R}^n)$ le complété de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $u \mapsto \|\Delta_\xi u\|_2$, on pose alors

$$(38) \quad \frac{1}{K_0(n)^2} := \inf_{u \in D_2^2(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_\xi u)^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^\sharp} dx \right)^{\frac{2}{2^\sharp}}}.$$

Cette constante est explicite et a été calculée ainsi que ses extrémales par Edmunds-Fortunato-Jannelli [50], Lieb [68] et Lions [70]: les extrémales sont, à multiplication par un scalaire près, de la forme (36). Du coup, pour chaque fonction v , on obtient

$$\|v\|_{2^\sharp}^{\frac{2^\sharp}{2}} = \frac{1}{K_0(n)^{\frac{n}{2}}},$$

et la norme ne peut pas être arbitrairement petite. Puis, comme à l'ordre deux, on obtient pour une bulle que

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|B_\alpha^{(4)}\|_{2^\sharp}^{\frac{2^\sharp}{2}} = \frac{1}{K_0(n)^{\frac{n}{2}}}.$$

Ces difficultés étaient communes avec l'ordre deux. Mais l'ordre quatre va poser une nouvelle difficulté qui est spécifique aux itérées du laplacien: l'absence (en général) de principe de comparaison. Concernant la terminologie, on dira qu'un opérateur P défini sur une variété compacte sans bord vérifie le principe de comparaison si

$$\forall u \in C^\infty(M), Pu \geq 0 \Rightarrow u > 0 \text{ ou } u \equiv 0.$$

À titre d'exemple, l'opérateur $\Delta_g + a$ vérifie le principe de comparaison si et seulement s'il est coercif. En revanche, pour un opérateur elliptique d'ordre quatre, une telle caractérisation est fautive: il existe des opérateurs elliptiques d'ordre quatre

coercifs ne vérifiant pas le principe de comparaison. Pour un opérateur coercif, la positivité de la fonction de Green implique que le principe de comparaison est satisfait.

Pourquoi ce principe est-il si crucial? Tout d'abord, suivant la stratégie à l'ordre deux, nous sommes amenés à chercher à minimiser la fonctionnelle (33). Admettons que $u \in H_2^2(M) \setminus \{0\}$ en soit un minimiseur: si P_g^n est coercif et vérifie le principe de comparaison, alors on peut montrer (voir Esposito-Robert [5], Djadli-Hebey-Ledoux [41]) qu'un tel minimiseur est nécessairement de signe constant et du coup, à homothétie près, u est une solution positive de (32) et $Q_{\frac{u}{u^{\frac{4}{n-4}}g}}^n = \frac{2}{n-4}f$. Or, en général, il n'est pas possible de dire si l'opérateur P_g^n vérifie le principe de comparaison ou pas, et donc la méthode de minimisation ne permet pas de conclure. Le principe de comparaison est aussi fondamental pour l'étude de la compacité et du contrôle ponctuel par des bulles (tout comme à l'ordre deux, il existe une décomposition de type Struwe pour les suites de Palais-Smale, voir plus loin le théorème 2.4 de Hebey-Robert [3]): dans la preuve du théorème 1.2 à l'ordre deux, on a fait une utilisation intensive du principe du maximum pour la preuve du théorème 1.2. Bref, ce principe de comparaison intervient fréquemment et il va falloir pallier à son absence à l'ordre quatre.

2.1. Résultats d'existence. Même si, en général, il n'est pas possible de dire si l'opérateur de Paneitz-Branson satisfait le principe de comparaison, on peut cependant montrer qu'il le vérifie si la métrique g est d'Einstein à courbure scalaire positive (des résultats sont obtenus dans le cas localement conformément plat par Qing-Raske [77, 78]). Il reste donc à montrer que l'infimum de la fonctionnelle (33) est atteint. Ici, il est possible d'utiliser des techniques issues de l'ordre deux: la non-compacité étant quantifiée, on montre que si l'infimum de la fonctionnelle (33) est assez petit, on récupère de la compacité et donc l'existence de minimiseurs. Il suffit alors d'évaluer la fonctionnelle en les bulles (37). De nombreux résultats d'existence s'en suivent. À titre d'illustration, on présente celui-ci:

Théorème 2.1 (Esposito-Robert [5], 2002). *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 8$. On suppose que (M, g) est d'Einstein et que l'opérateur P_g^n est coercif. Soit $f \in C^\infty(M)$, $f > 0$. On suppose qu'il existe $x_0 \in M$ tel que $\max_M f = f(x_0)$, $\Delta_g f(x_0) = 0$ et*

$$\begin{aligned} & \frac{4(n^2 - 4n - 4)}{3(n+2)} |Weyl_g|_g^2(x_0) \\ & + (n-6)(n-8) \frac{\Delta_g^2 f}{f}(x_0) + 2(n-6)(n-8) \frac{(\nabla^2 f, Ric_g)_g}{f}(x_0) > 0 \end{aligned}$$

où $|Weyl_g|_g$ est la norme du tenseur de Weyl. Alors il existe une métrique \tilde{g} conforme à g telle que $Q_{\tilde{g}}^n = f$.

La minimisation n'est pas l'unique stratégie envisagée pour trouver des solutions de (32). Considérons ici des opérateurs conformes d'ordre arbitraire. En effet, sur les variétés de dimension $n \geq 2$, et suivant les travaux de Fefferman et Graham [52], Graham-Jenne-Mason-Sparling [56] ont construit pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ un opérateur métrique conformément covariant de bidegré $(\frac{n-2k}{2}, \frac{n+2k}{2})$ noté $P_g^{n,k}$, avec la restriction $2k \leq n$ si n est pair. Chacun de ces opérateurs est différentiel et vérifie (1): c'est-à-dire $P_g^{n,k}$ est elliptique et de partie principale Δ_g^k . Lorsque

$k = 1$, on retrouve le laplacien conforme, et lorsque $k = 2$, on retrouve l'opérateur de Paneitz-Branson. À chaque opérateur est associée une courbure $Q_g^{n,k}$ qui est invariante conforme au sens suivant: si $n \neq 2k$ et si $\tilde{g} = u^{-\frac{4}{n-2k}}$, $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$, alors

$$(39) \quad P_g^{n,k} u = Q_g^{n,k} u^{\frac{n+2k}{n-2k}} \text{ sur } M.$$

Pour $n = 2k$, l'expression est différente. Pour $k = 1, 2$, on retrouve respectivement la courbure scalaire et la Q -courbure de Branson à homothétie près. Là encore, les questions de prescription de courbure se heurtent à des défauts de compacité. Ici, plutôt que de minimiser une fonctionnelle, on réécrit (39) comme $Q_g^{n,k} = u^{-\frac{n+2k}{n-2k}} P_g^{n,k} u := F_g^{n,k}(u)$. La prescription de courbure revient à étudier l'image de $F_g^{n,k}$. La stratégie visant à brutalement inverser $F_g^{n,k}$ ne fonctionne pas à cause du noyau de sa différentielle: dans le cas de la sphère, ce noyau en $Q_h^{n,k}$ contient les premières harmoniques sphériques. En revanche, en ajoutant de la structure à la fonction à prescrire et en étudiant précisément le noyau ci-dessus, on montre le résultat suivant:

Théorème 2.2 (Delanoë-Robert [20], 2006). *Soit (\mathbb{S}^n, h) la sphère unité munie de sa métrique standard, et soit $k \geq 1$ tel que $2k \leq n$ si n est pair. Soit G un groupe d'isométries de (\mathbb{S}^n, h) agissant sans point fixe (c'est-à-dire que le cardinal de chaque orbite est supérieur ou égal à 2). Alors pour tout $\theta \in (0, 1)$, il existe $\epsilon(\theta) > 0$ tel que pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{S}^n)$ invariante par G vérifiant*

$$(40) \quad \|f - Q_h^{n,k}\|_{C^{0,\theta}(\mathbb{S}^n)} < \epsilon(\theta),$$

alors il existe \tilde{h} conforme à h telle que $Q_{\tilde{h}}^{n,k} = f$.

Dans le cas $k = 1$, ce résultat fut prouvé par Delanoë [39]. Notons qu'on peut se passer de l'hypothèse (40) dans le cas $k = 1, n = 3$ (Hebey [59]) ainsi que dans le cas $k = 2, n = 5$ (Robert [6]): c'est dans ces deux cas une analyse du phénomène d'explosion des solutions qui est utilisée.

Les quelques résultats mentionnés ici concernant l'existence ne sont pas exhaustifs, de nombreuses autres méthodes peuvent être employées. Les questions d'existence n'étant pas le point central de ce mémoire, nous n'en dirons pas plus.

