

## Didactique des transitions

J.-P. Ferrier, IREM de Lorraine, septembre 2007

La gestion des transitions école-collège, collège-lycée ou lycée-université occupe les établissements, les inspections régionales et bien sûr les IREM. En regardant les choses d'assez près, on se rend compte de deux paradoxes.

1) Les problèmes rencontrés sont sensiblement de même nature pour les trois niveaux de transition ici considérés.

2) C'est en conservant à chacun des trois cycles que sont l'école, le collège et le lycée sa spécificité que l'on prépare le mieux au cycle suivant.

Précisément c'est ce dernier point qui n'est plus du tout à l'honneur aujourd'hui. Dans les années 70 on a cru pouvoir enseigner les mathématiques sous leur forme la plus abstraite de la maternelle à l'université, la question des transitions perdant toute pertinence. Comme on le sait, cela a été un échec. En principe on a reconnu que cela relevait d'une illusion, d'une interprétation erronée d'expériences menées par Piaget. Cependant, peu à peu, dans le souci permanent d'apporter des touches de modernité aux programmes, on a fait descendre vers les niveaux inférieurs des notions au départ réservées à l'enseignement universitaire. C'est ainsi que les fluctuations d'échantillon sous apparues en classe de seconde ou que les graphes ont été introduits dans la filière ES. C'est ainsi également qu'en terminale S, l'on a innové à propos de la fonction exponentielle, de façon à faire "entrer les programmes de plein pied dans l'Analyse mathématique" comme le croient certains, ou que l'on s'est cru obligé de donner un exemple de définition abstraite à propos de la limite d'une suite ou d'une fonction, pour "faire toucher du doigt la beauté des mathématiques" comme le pensent les mêmes. C'est surtout la notion abstraite de fonction qui s'est peu à peu inscrite dans les programmes, au lycée d'abord, puis au collège, voire à l'école. En même temps les transformations géométriques sont restées accrochées aux deux premières années du collège pour y remplacer les cas d'égalité des triangles.

C'est une conséquence de la vision didactienne suivant laquelle toute la stratégie de l'enseignement relève de la *transposition didactique* d'Yves Chevallard. C'est l'idée qu'il n'existerait qu'un seul savoir mathématique correct, appelé *savoir savant*, qui correspondrait grosso modo à un enseignement universitaire médiocre, base de culture commune de la noosphère et notamment des didacticiens, alors qu'il s'agit évidemment déjà d'un savoir enseigné. L'enseignement aux niveaux du lycée, du collège ou de l'école releverait d'une simple *transposition* de ce savoir, pour le rendre enseignable à des élèves ne pouvant pas le recevoir directement. Dans l'intention, rien n'est changé par rapport aux années 70. La seule différence est qu'on admet qu'il faut adapter le message, jusqu'à le dénaturer ou le trahir dit-on.

Dans la vision des didacticiens de la transposition, gérer les transitions consiste à gommer certains aspects de la nécessaire trahison opérée au moment de la descente du discours universitaire en direction des niveaux inférieurs. C'est ce qui a été appelé une *détransposition didactique* par Guy Brousseau et André Antibé.

Dans tout cela on a oublié deux choses importantes. D'abord le savoir traditionnel qu'on inculque, ou plutôt inculquait, à l'école élémentaire est pour l'essentiel un *savoir pérenne*, comme le dirait Rudolf Bkouche, méritant d'être qualifié de savant au moins autant que le savoir universitaire. Ensuite il y a un âge pour certains apprentissages. Quand on le passe, il est très difficile de compenser a posteriori les lacunes.

Par conséquent il faut juger chaque contenu, de l'école élémentaire à l'université, avec les mêmes exigences, mais sans évaluer chaque niveau avec pour principale référence l'analogie avec celui du dessus. En particulier, ce n'est pas aux professeurs de collège de dire comment il faut enseigner à l'école élémentaire, aux professeurs de lycée de dire comment il faut enseigner au collège, aux universitaires de dire comment il faut enseigner au lycée. Le choix des contenus appartient à tous, y compris à ceux qui n'ont jamais enseigné d'ailleurs, mais sans mettre une hiérarchie dans les compétences qui serait liée au niveau auquel l'expérience pédagogique a été acquise.

Cette exigence de grande qualité et de respect des spécificités a actuellement disparu de tous les cycles d'enseignement. Son absence est la cause principale des difficultés dans la transition d'un cycle à l'autre, difficultés qu'on retrouve à tous les niveaux. J'ai pris conscience de ces difficultés indirectement pour la transition collège-lycée, par l'intermédiaire d'un groupe IREM travaillant sur le programme de la classe de seconde en mathématiques et en physique. J'en ai pris conscience directement pour la transition lycée-université, effectuant cette année des travaux dirigés de mathématiques au premier semestre (donc en première année universitaire) de la licence de physique. Dans les deux cas la transition entre cycles est plus ou moins assortie d'une relation interdisciplinaire. C'est un peu le fait du hasard, mais c'est un hasard heureux, car la formation d'un cycle donné, tout en restant disciplinaire, doit être envisagée aussi dans un ensemble plus général. Et ce ne sont pas des discours incantatoires sur l'interdisciplinarité, de ceux dont nous sommes abreuvés en permanence aujourd'hui, qui feront l'affaire.

Dans les deux cas j'ai envie de parler d'infirmité à propos de l'enseignement des mathématiques.