2.2. Résultats de compacité. Davantage dans l'esprit de la première partie, on s'intéresse à des propriétés de compacité associées aux opérateurs d'ordre quatre. On considère des fonctions $u \in C^4(M)$ solutions de l'équation

$$(41) \quad \Delta_g^2 u + b \Delta_g u + cu = u^{2^\sharp - 1}, \quad u > 0$$

avec $b, c \in \mathbb{R}$, $b, c > 0$. Notons que dans le cas d'une variété d'Einstein, l'opérateur géométrique P_g^n s'écrit comme ci-dessus avec

$$b = \frac{n^2 - 2n - 4}{2n(n-1)} R_g \text{ et } c = \frac{(n-4)(n^2-4)}{16n(n-1)^2} R_g^2.$$

Considérons, pour $\Lambda > 0$, l'ensemble

$$\mathcal{S}_\Lambda := \{u \in C^4(M) / u \text{ vérifie (41) et } \|u\|_{2^\sharp} \leq \Lambda\}.$$

Suivant le programme initié par Schoen [83], on cherche à déterminer si l'ensemble \mathcal{S}_Λ est compact (il est non vide car il contient une fonction constante pour Λ assez grand). Dans cet esprit, considérons deux suites $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}, (b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}$ telles que

$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} a_\alpha = a_\infty > 0$ et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} b_\alpha = b_\infty > 0$ ainsi que les fonctions $u \in C^4(M)$ solutions de

$$(42) \quad \Delta_g^2 u + b_\alpha \Delta_g u + c_\alpha u = u^{2^\sharp - 1}, \quad u > 0.$$

On dira que l'équation (42) est compacte si pour toute suite $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^4(M)$ solution de (42) telle que $\|u_\alpha\|_{2^\sharp} = O(1)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, alors il existe $u \in C^4(M)$ telle que

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} u_\alpha = u \text{ dans } C^4(M)$$

à extraction près. Là encore, dire si l'équation (42) est compacte ou non n'est pas aisé à cause de l'exposant 2^\sharp et de l'invariance conforme. À titre d'exemple, plaçons-nous sur la sphère unité (\mathbb{S}^n, h) : l'opérateur P_h^n est alors à coefficients constants et s'écrit

$$P_h^n = \Delta_h^2 + \bar{\alpha}_n \Delta_h + \bar{a}_n \text{ avec } \bar{\alpha}_n := \frac{n^2 - 2n - 4}{2} \text{ et } \bar{a}_n := \frac{(n-4)n(n^2-4)}{16}$$

et l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{u \in C^4(\mathbb{S}^n) / P_h^n u = u^{2^\sharp - 1}, u > 0\}$$

est explicite: en effet, on a

$$\mathcal{S} = \{u_{\beta, x_0} / \beta > 1 \text{ et } x_0 \in \mathbb{S}^n\}$$

avec

$$(43) \quad u_{\beta, x_0}(x) := \bar{a}_n^{\frac{n-4}{8}} \left(\frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta - \cos d_h(x, x_0)} \right)^{\frac{n-4}{2}}$$

pour $x \in \mathbb{S}^n$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{S}^n$, on a

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} u_{\beta, x_0}(x_0) = +\infty \text{ et } \lim_{\beta \rightarrow 1} u_{\beta, x_0} = 0 \text{ dans } C_{loc}^4(\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}).$$

De plus, la norme H_2^2 de u_{β, x_0} est bornée et converge vers une constante positive. Plus précisément, on a

$$\|u_{\beta, x_0}\|_{H_2^2}^2 = K_0(n)^{-\frac{n}{2}}$$

où $K_0(n)$ est la meilleure constante dans le plongement de Sobolev euclidien introduite dans (38). Par passage à la projection stéréographique, les fonctions u_{β, x_0} correspondent aux fonctions (36), qui sont les extrémales pour $K_0(n)$.

Afin d'énoncer le théorème général, on définit le $(2, 0)$ -tenseur

$$A_g := a_n R_g g - b_n Ric_g,$$

de sorte que l'opérateur de Paneitz-Branson s'écrit $P_g^n = \Delta_g^2 - \operatorname{div}_g(A_g d) + \frac{n-4}{2} Q_g^n$. La forme bilinéaire $A_g(x)$ étant symétrique, on la diagonalise selon le produit scalaire $g(x)$ et on note $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$ ses valeurs propres. On note alors

$$\lambda_{min} := \min\{\lambda_i(x) / x \in M, i \in \{1, \dots, n\}\}$$

et

$$\lambda_{max} := \max\{\lambda_i(x) / x \in M, i \in \{1, \dots, n\}\},$$

puis on définit l'ensemble critique

$$S_c := [\lambda_{min}, \lambda_{max}].$$

Cet ensemble désigne le lieu où se situe l'opérateur géométrique lorsqu'on se concentre sur le terme d'ordre deux. On obtient alors le résultat suivant:

Théorème 2.3 (Hebey-Robert-Wen [14], 2006). *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 6$. Soient deux suites $(b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}, (c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ telles que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} b_\alpha = b_\infty > 0$ et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} c_\alpha = c_\infty > 0$. On suppose de plus que $c_\alpha \leq b_\alpha^2/4$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. Alors l'équation (42) est compacte dans chacun des deux cas suivants:*

- (i) $b_\infty \notin S_c$ si $n \geq 9$,
- (ii) $b_\infty < \min S_c$ si $n = 6, 7, 8$.

En d'autres termes, on récupère de la compacité dès que l'opérateur limite $\Delta_g^2 + b_\infty \Delta_g + c_\infty$ est loin de son modèle géométrique P_g^n : ce point met en évidence que, lorsqu'on considère une équation, ce n'est pas tant l'exposant $2^\sharp = \frac{2n}{n-4}$ qui est critique, mais l'opérateur géométrique P_g^n . Dans le cas d'une variété d'Einstein, on obtient $A_g = \frac{n^2-2n-4}{2n(n-1)} R_g$, et du coup $S_c = \{\frac{n^2-2n-4}{2n(n-1)} R_g\}$ est un singleton: la condition (i) s'écrit alors $b_\infty \neq \frac{n^2-2n-4}{2n(n-1)} R_g$ et la condition (ii) s'écrit $b_\infty < \frac{n^2-2n-4}{2n(n-1)} R_g$.

Ce résultat est à mettre en parallèle avec le résultat d'Olivier Druet [44] (voir la discussion en ce sens après l'énoncé du théorème 1.4) qui a montré que l'équation $\Delta_g u + h_\alpha u = u^{\frac{n+2}{n-2}}$ est compacte en dimension $n \geq 4$, $n \neq 6$ dès que $h_\infty(x) \neq \frac{n-2}{4(n-1)} R_g(x)$ pour tout $x \in M$, avec $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} h_\alpha = h_\infty$ dans $C^2(M)$. Pour plus de précisions, en particulier pour la dimension 3 et un terme linéaire sous la courbure scalaire, on renvoie à Druet [44].

Quelques questions se posent à ce niveau concernant l'optimalité de ce théorème. Tout d'abord, l'exemple (43) des fonction u_{β, x_0} nous indique que la condition d'être en dehors de l'ensemble critique ne peut pas être supprimée (dans le cas de la sphère, $S_c = \{\bar{\alpha}_n\}$). D'autre part, pour les familiers de la compacité dans l'équation de Yamabe, imposer une borne uniforme sur l'énergie (c'est-à-dire la norme L^{2^\sharp}) peut sembler superflu (dans de multiples situations, être solution de l'équation de Yamabe (11) impose obligatoirement une borne uniforme sur la norme $L^{\frac{2n}{n-2}}$). Elle ne l'est pas ici: en effet, plaçons-nous sur la sphère standard (\mathbb{S}^n, h) avec $n \geq 12$. On construit dans Hebey-Robert-Wen [14] des suites de fonctions $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^4(\mathbb{S}^n)$, $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_h^2 U_\alpha + \bar{\alpha}_n \Delta_h U_\alpha + c_\alpha U_\alpha = U_\alpha^{2^\sharp - 1}, U_\alpha > 0 & \text{dans } \mathbb{S}^n \\ \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} c_\alpha = \bar{\alpha}_n & \text{dans } C^1(\mathbb{S}^n) \\ \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|U_\alpha\|_{2^\sharp} = +\infty & \end{array} \right.$$

et, bien que les U_α soient chacun solution de l'équation, leur énergie explose. L'équation est donc extrêmement instable.

Une autre question naturelle concerne la dimension: pour les petites dimensions ($n = 6, 7, 8$), on demande que l'équation limite soit "en dessous" de l'opérateur géométrique, sans avoir la possibilité d'être au-dessus, comme c'était le cas en dimension $n \geq 9$. L'exemple suivant apporte un début d'explication: plaçons-nous sur la sphère standard (\mathbb{S}^8, h) . On construit dans Hebey-Robert-Wen [14] des suites

de fonctions $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^4(\mathbb{S}^8)$, $(b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}, (c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^1(\mathbb{S}^8)$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_h^2 U_\alpha + b_\alpha \Delta_h U_\alpha + c_\alpha U_\alpha = U_\alpha^{2^\sharp - 1}, U_\alpha > 0 & \text{dans } \mathbb{S}^n \\ \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} b_\alpha = \bar{\alpha}_n, \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} c_\alpha = \bar{a}_n & \text{dans } L^p(\mathbb{S}^n) \forall p \geq 1 \\ \|U_\alpha\|_{2^\sharp} = O(1) & \text{lorsque } \alpha \rightarrow +\infty \\ \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|U_\alpha\|_\infty = +\infty & \end{array} \right\}$$

De plus, dans cet exemple, $\|U_\alpha\|_\infty = U_\alpha(x_\alpha)$ avec $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} x_\alpha = x_\infty$ et

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} b_\alpha(x_\infty) > \bar{\alpha}_n$$

et c'est ce terme qu'il faut considérer dans la preuve de la compacité. Ainsi, en dimension 8, bien que l'opérateur soit, en un certain sens, au-dessus de l'opérateur géométrique sur une zone critique, on n'a pas de compacité. Ces deux exemples prennent pour $(a_\alpha), (b_\alpha)$ des suites de fonctions, dont certaines ne convergent que dans L^p : cependant, ils donnent des indications fortes concernant l'utilité de la borne sur l'énergie et sur la spécificité de la dimension 8. À ce propos, le résultat de compacité d'Olivier Druet [44] exclut la dimension 6, dimension qui est ici remplacée par la dimension 8. Dans le cas des équations critiques d'ordre deux, Druet-Hebey [48] ont exhibé des exemples similaires à ceux décrits ci-dessus. Parmi les autres références possibles sur la compacité, on peut citer Djadli-Malchiodi-Ould Ahmedou [42] et Qing-Raske [77, 78].

Quelques mots sur la preuve du théorème 2.3. Considérons des suites $(b_\alpha), (c_\alpha)$ comme dans le théorème 2.3 et une suite $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^4(M)$ solution de (42). On suppose qu'il existe $\Lambda > 0$ tel que $\|u_\alpha\|_{2^\sharp} \leq \Lambda$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. La suite $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ peut être décrite en terme de bulles par une décomposition de type Struwe comme à l'ordre deux. On définit la fonctionnelle

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_M (\Delta_g u)^2 dv_g + \frac{b_\infty}{2} \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + \frac{c_\infty}{2} \int_M |u|^2 dv_g - \frac{1}{2^\sharp} \int_M |u|^{2^\sharp} dv_g$$

pour $u \in H_2^2(M)$. On dit alors que la suite $(v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in H_2^2(M)$ est une suite de Palais-Smale pour J si $(J(v_\alpha))_{\alpha \in \mathbb{N}}$ est bornée et si $(J'(v_\alpha))_{\alpha \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers 0 dans $H_2^2(M)'$. En particulier, la suite (u_α) est une suite de Palais-Smale pour J . On obtient le résultat suivant:

Théorème 2.4 (Hebey-Robert [3], 2001). *Soit $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in H_2^2(M)$ une suite de Palais-Smale pour J . On suppose que $u_\alpha \geq 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. Alors, à extraction près, il existe $u_\infty \in H_2^2(M)$ une solution faible de*

$$\Delta_g^2 u_\infty + b_\infty \Delta_g u_\infty + c_\infty u_\infty = u_\infty^{2^\sharp - 1},$$

il existe $N \in \mathbb{N}$, il existe des suites $(x_{1,\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}}, \dots, (x_{N,\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}} \in M$, il existe des suites $(\mu_{1,\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}}, \dots, (\mu_{N,\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mu_{i,\alpha} = 0$ et

$$(44) \quad u_\alpha = u_\infty + \sum_{i=1}^N \eta_{x_{i,\alpha}}(x) \left(\frac{\mu_{i,\alpha}}{\mu_{i,\alpha}^2 + \frac{d_g(\cdot, x_{i,\alpha})^2}{\sqrt{n(n-4)(n^2-4)}}} \right)^{\frac{n-4}{2}} + R_\alpha$$

où $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} R_\alpha = 0$ fortement dans $H_2^2(M)$ et les fonctions $\eta_{x_{i,\alpha}}$ sont définies comme en (34). De plus, on a

$$J(u_\alpha) = J(u_\infty) + \frac{2N}{nK_0(n)^{\frac{n}{2}}} + o(1)$$

avec $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} o(1) = 0$.

En d'autres termes, l'analogie du théorème 1.1 de Struwe a lieu à l'ordre 4, et on se retrouve de nouveau avec une décomposition en somme de bulles. De plus, l'absence de compacité (et donc l'existence de bulles) se traduit par l'existence d'au moins un niveau d'énergie $2n^{-1}K_0(n)^{-\frac{n}{2}}$. On remarquera que si $(B_\alpha^{(4)})_{\alpha \in \mathbb{N}}$ est une bulle comme dans (37), on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} J(B_\alpha^{(4)}) = \frac{2}{nK_0(n)^{\frac{n}{2}}}.$$

Une décomposition existe pour des fonctions changeant de signe (Hebey-Robert [3]) et même pour un exposant $2^* - \epsilon_\alpha$ avec $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \epsilon_\alpha = 0$ (Robert, thèse de doctorat).

On écrit alors la décomposition (44) pour la suite (u_α) prise au début de la preuve. À ce niveau, on souhaite avoir une décomposition C^0 comme dans le théorème 1.2: or, on l'a déjà dit, la preuve de ce résultat à l'ordre deux fait fondamentalement intervenir le principe de comparaison qui nous fait défaut à l'ordre quatre en général. Il faut donc développer d'autres méthodes plus souples. On s'inspire de travaux de Devillanova-Solimini [40]. En analysant précisément le phénomène de concentration, on parvient tout de même à obtenir une description ponctuelle sur un domaine bien particulier. Plus précisément, soit $\mu_\alpha := \max\{\mu_{i,\alpha}/i \in \{1, \dots, n\}\}$: quitte à extraire, on peut supposer que $\mu_\alpha = \mu_{1,\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, et on pose alors $x_\alpha := x_{1,\alpha}$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que

$$(45) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} u_\alpha(\exp_{x_\alpha}(\sqrt{\mu_\alpha}x)) = \frac{A}{|x|^{n-4}} + \varphi(x)$$

pour tout $x \in B_{2\delta}(0) \setminus \{0\}$, de plus, cette convergence a lieu dans $C_{loc}^3(B_{2\delta}(0) \setminus \{0\})$. Ici, $A > 0$ et $\varphi \in C^4(B_{2\delta}(0))$ vérifie $\Delta^2 \varphi = 0$. De plus, on a $\varphi(0) > 0$ si $u_\infty \not\equiv 0$. En prenant formellement $R_\alpha = 0$ dans (44), on trouverait que la limite ci-dessus vaudrait

$$u_\infty(x_\infty) + d_n |x|^{4-n}$$

avec $x_\infty := \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} x_\alpha$ et $d_n \in \mathbb{R}_{>0}$: la limite (45) rend donc bien compte de ce qui est escompté.

L'étape suivante consiste à écrire une identité de type Pohozaev sur une boule de centre x_α et de rayon $\delta\sqrt{\mu_\alpha}$. Une telle identité fait intervenir des termes de bord qui sont réglés par (45), et une intégrale sur la boule qui fait intervenir $A_g - b_\alpha g$, un tenseur qui a un signe par hypothèse. Dans le cas $u_\infty \not\equiv 0$, les hypothèses du théorème conduisent à une absurdité. Dans le cas $u_\infty \equiv 0$, la preuve est différente: on montre que la norme L^2 du gradient et la norme L^2 se concentrent autour des $x_{i,\alpha}$, $i \in \{1, \dots, N\}$ et on retrouve une contradiction par une autre identité de Pohozaev, et la preuve est terminée.

D'autres résultats, en particulier des situations dans lesquelles on est assuré d'avoir la limite faible non nulle, sont discutés dans Hebey-Robert-Wen [14].

L'identité de type Pohozaev joue un rôle important dans la preuve. À l'origine, un tel type d'identité est destiné à exhiber des obstructions à l'existence de solutions d'EDP euclidiennes. Dans le contexte d'une variété riemannienne, on montre aussi un résultat d'obstruction:

Théorème 2.5 (Felli-Hebey-Robert [12], 2005). *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 6$. Pour $\alpha > 0$, on pose*

$$E(\alpha) := \inf \left\{ \|u\|_{2^\sharp} / \Delta_g^2 u + \alpha \Delta_g u + \frac{\alpha^2}{4} u = u^{2^\sharp-1}, u > 0 \right\}.$$

Alors

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha) = +\infty.$$

Ainsi, l'explosion des coefficients de l'opérateur implique l'explosion de l'énergie des solutions de l'équation. Comme annoncé, ceci est un résultat d'obstruction: pour tout réel $\Lambda > 0$, il existe $\alpha(\Lambda) > 0$ tel qu'il n'existe pas de solution $u > 0$ telle que $\Delta_g^2 u + \alpha \Delta_g u + \frac{\alpha^2}{4} u = u^{2^\sharp-1}$ et $\|u\|_{2^\sharp} \leq \Lambda$ dès que $\alpha \geq \alpha(\Lambda)$.

Jusqu'ici, il a été essentiellement question de l'opérateur géométrique pour dire que lorsqu'on en est loin, on récupère de la compacité. Comme corollaire de l'analyse précédente, on obtient un résultat de compacité pour l'opérateur géométrique dans l'esprit de Schoen [83]:

Théorème 2.6 (Hebey-Robert [10], 2004). *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$. On suppose que l'opérateur P_g^n est de type positif. Soit $(\epsilon_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in [0, 2^\sharp - 2)$ telle que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \epsilon_\alpha = 0$. Soit $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in C^4(M)$ une suite telle que $P_g^n u_\alpha = u_\alpha^{2^\sharp-1-\epsilon_\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $\Lambda > 0$ tel que $\|u_\alpha\|_{2^\sharp} \leq \Lambda$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $\theta \in (0, 1)$, il existe $C > 0$ tel $\|u_\alpha\|_{C^{4,\theta}(M)} \leq C$. En particulier, à extraction près, (u_α) est convergente dans $C^4(M)$.*

Précisons la terminologie. Dans le cas d'un opérateur P_g^n coercif, on note G_g sa fonction de Green. Pour tout $x_0 \in M$ et pour toute métrique \tilde{g} plate conforme à g au voisinage de x_0 , il existe alors $\mu_{\tilde{g}}(x_0) \in \mathbb{R}$ tel que

$$(46) \quad G_{\tilde{g}}(x_0, x) = \frac{1}{2(n-2)(n-4)\omega_{n-1}d_{\tilde{g}}(x, x_0)^{n-4}} + \mu_{\tilde{g}}(x_0) + o(1)$$

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} o(1) = 0$. On dira que P_g^n est de type positif si

- (i) P_g^n est coercif,
- (ii) sa fonction de Green vérifie $G_g > 0$,
- (iii) $\forall x_0 \in M$ et $\forall \tilde{g}$ plate conforme à g au voisinage de x_0 , on a $\mu_{\tilde{g}}(x_0) > 0$.

L'assertion (iii) est vraie dès qu'elle est vraie pour une métrique \tilde{g} plate autour de x_0 : la quantité $\mu_{\tilde{g}}(x_0)$ dépend du choix de la métrique conforme plate, mais son signe est indépendant de ce choix. Il s'agit de l'analogue pour l'opérateur de Paneitz-Branson de la masse définie par Schoen et Yau [86]. D'après l'exemple (43) et le théorème 2.6, l'opérateur P_h^n n'est pas de type positif: plus précisément, il satisfait (i) et (ii), mais en tout point, $\mu_{\tilde{g}}(x_0) = 0$ avec \tilde{g} plate au voisinage de x_0 .

Concernant la preuve de ce théorème, on raisonne encore par l'absurde. Dans ce cas, des bulles se forment et leur analyse asymptotique montre qu'il existe $x_1, \dots, x_N \in M$, $\lambda_{ij} > 0$ pour $i, j \in \{1, \dots, N\}$ tels que pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, si \tilde{g} est conforme à g et plate au voisinage de x_i , on a

$$\mu_{\tilde{g}}(x_i) + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} G_{\tilde{g}}(x_i, x_j) \leq 0.$$

Une contradiction avec les points (ii) et (iii). Du coup, il n'y a pas de bulles et on récupère de la compacité. Un résultat similaire a été démontré par Qing-Raske [77, 78].

2.3. Les spécificités de la dimension quatre. Jusqu'ici, les travaux présentés sur les opérateurs d'ordre quatre concernaient la dimension $n \geq 5$. Comme on l'a vu, l'opérateur de Paneitz est défini en dimension quatre: les questions de compacité ont aussi un sens dans ce contexte. Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension quatre compacte sans bord. Rappelons que si $\tilde{g} = e^{2u}g$, $u \in C^\infty(M)$ est une métrique conforme à g , alors les Q -courbures de ces deux métriques sont reliées par la relation

$$(47) \quad P_g^4 u + Q_g^4 = Q_{\tilde{g}}^4 e^{4u} \text{ sur } M.$$

Ici, P_g^4 est l'opérateur de Paneitz défini en (29) et Q_g^4 est la Q -courbure définie en (31). L'absence de principe de comparaison est d'autant plus problématique à l'ordre quatre qu'elle est à l'origine de phénomènes n'ayant pas lieu à l'ordre deux. Voici une illustration: concernant l'équation euclidienne associée au problème d'ordre deux, Chen et Lin ont montré le résultat suivant:

Théorème 2.7 (Chen-Lin [38], 1991). *Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tel que $e^{2u} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et*

$$\Delta_\xi u = e^{2u} \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

Alors il existe $\lambda > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$u(x) = \ln \left(\frac{\lambda}{\frac{\lambda^2}{4} + |x - x_0|^2} \right) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^2.$$

En particulier $\int_{\mathbb{R}^2} e^{2u} dx = 4\pi$.

En revanche, à l'ordre quatre, Lin a montré que les choses ne se passent pas de même et a mis en évidence un profil quadratique:

Théorème 2.8 (C.S.Lin [69], 1998). *Soit $u \in C^4(\mathbb{R}^4)$ tel que $e^{4u} \in L^1(\mathbb{R}^4)$ et*

$$(48) \quad \Delta_\xi^2 u = e^{4u} \text{ sur } \mathbb{R}^4.$$

Alors $\int_{\mathbb{R}^4} e^{4u} dx \leq 16\pi^2$. De plus,

(i) si $\int_{\mathbb{R}^4} e^{4u} dx = 16\pi^2$, alors il existe $\lambda > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$u(x) = \ln \left(\frac{\lambda\sqrt{96}}{\lambda^2\sqrt{96} + |x - x_0|^2} \right) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^4.$$

(ii) si $\int_{\mathbb{R}^4} e^{4u} dx < 16\pi^2$, alors il existe $x_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) \in \mathbb{R}^4$, il existe $a_1, \dots, a_4 \geq 0$ tels que $\sum_i a_i > 0$ et, à transformation orthogonale près,

$$u(x) = - \sum_{i=1}^4 a_i (x^i - x_0^i)^2 + O(1) \ln(2 + |x|) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^4$$

où $|O(1)| \leq C$ pour tout $x \in \mathbb{R}^4$.

Le point (ii) n'est pas vide: il existe des exemples de fonctions du second type qui soient radiales (Chang-Chen [37]) ou bien non-radiales (Wei-Ye [99]). Ce résultat présente un contraste évident avec l'ordre deux: être solution de l'équation globale d'ordre quatre n'impose pas un minimum d'énergie, et un polynôme d'ordre deux peut parasiter le comportement logarithmique. Les polynômes de degré deux sont

invisibles après application de l'opérateur biharmonique, mais ils ont une influence bien réelle. Le résultat de C.-S.Lin est révélateur des spécificités intrinsèques à la dimension quatre auxquelles nous allons devoir faire face. Dorénavant, on qualifiera le profil des solutions de type (i) de logarithmique, et celui des solutions de type (ii) de quadratique.

Considérons dans un premier temps le contexte euclidien. Soit Ω un domaine non vide de \mathbb{R}^4 et soit une suite $(V_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^0(\Omega)$ telle que

$$(49) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} V_k = 1 \text{ dans } C_{loc}^0(\Omega)$$

Soit $\Lambda > 0$ et soit une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C^4(\Omega)$ telle que

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\xi}^2 u_k = V_k e^{4u_k} \quad \text{dans } \Omega \\ \int_{\Omega} e^{4u_k} dx \leq \Lambda \end{array} \right\}$$

et ce pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il s'agit en fait de l'équation de Paneitz (47) lorsque g est la métrique euclidienne. On ne met volontairement pas de condition au bord (les conditions de type Dirichlet ou Navier forcent grossièrement la compacité). En dehors du contexte géométrique, cette équation apparaît aussi dans l'étude de l'inégalité d'Adams qui est le cas limite des plongements de Sobolev standards.

Ici encore, on cherche à savoir comment se comportent les u_k lorsque $k \rightarrow +\infty$. On dira que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $C_{loc}^3(\Omega)$ s'il existe $u \in C^3(\Omega)$ tel que, à extraction près,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = u \text{ dans } C_{loc}^3(\Omega).$$

Dans le cas contraire, on dit que la suite explose. Par exemple, soit $x_0 \in \Omega$ et une suite $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}$ une suite convergent vers 0 et considérons la suite

$$f_k(x) := \ln \left(\frac{\sqrt{96}\mu_k}{\sqrt{96}\mu_k^2 + |x - x_0|^2} \right)$$

définie pour $x \in \Omega$ et $k \in \mathbb{N}$. La fonction f_k est solution de (50) pour tout k avec $V_k \equiv 1$ et $\Lambda = 16\pi^2$. La suite (f_k) explose: en effet

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x_0) = +\infty \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = -\infty \text{ pour } x \neq x_0.$$

Par ailleurs, on a

$$e^{4f_k} dx \rightharpoonup 16\pi^2 \delta_{x_0}$$

au sens des mesures lorsque $k \rightarrow +\infty$. L'analyse du phénomène d'explosion a été largement considérée dans le contexte de la dimension deux. On citera entre autres Brézis-Merle [31], Li-Shafrir [66] et Tarantello [93]. On présente ici le résultat obtenu par Li et Shafrir:

Théorème 2.9 (Li-Shafrir [66], 1994). *Soient Σ un domaine borné non vide de \mathbb{R}^2 , une suite $(\bar{V}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^0(\Sigma)$ telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{V}_k = 1$ dans $C_{loc}^0(\Sigma)$. Soit $\Lambda > 0$ et soit une suite $(\bar{u}_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C^2(\Sigma)$ telle que*

$$\Delta_{\xi} \bar{u}_k = \bar{V}_k e^{2\bar{u}_k} \text{ dans } \Sigma \text{ et } \int_{\Sigma} e^{2\bar{u}_k} dx \leq \Lambda$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors soit la suite $(\bar{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $C_{loc}^1(\Sigma)$, soit il existe $N \in \mathbb{N}$, il existe $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N \in \Omega$, il existe $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_N \in \mathbb{N}^*$ tels que, à extraction près,

$$\bar{V}_k e^{2\bar{u}_k} dx \rightharpoonup \sum_{i=1}^N 4\pi \bar{\alpha}_i \delta_{\bar{x}_i}$$

au sens des mesures lorsque $k \rightarrow +\infty$. De plus, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{u}_k = -\infty$ uniformément localement dans $\Sigma \setminus \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N\}$.

En particulier, il y a quantification de l'énergie en cas d'explosion: si la norme L^1 de $e^{2\bar{u}_k}$ est asymptotiquement strictement inférieure à 4π , alors on a soit divergence uniforme vers $-\infty$, soit convergence (le tout à extraction près). En cas d'explosion, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\omega} \bar{V}_k e^{2\bar{u}_k} dx \in 4\pi\mathbb{N}$ pour $\omega \subset\subset \Omega$ tel que $\partial\omega \cap \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N\} = \emptyset$.

2.3.1. Le cas général. De façon surprenante une telle quantification n'a pas lieu lorsqu'on considère le bi-laplacien. En effet, pour tout $A \in (0, +\infty)$, on montre dans Adimurthi-Robert-Struwe [16] qu'il existe une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C^4(B_1(0))$ telle que u_k vérifie (50) pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $V_k \equiv 1$, $\int_{B_1(0)} e^{4u_k} dx = A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la suite (u_k) explose. De plus, l'énergie de la suite ainsi construite se concentre non pas sur des points isolés comme en dimension deux, mais le long d'un hyperplan. Non seulement on perd la quantification, mais en plus on perd la concentration en un nombre fini de points. Le résultat le plus général obtenu est le suivant:

Théorème 2.10 (Adimurthi-Robert-Struwe [16], 2006). *Soit Ω un domaine borné non vide de \mathbb{R}^4 et soient $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C^4(\Omega)$, $(V_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C^0(\Omega)$ et $\Lambda > 0$ tels que (49) et (50) aient lieu. Alors (i) soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $C_{loc}^3(\Omega)$, (ii) soit il existe un nombre fini de points $x_1, \dots, x_N \in \Omega$, il existe $\varphi \in C^4(\Omega \setminus \{x_1, \dots, x_N\})$ telle que*

$$\Delta_{\xi}^2 \varphi = 0, \varphi \leq 0, \varphi \not\equiv 0$$

et, en posant

$$S = \{\varphi = 0\} \cup \{x_1, \dots, x_N\}$$

il existe une suite $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}$ telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k = +\infty$ et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_k}{\beta_k} = \varphi \text{ dans } C_{loc}^3(\Omega \setminus S)$$

Pour finir, au voisinage de tout point $x_0 \in S$ tel que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{B_r(x_0)} u_k = +\infty$ pour tout $r > 0$, il existe des suites $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Omega$ et $(r_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x_0$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k = 0$ et, en posant

$$v_k(x) := u_k(x_k + r_k x) + \ln r_k,$$

alors soit $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $C_{loc}^3(\mathbb{R}^4)$ vers une solution de (48), soit il existe $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}$ telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma_k = +\infty$ et $\phi \leq 0$ un polynôme de degré deux non constant tels que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma_k^{-1} v_k = \phi \text{ dans } C_{loc}^3(\mathbb{R}^4).$$

En vertu des exemples précédents, on ne peut espérer plus, ce résultat est optimal. Il faut donc se donner plus de structure afin d'aller plus loin dans l'étude des $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Deux directions se présentent:

(i) sous quelle hypothèse suffisamment générale retrouve-t-on une quantification de type de celle du théorème 2.9?

(ii) sous quelle hypothèse la variété des solutions du théorème 2.8 apparaît-elle naturellement?

2.3.2. Un cas de quantification. Concernant la première question, on peut naturellement envisager au bord des conditions de Dirichlet ($u = \partial_\nu u = 0$) ou bien de Navier ($u = \Delta_\xi u = 0$): un tel type d'hypothèse implique alors une borne uniforme L^1 sur les u_k , et donc compacité relative dans $C_{loc}^3(\Omega)$ d'après le théorème précédent. Dans le cas où il existe $(c_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} c_k = -\infty$ et $u_k = c_k$, $\Delta_\xi u_k = 0$ sur $\partial\Omega$, Wei [98] a montré qu'on récupère de la quantification. Plus généralement, c'est $\Delta_\xi u_k$ qui est la clé de la quantification: en effet, soit $v \in C^4(\mathbb{R}^4)$ une solution de $\Delta_\xi^2 v = e^{4v}$ sur \mathbb{R}^4 , et posons $v_k(x) := v(kx) + \ln k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. On constate que

(i) pour tout $\delta > 0$, il existe $C(\delta) > 0$ tel que $|\Delta_\xi v_k(x)| \leq C(\delta)$ pour $x \in \mathbb{R}^4 \setminus B_\delta(0)$ et $k \in \mathbb{N}$ si v développe un profil logarithmique dans le théorème 2.8,

(ii) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta_\xi v_k = +\infty$ uniformément sur \mathbb{R}^4 si v développe un profil quadratique dans le théorème 2.8.

Dans ce cas particulier, le profil quadratique est associé à une explosion globale du laplacien. C'est aussi le cas lors de l'étude du système (50) en général: (on rappelle que le laplacien est pris avec convention de signe moins)

Théorème 2.11 (Robert [19], 2006). *Soit Ω un domaine borné non vide de \mathbb{R}^4 et soient $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C^4(\Omega)$, $(V_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C^0(\Omega)$ et $\Lambda > 0$ tels que (49) et (50) aient lieu. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\|(\Delta_\xi u_k)_-\|_{L^1(\Omega)} \leq C$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $\emptyset \neq \omega_0 \subset \Omega$ tel qu'il existe $C > 0$ tel que*

$$\|\Delta_\xi u_k\|_{L^1(\omega_0)} \leq C \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Alors soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $C_{loc}^3(\Omega)$, soit il existe $N \in \mathbb{N}$, il existe $x_1, \dots, x_N \in \Omega$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{N}^$ tels que, à extraction près,*

$$V_k e^{4u_k} dx \rightharpoonup \sum_{i=1}^N 16\pi^2 \alpha_i \delta_{x_i}$$

au sens des mesures lorsque $k \rightarrow +\infty$. De plus, $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = -\infty$ uniformément localement dans $\Omega \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$.

Il suffit donc d'avoir une borne L^1 pour $\Delta_\xi u_k$ uniquement sur un sous-ensemble ouvert de Ω . Se produit alors un phénomène de diffusion qui conduit à une borne de cette norme sur tout compact de Ω et à une élimination des profils quadratiques.

2.3.3. Le cas radial. Concernant la seconde question évoquée ci-dessus, à savoir des hypothèses raisonnables sous lesquelles on retrouverait les différents profils du théorème 2.8, les fonctions radiales fournissent un contexte propice:

Théorème 2.12 (Robert [18], 2006). *Soit $\Omega = B_1(0)$ la boule unité de \mathbb{R}^4 , et soient $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C^4(B_1(0))$, $(V_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C^0(B_1(0))$ et $\Lambda > 0$ tels que (49) et (50) aient lieu. On suppose que u_k est radiale pour tout $k \in \mathbb{N}$. On suppose que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ explose. Alors il existe $\alpha \in [0, 16\pi^2]$ tel que*

$$V_k e^{4u_k} dx \rightharpoonup \alpha \delta_0$$

au sens des mesures quand $k \rightarrow +\infty$. Plus précisément,

- (i) soit il existe $C > 0$ tel que $u_k(0) \leq C$ pour tout $k \in \mathbb{N}$: alors $\alpha = 0$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = -\infty$ uniformément localement dans $B_1(0) \setminus \{0\}$
(ii) soit $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(0) = +\infty$. Dans ce cas, pour tout $\delta \in (0, 1)$, on a

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_\delta(0) \setminus B_{Re^{-u_k(0)}}(0)} V_k e^{4u_k} dx = 0.$$

De plus, toujours dans le cas (ii), le comportement asymptotique à l'échelle $e^{-u_k(0)}$ est gouverné comme suit:

- (ii.a) si $\alpha = 16\pi^2$, alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(u_k(e^{-u_k(0)}x) - u_k(0) \right) = \ln \frac{\sqrt{96}}{\sqrt{96} + |x|^2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, et cette convergence a lieu dans $C_{loc}^3(\mathbb{R}^4)$.

- (ii.b) si $\alpha \in (0, 16\pi^2)$, alors il existe $v \in C^4(\mathbb{R}^4)$ solution de (48) tel que $\int_{\mathbb{R}^4} e^{4v} dx = \alpha$ et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(u_k(e^{-u_k(0)}x) - u_k(0) \right) = v(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, et cette convergence a lieu dans $C_{loc}^3(\mathbb{R}^4)$. Par ailleurs, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{v(x)}{|x|^2} = -\lambda$.

- (ii.c) si $\alpha = 0$, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{-2u_k(0)} \Delta_\xi u_k(0) = +\infty$ et on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_k(e^{-u_k(0)}x) - u_k(0)}{e^{-2u_k(0)} \Delta_\xi u_k(0)} = -\frac{|x|^2}{8}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, et cette convergence a lieu dans $C_{loc}^3(\mathbb{R}^4)$.

Dans [18], on exhibe des exemples des trois profils (ii.a), (ii.b) et (ii.c). Ces trois théorèmes sont indépendants et aucun ne peut être la conséquence de l'un ou des autres.

2.3.4. Le contexte géométrique. Revenons au contexte géométrique qui nous a motivé initialement. Soit (M, g) une variété de dimension quatre compacte sans bord. Considérons des fonctions $u \in C^4(M)$ solutions d'équations du type $\Delta_g^2 u - \text{div}_g(Adu) + b = fe^{4u}$, avec $b, f \in C^\infty(M)$ et $A \in \Lambda_{(2,0)}^\infty(M)$ un tenseur deux fois covariant. L'opérateur de Paneitz devient alors un cas particulier de ce type d'opérateurs. Le résultat suivant a lieu:

Théorème 2.13 (Druet-Robert [13], 2006). Soient $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}, (f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C^\infty(M)$, $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Lambda_{(2,0)}^\infty(M)$ des suites telles que $\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = b_\infty$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k = f_\infty > 0$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = A_\infty$ dans C^i pour tout $i \in \mathbb{N}$. Soit une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C^\infty(M)$ telle que

$$(51) \quad \Delta_g^2 u_k - \text{div}_g(A_k du_k) + b_k = f_k e^{4u_k} \text{ in } M$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$\text{Ker}(\Delta_g^2 - \text{div}_g(A_\infty d)) = \mathbb{R}.$$

On suppose que les (u_k) explosent. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_M b_\infty dv_g = 16\pi^2 N.$$

De plus, il existe $x_1, \dots, x_N \in M$ distincts tels que, au sens des mesures,

$$f_k e^{4u_k} dv_g \rightharpoonup 16\pi^2 \sum_{i=1}^N \delta_{x_i} \text{ lorsque } k \rightarrow +\infty.$$

En particulier, en chaque point x_i , il y a un seul niveau d'énergie, et donc pas d'accumulation de plusieurs bulles en un même point (on dit alors que les points de concentration sont isolés). Le théorème original donne en fait plus d'informations, en particulier sur la localisation des x_i 's et sur le comportement de u_k en dehors de ces points: on renvoie à l'article [13] pour ces considérations. Notons que Malchiodi [71] a démontré un théorème similaire.

Ici, c'est le noyau trivial qui rend la quantification possible. Il s'agit d'une hypothèse parfaitement raisonnable dans le contexte géométrique attendu que $\text{Ker } \Delta_g^2 = \mathbb{R}$. En revanche, sur un ouvert de \mathbb{R}^4 , le noyau de Δ_ξ^2 (les fonctions biharmoniques) est un espace extrêmement riche. D'ailleurs, concernant l'opérateur de Paneitz, même si le noyau est trivial en courbure positive (Gursky [57]), il peut devenir beaucoup plus compliqué en général (Cf Eastwood [49]): dans ce dernier type de situation, on montre dans Robert [21] que les familles de solution de (51) sont susceptibles de développer des comportements quadratiques.

2.3.5. *Une équation non-linéaire issue de l'inégalité d'Adams.* On l'a déjà dit, (50) apparaît dans l'étude de l'inégalité d'Adams. Plus précisément, soit Ω un domaine borné régulier orienté de \mathbb{R}^4 et soit $H_{2,0}^2$ le complété de $C_c^\infty(\Omega)$ pour la norme $\|u\|_{H_{2,0}^2} := \|\Delta_\xi u\|_2$. Il suit des plongements de Sobolev que $H_{2,0}^2(\Omega)$ se plonge continûment dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \geq 1$. On a même mieux: dans l'esprit de Trudinger [96] et Moser [74], Adams [23] a montré qu'il existe $C(\Omega) > 0$ tel que

$$\int_{\Omega} e^{32\pi^2 u^2} dx \leq C(\Omega) \text{ pour tout } u \in H_{2,0}^2(\Omega) \text{ tels que } \|\Delta_\xi u\|_2 = 1.$$

La constante $32\pi^2$ est optimale au sens où, pour tout $p > 32\pi^2$, il existe une suite $(v_i)_{i \in \mathbb{N}} \in H_{2,0}^2(\Omega)$ telle que $\|\Delta_\xi v_i\|_2 = 1$ et $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|e^{v_i^2}\|_p = +\infty$. En revanche, pour tout $u \in H_{2,0}^2(\Omega)$, on a $e^{u^2} \in L^p(\Omega)$ pour tout $p \geq 1$, mais sans borne uniforme. Pour $\lambda > 0$, la fonctionnelle suivante est alors bien définie pour $u \in H_{2,0}^2(\Omega)$ et régulière:

$$F(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx - \frac{\lambda}{64\pi^2} \int_{\Omega} e^{32\pi^2 u^2} dx.$$

Comme dans les sections précédentes, elle ne satisfait pas la condition de Palais-Smale, au sens où une suite de Palais-Smale pour F n'est pas nécessairement convergente, même à extraction près. À l'ordre deux et en dimension deux, ce problème a été étudié par Adimurthi-Struwe [24] et par Druet [46], et en dimension n par Struwe [89]. Considérons des points critiques de F , à savoir une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C^4(\bar{\Omega})$ telle que

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta_\xi^2 u_k = \lambda u_k e^{32\pi^2 u_k^2} & \text{dans } \Omega \\ u_k > 0 & \text{dans } \Omega \\ u_k = \partial_\nu u_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right\}$$

où ∂_ν désigne la dérivée normale extérieure. Là encore, la suite (u_k) n'est pas nécessairement relativement compacte, et un phénomène de concentration peut se produire: le bon changement d'échelle est alors, un point $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Omega$ étant donné,

$$(53) \quad \tilde{u}_k(x) := u_k(x_k) (u_k(x_k + \mu_k x) - u_k(x_k))$$

avec $\mu_k > 0$ tel que $\mu_k := u_k(x_k)^{-1/2} e^{-8\pi^2 u_k(x_k)^2} \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$. Avec un bon choix de x_k , on obtient alors

$$\Delta_\xi^2 \tilde{u}_k = V_k e^{a_k \tilde{u}_k},$$

avec $\lim_{k \rightarrow +\infty} V_k = \lambda$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 64\pi^2$ dans $C_{loc}^0(\mathbb{R}^4)$ (ces affirmations ne sont pas immédiates, on renvoie à Robert-Struwe [9]). On obtient ainsi une équation proche de (50). On montre alors le résultat suivant:

Théorème 2.14 (Robert-Struwe [9], 2004). *Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C^4(\bar{\Omega})$ une suite de solutions positives de (52) telle qu'il existe $\Lambda > 0$ tel que $\|\Delta_\xi u_k\|_2 \leq \Lambda$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$, $N \leq \Lambda$, il existe des suites $(x_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (x_{N,k})_{k \in \mathbb{N}} \in \Omega$ tels que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(x_{i,k}) = +\infty$ et, en posant pour tout i et pour tout k*

$$\mu_{i,k} := u_k(x_{i,k})^{-1/2} e^{-8\pi^2 u_k(x_{i,k})^2},$$

on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{i,k} - x_{j,k}|}{\mu_{i,k}} = +\infty \text{ pour tous } i \neq j$$

et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(x_{i,k}) (u_k(x_{i,k} + \mu_{i,k} x) - u_k(x_{i,k})) = -\frac{1}{16\pi^2} \ln \left(1 + \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{\sqrt{6}} |x|^2 \right)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, et cette convergence a lieu dans $C_{loc}^4(\mathbb{R}^4)$. En particulier,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_{R\mu_{i,k}}(x_{i,k})} \lambda u_k^2 e^{32\pi^2 u_k^2} dx = 1.$$

De plus, il existe $C > 0$ tel que

$$\inf_{i=1, \dots, N} |x - x_{i,k}|^4 u_k^2(x) e^{32\pi^2 u_k^2(x)} \leq C$$

pour tout $x \in \Omega$.

Ici aussi, après le changement d'échelle (53), il faut éliminer les profils quadratiques: ceci est possible grâce à la condition de Dirichlet au bord pour u_k , bien que la suite renormalisée \tilde{u}_k ne satisfasse pas de condition de bord. Pour un résultat de quantification avec condition de Navier au bord, on renvoie à Struwe [91]. La présentation de ce mémoire amène à énoncer ce résultat à la fin: en fait, il a précédé les autres résultats en dimension quatre présentés dans cette partie, et les a même grandement influencés.

2.3.6. Conclusion sur la dimension quatre. La conclusion à tirer de cette étude en dimension quatre est que c'est le noyau de l'opérateur concerné qui est la clé de tout:

(a) dans le théorème général 2.10, les singularités quadratiques se développent sur l'ensemble des zéros d'une fonction φ biharmonique non-triviale, $\varphi \leq 0$,

(b) dans le théorème 2.11, on force cette fonction φ à être harmonique, et donc strictement négative, ce qui élimine les singularités quadratiques,

(c) dans le contexte radial du théorème 2.12, le noyau est $\{x \mapsto a + b|x|^2/a, b \in \mathbb{R}\}$ dont la structure explicite permet d'étudier précisément le phénomène d'explosion,

- (d) dans le contexte riemannien du théorème 2.13, le noyau est explicite et trivial,
- (e) dans le théorème 2.14, on considère le noyau du bi-laplacien avec condition de Dirichlet au bord: il est réduit à $\{0\}$.

RÉFÉRENCES

Publications de l'auteur issues de la thèse de doctorat (Novembre 2001)

- [1] Robert, Frédéric. Asymptotic behaviour of a nonlinear elliptic equation with critical Sobolev exponent. The radial case. *Advances in Differential Equations*, **6**, (2001), 821-846.
- [2] Druet, Olivier; Robert, Frédéric. Asymptotic profile for the sub-extremals of the sharp Sobolev inequality on the sphere. *Communications in Partial Differential Equations*, **26**, (2001), 743-778.
- [3] Hebey, Emmanuel; Robert, Frédéric. Coercivity and Struwe's compactness for Paneitz type operators with constant coefficients. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **13**, (2001), 491-517.
- [4] Robert, Frédéric. Asymptotic behaviour of a nonlinear elliptic equation with critical Sobolev exponent: The radial case II. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, **9**, (2002), 361-384.
- [5] Esposito, Pierpaolo; Robert, Frédéric. Mountain-Pass critical points for Paneitz-Branson operators. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **15**, (2002), 493-517.
- [6] Robert, Frédéric. Positive solutions for a fourth order equation invariant under isometries. *Proceedings of the AMS*, **131**, (2003), 1423-1431.

Publications de l'auteur postérieures à la thèse de doctorat

- [7] Druet, Olivier; Hebey, Emmanuel; Robert, Frédéric. Blow-up theory for elliptic PDE's in Riemannian geometry. *Mathematical Notes, Princeton University Press*, Volume 45. Annoncé dans *Electronic Research Announcements of the AMS*, **9**, (2003), 19-25.
- [8] Robert, Frédéric; Sandeep, Kunnath. Sharp solvability conditions for a fourth order equation with perturbation. *Differential and Integral Equations*, **16**, (2003), 1181-1214.
- [9] Robert, Frédéric; Struwe, Michael. Asymptotic profile for a fourth order pde with critical exponential growth in dimension four. *Advanced Nonlinear Studies*, **4**, (2004), 397-415.
- [10] Hebey, Emmanuel; Robert, Frédéric. Compactness and global estimates for the geometric Paneitz equation in high dimensions. *Electronic Research Announcements of the AMS*, **10**, (2004), 135-141.
- [11] Robert, Frédéric. Critical functions and optimal Sobolev inequalities. *Mathematische Zeitschrift*, **249**, (2005), 485-492.
- [12] Felli, Veronica; Hebey, Emmanuel; Robert, Frédéric. Fourth order equations of critical Sobolev growth. Energy function and solutions of bounded energy in the conformally flat case. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, **12**, (2005), 171-213.
- [13] Druet, Olivier; Robert Frédéric. Bubbling phenomena for fourth-order four-dimensional PDEs with exponential growth. *Proceedings of the AMS*, **134**, (2006), 897-908.
- [14] Hebey, Emmanuel; Robert, Frédéric; Wen, Yuliang. Compactness and global estimates for a fourth order equation of critical Sobolev growth arising from conformal geometry. *Communications in Contemporary Mathematics*, **8**, (2006), 9-65.
- [15] Ghossoub, Nassif; Robert, Frédéric. Concentration estimates for Emden-Fowler equations with boundary singularities and critical growth. *International Mathematics Research Papers (IMRP)*, Volume 2006, Article ID 21867, 1-85.
- [16] Adimurthi; Robert, Frédéric; Struwe, Michael. Concentration phenomena for Liouville's equation in dimension four. *Journal of the European Mathematical Society*, **8**, (2006), 171-180.
- [17] Ghossoub, Nassif; Robert, Frédéric. The effect of curvature on the best constant in Hardy-Sobolev inequalities. *Geometric And Functional Analysis (GAFA)*, **16**, (2006), 1201-1245.
- [18] Robert, Frédéric. Concentration phenomena for a fourth order equation with exponential growth: the radial case. *Journal of Differential Equations*, **231**, (2006), 135-164.
- [19] Robert, Frédéric. Quantization effects for a fourth order equation of exponential growth in dimension four. *The Royal Society of Edinburgh Proceedings A*, à paraître.
- [20] Delanoë, Philippe; Robert, Frédéric. On the local Nirenberg problem for the Q-curvatures. *Pacific Journal of Mathematics*, à paraître.
- [21] Robert, Frédéric. On the influence of the Kernel of the bi-harmonic operator on fourth order equations with exponential growth. Sixth international conference on "Dynamical Systems and Differential Equations", Poitiers, June 2006, à paraître.
- [22] Ghossoub, Nassif; Robert, Frédéric. Elliptic equations with critical growth and a large set of boundary singularities. *Preprint*, (2005).

Références citées autres que celles de l'auteur

- [23] Adams, David R. A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives. *Ann. of Math.*, (2), **128**, (1988), no. 2, 385-398.
- [24] Adimurthi; Struwe, Michael. Global compactness properties of semilinear elliptic equations with critical exponential growth. *J. Funct. Anal.*, **175**, (2000), no. 1, 125-167.
- [25] Atkinson, Frederick V.; Peletier, Lambertus A. Elliptic equations with nearly critical growth. *J. Differential Equations*, **70**, (1987), no. 3, 349-365.
- [26] Aubin, Thierry. Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl.*, (9), **55**, (1976), no. 3, 269-296.
- [27] Aubin, Thierry. Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev. *J. Differential Geometry*, **11**, (1976), no. 4, 573-598.
- [28] Badiale, Marino; Tarantello, Gabriella. A Sobolev-Hardy inequality with applications to a nonlinear elliptic equation arising in astrophysics. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **163**, (2002), no. 4, 259-293.
- [29] Bahri, Abbas. Proof of the Yamabe conjecture, without the positive mass theorem, for locally conformally flat manifolds. *Einstein metrics and Yang-Mills connections* (Sanda, 1990), 1-26. Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 145, Dekker, New York, 1993.
- [30] Branson, Thomas P. Group representations arising from Lorentz conformal geometry. *J. Funct. Anal.*, **74**, (1987), no. 2, 199-291.
- [31] Brézis, Haïm; Merle, Frank. Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimensions. *Comm. Partial Differential Equations*, **16**, (1991), no. 8-9, 1223-1253.
- [32] Brézis, Haïm; Peletier, Lambertus A. Asymptotics for elliptic equations involving critical growth. *Partial differential equations and the calculus of variations*, Vol.I, 149-192, *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, 1, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1989.
- [33] Caffarelli, Luis A.; Gidas, Basilis; Spruck, Joel. Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth. *Comm. Pure Appl. Math.*, **42**, (1989), no. 3, 271-297.
- [34] Caffarelli, Luis; Kohn, Robert A.; Nirenberg, Louis. First order interpolation inequalities with weights. *Compositio Math.*, **53**, (1984), no. 3, 259-275.
- [35] Catrina, Florin; Wang, Zhi-Qiang. On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: sharp constants, existence (and nonexistence), and symmetry of extremal functions. *Comm. Pure Appl. Math.*, **54**, (2001), no. 2, 229-258.
- [36] Chang, Sun-Yung Alice. On a fourth order differential operator in conformal geometry. *Harmonic analysis and partial differential equations* (Chicago, IL, 1996), 127-150, *Chicago Lectures in Math.*, Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 1999.
- [37] Chang, Sun-Yung Alice; Chen, Wenxiong. A note on a class of higher order conformally covariant equations. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, **7**, (2001), no. 2, 275-281.
- [38] Chen, Wen Xiong; Li, Congming. Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations. *Duke Math. J.*, **63**, (1991), no. 3, 615-622.
- [39] Delanoë, Philippe. Local solvability of elliptic, and curvature, equations on compact manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, **558**, (2003), 23-45.
- [40] Devillanova, Giuseppe; Solimini, Sergio. Concentration estimates and multiple solutions to elliptic problems at critical growth. *Adv. Differential Equations*, **7**, (2002), no. 10, 1257-1280.
- [41] Djadli, Zindine; Hebey, Emmanuel; Ledoux, Michel. Paneitz-type operators and applications. *Duke Math. J.*, **104**, (2000), no. 1, 129-169.
- [42] Djadli, Zindine; Malchiodi, Andrea; Ahmedou, Mohameden Ould. Prescribing a fourth order conformal invariant on the standard sphere. II. Blow up analysis and applications. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, (5), **1**, (2002), no. 2, 387-434.
- [43] Druet, Olivier. The best constants problem in Sobolev inequalities. *Math. Ann.*, **314**, (1999), no. 2, 327-346.
- [44] Druet, Olivier. From one bubble to several bubbles: the low-dimensional case. *J. Differential Geom.*, **63**, (2003), no. 3, 399-473.
- [45] Druet, Olivier. Compactness for Yamabe metrics in low dimensions. *Int. Math. Res. Not.*, **2004**, no. 23, 1143-1191.
- [46] Druet, Olivier. Multibumps analysis in dimension 2: quantification of blow-up levels. *Duke Math. J.*, **132**, (2006), no. 2, 217-269.

- [47] Druet, Olivier; Hebey, Emmanuel. The AB program in geometric analysis: sharp Sobolev inequalities and related problems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, **160**, (2002), no. 761, viii+98 pp.
- [48] Druet, Olivier; Hebey, Emmanuel. Blow-up examples for second order elliptic PDEs of critical Sobolev growth. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357**, (2005), no. 5, 1915-1929
- [49] Eastwood, Michael; Slovák, Jan. A Primer on Q-Curvature. Preprint.
- [50] Edmunds, D.E.; Fortunato, D.; Jannelli, E. Critical exponents, critical dimensions and the biharmonic operator. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **112**, (1990), no. 3, 269-289.
- [51] Egnell, Henrik. Positive solutions of semilinear equations in cones. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **330**, (1992), no. 1, 191-201.
- [52] Fefferman, C.; Graham, C.R. Conformal invariants. The mathematical heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984). **Astérisque** (1985), Numéro Hors-Série, 95-116.
- [53] Ghoussoub, Nassif. Duality and perturbation methods in critical point theory. Cambridge Tracts in Mathematics, **107**. Cambridge University Press, Cambridge, (1993). xviii+258pp.
- [54] Ghoussoub, Nassif; Kang, Xiaosong. Hardy-Sobolev critical elliptic equations with boundary singularities. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **21**, (2004), no. 6, 767-793.
- [55] Ghoussoub, Nassif; Yuan, Chaoqui. Multiple solutions for quasi-linear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**, (2000), no. 12, 5703-5743.
- [56] Graham, C. Robin; Jenne, Ralph; Mason, Lionel J.; Sparling, George A. J. Conformally invariant powers of the Laplacian. I. Existence. *J. London Math. Soc.*, (2), **46**, (1992), no. 3, 557-565.
- [57] Gursky, Matthew J. The principal eigenvalue of a conformally invariant differential operator, with an application to semilinear elliptic PDE. *Comm. Math. Phys.*, **207**, (1999), no. 1, 131-143.
- [58] Han, Zheng-Chao. Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **8**, (1991), no. 2, 159-174.
- [59] Hebey, Emmanuel. Changements de métriques conformes sur la sphère. Le problème de Nirenberg. *Bull. Sci. Math.*, **114**, (1990), no. 2, 215-242.
- [60] Hebey, Emmanuel. Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities. *Courant Lecture Notes in Mathematics*, **5**. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. x+309 pp.
- [61] Hebey, Emmanuel. Nonlinear elliptic equations of critical Sobolev growth from a dynamical viewpoint. Noncompact problems at the intersection of geometry, analysis, and topology, 115-125, *Contemp. Math.*, **350**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [62] Hebey, Emmanuel; Vaugon, Michel. The best constant problem in the Sobolev embedding theorem for complete Riemannian manifolds. *Duke Math. J.*, **79**, (1995), no. 1, 235-279.
- [63] Hebey, Emmanuel; Vaugon, Michel. From best constants to critical functions. *Math. Z.*, **237**, (2001), no. 4, 737-767.
- [64] Lee, John M.; Parker, Thomas H. The Yamabe problem. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **17**, (1987), no. 1, 37-91
- [65] Lelong-Ferrand, Jacqueline. Transformations conformes et quasiconformes des variétés riemanniennes; application à la démonstration d'une conjecture de A.Lichnerowicz. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **269**, (1969), A583-A586.
- [66] Li, Yan Yan; Shafrir, Itai. Blow-up analysis for solutions of $-\Delta u = Ve^u$ in dimension two. *Indiana Univ. Math. J.*, **43**, (1994), no. 4, 1255-1270.
- [67] Li, Yan Yan; Zhang, Lei. Compactness of solutions to the Yamabe problem. II. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **24**, (2005), 185-237.
- [68] Lieb, Elliott H. Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities. *Ann. of Math.*, (2), **118**, (1983), no. 2, 349-374.
- [69] Lin, Chang-Shou. A classification of solutions of a conformally invariant fourth order equation in R^n . *Comment. Math. Helv.*, **73**, (1998), no. 2, 206-231.
- [70] Lions, P.-L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I et II. *Rev. Mat. Iberoamericana*, **1**, (1985), no. 1, 145-201 et no. 2, 45-121.
- [71] Malchiodi, Andrea. Compactness of solutions to some geometric fourth-order equations. *J. Reine Angew. Math.*, **594**, (2006), 137-174.
- [72] Marques, Fernando Coda. A priori estimates for the Yamabe problem in the non-locally conformally flat case. *J. Differential Geom.*, **71**, (2005), no. 2, 315-346.

- [73] Maz'ja, Vladimir G. Sobolev spaces. Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1985. xix+486 pp
- [74] Moser, J. A sharp form of an inequality by N. Trudinger. *Indiana Univ. Math. J.*, **20**, (1970/71), 1077-1092.
- [75] Obata, Morio. The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds. *J. Differential Geometry*, **6**, (1971/72), 247-258.
- [76] Paneitz, Stephen J. A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo-riemannian manifolds. *Preprint*, (1983).
- [77] Qing, Jie; Raske, David. Compactness for conformal metrics with constant Q curvature on locally conformally flat manifolds. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **26**, (2006), no. 3, 343-356.
- [78] Qing, Jie; Raske, David. On positive solutions to semilinear conformally invariant equations on locally conformally flat manifolds. *Int. Math. Res. Not.*, (2006), Art. ID 94172.
- [79] Rey, Olivier. The role of the Green's function in a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent. *J. Funct. Anal.*, **89**, (1990), no. 1, 1-52.
- [80] Rodemich, E. The Sobolev inequalities with best possible constants. In: Analysis Seminar at California Institute of Technology, (1966).
- [81] Sacks, Jonathan.; Uhlenbeck, Karen. The existence of minimal immersions of 2-spheres. *Ann. of Math.*, (2), **113**, (1981), no. 1, 1-24.
- [82] Schoen, Richard M. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. *J. Differential Geom.*, **20**, (1984), no. 2, 479-495.
- [83] Schoen, Richard M. Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics. Topics in calculus of variations (Montecatini Terme, 1987), 120-154, *Lecture Notes in Math.*, 1365, Springer, Berlin, 1989.
- [84] Schoen, Richard M. Lecture notes from courses at Stanford. *Preprint*, (1988).
- [85] Schoen, Richard M. On the number of constant scalar curvature metrics in a conformal class. Differential geometry, 311-320, *Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math.*, 52, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991.
- [86] Schoen, Richard M; Yau, Shing-Tung. Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature. *Invent. Math.*, **92**, (1988), no. 1, 47-71.
- [87] Schwetlick, Hartmut; Struwe, Michael. Convergence of the Yamabe flow for "large" energies. *J. Reine Angew. Math.*, **562**, (2003), 59-100.
- [88] Struwe, Michael. A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities. *Math. Z.*, **187**, (1984), no. 4, 511-517.
- [89] Struwe, Michael. Critical points of embeddings of $H_0^{1,n}$ into Orlicz spaces. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **5**, (1988), no. 5, 425-464.
- [90] Struwe, Michael. Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Third edition. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge.* **34**. Springer-Verlag, Berlin, 2000. xviii+274 pp.
- [91] Struwe, Michael. Quantization for a fourth order equation with critical exponential growth. *Preprint* (2006).
- [92] Talenti, Giorgio. Best constant in Sobolev inequality. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **110**, (1976), 353-372.
- [93] Tarantello, Gabriella. Analytical aspects of Liouville-type equations with singular sources. Stationary partial differential equations. Vol. I, 491-592, *Handb. Differ. Equ.*, North-Holland, Amsterdam, (2004).
- [94] Tarantello, Gabriella. A Harnack inequality for Liouville-type equations with singular sources. *Indiana Univ. Math. J.*, **54**, (2005), no. 2, 599-615.
- [95] Tarantello, Gabriella. A quantization property for blow up solutions of singular Liouville-type equations. *J. Funct. Anal.* **219**, (2005), no. 2, 368-399.
- [96] Trudinger, Neil S. On imbeddings into Orlicz spaces and some applications. *J. Math. Mech.*, **17**, (1967), 473-483.
- [97] Trudinger, Neil S. Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, (3), **22**, (1968), 265-274.
- [98] Wei, Juncheng. Asymptotic behavior of a nonlinear fourth order eigenvalue problem. *Comm. Partial Differential Equations*, **21**, (1996), no. 9-10, 1451-1467.
- [99] Wei, Juncheng; Ye, Dong. Nonradial solutions for a conformally invariant fourth order equation in \mathbb{R}^4 . *Preprint* (2006).

- [100] Wente, Henry C. Large solutions to the volume constrained Plateau problem. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **75**, (1980/81), no. 1, 59-77.
- [101] Yamabe, Hidehiko. On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Osaka Math. J.*, **12**, (1960), 21-37.
- [102] Ye, Rugang. Global existence and convergence of Yamabe flow. *J. Differential Geometry*, **39**, (1994), 35-50.

UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS, LABORATOIRE J.-A.DIEUDONNÉ, PARC VALROSE,,
06108 NICE CEDEX, FRANCE

E-mail address: `frobert@math.unice.fr`