### **Du collège au lycée ...**

Commençons par la transition collège-lycée, pour ne parler d'abord que des mathématiques. Le programme de géométrie de seconde comprend les cas d'égalité des triangles. Comment peut-on les enseigner quand on a "étudié" les transformations au collège? Il faudrait se donner le temps nécessaire en reprenant tout au début. Or ce n'est plus possible, d'une part parce que le programme est chargé et d'autre part parce que les élèves ont été habitués aux "boîtes à outils", dont le rôle est de nier l'utilité des démonstrations. Le même programme seconde comprend le calcul sur les vecteurs du plan : addition, multiplication par un scalaire. La présentation est assez traditionnelle, proche de l'intuition géométrique ou physique. Jusqu'aux nouveaux programmes, les vecteurs étaient introduits dès la troisième, mais sous une forme abstraite, inspirée des classes d'équivalence de bipoints. Là encore on a mis la charrue avant les boeufs. A supposer que construire l'espace vectoriel d'un espace affine soit un jour un thème pour l'enseignement, il est absurde d'en parler avant de s'être familiarisé avec les vecteurs géométriques ou physiques. Rappelons que Poincaré préconisait de définir les vecteurs comme des forces et de présenter des équilibres avec des fils tendus dans le cours de mathématiques.

A propos de la même transition, mais en pensant cette fois aussi aux sciences expérimentales, la philosophie qui gouverne, au collège, les notions de nombre et de grandeur est incompatible avec l'enseignement du lycée.

Contrairement à ce qu'affirment les programmes, travailler sur les ordres de grandeurs y est interdit. D'ailleurs on y a inventé une définition "rigoureuse" de "l'ordre de grandeur" d'un nombre, comme une autre pour "l'approximation" à précision donnée, pour ne jamais voir que des relations exactes, alors qu'il est important de penser "à la louche". Comparer deux valeurs inégales  $a$  et  $b$  consiste strictement à déterminer la plus grande et la plus petite, alors que comparer 0,99 et 1 d'une part et 0,0001 et 10000 de l'autre devrait provoquer une réponse plus riche de la part des élèves.

Les grandeurs sont théoriquement de retour au collège, mais elles ne donnent lieu qu'à des exercices algébrisés de conversion d'unités. Car le grand principe reste qu'en dehors des nombres abstraits il n'est point de mathématiques. Il est évident qu'on ne peut pas parler de grandeur sans utiliser des lettres. Or, à part l'inconnue  $x$ , l'utilisation de lettres est rare. On ne rencontre plus de paramètres par exemple, comme on en trouvait avec les familles de droites. Le résultat est que lorsqu'on veut parler de la gravité  $g$  en un point dont la distance au centre de la terre est  $d$ , on ne peut pas écrire

$$g = \frac{k}{d^2} .$$

Il faut absolument choisir des unités pour  $d$  et  $g$ , de façon à écrire une relation numérique, relation dans laquelle il faudra expliciter la valeur de  $k$ , ce qui ne va pas simplifier le travail. Si l'on multiplie  $d$  par 2 à partir de la valeur  $R$  du rayon de la terre, qu'advient-il pour  $g$ ? Il faut sortir les calculatrices et, si l'on a l'idée de faire le quotient des résultats, on découvrira peut-être le facteur 1/4 ou 4.

La négation de l'idée de grandeur va de pair avec l'introduction de plus en plus précoce de la notion de fonction. Alors qu'une fonction devrait être, au collège et au lycée, une variable dépendant d'une autre et qu'il conviendrait de donner d'abord des exemples variés de dépendance, on parle de tableaux de valeurs ou de graphes. En même temps on fait une économie sur les lettres. Si une grandeur  $y$  dépend d'une autre  $x$ , cela fait deux lettres ayant le même statut de variable. Pour parler d'une fonction abstraite, on voit surtout la seule lettre  $f$ ; avec la notation fonctionnelle abstraite on parle de  $f(1)$ ,  $f(2)$  etc. Bien sûr c'est par exemple celle qui au nombre réel  $x$  associe  $x^2$ . Mais  $x$  est tout au plus ici une variable muette.

**... ou peut-être de l'école au lycée.**

Dans l'exemple de la gravité, il s'agit d'une dépendance de proportionnalité inverse au carré. Le physicien sait répondre à la question posée de façon bien plus efficace que le mathématicien : si  $d$  est multipliée par 2, alors  $d^2$  est multiplié par 4 et  $g$  est divisée par 4. Ce faisant on retrouve une forme de pensée qui rappelle l'ancien certificat d'études primaires, ce qui fait que c'est le problème de l'articulation entre l'école et le collège, voire la finalité même du collège, qui se trouve ainsi soulevé. Et on touche là un sujet pour lequel les références manquent. Je connais guère que Philippe Lombard pour s'y être attaqué.

Il est en effet assez facile d'avoir une vision de ce qu'on peut enseigner à l'école, au lycée et à l'université. Si l'on regarde d'assez loin, les programmes n'ont pas beaucoup changé. A l'université les difficultés tiennent moins aux contenus qu'à l'organisation des études, avec une balkanisation des unités de valeurs justement dénoncée depuis longtemps par Jean-Pierre Demailly, et le remplacement de la Physique par toute une myriade de matières inconsistantes, qui n'a pas encore englobé la numérologie mais c'est tout comme.

Au lycée l'on a connu une forte contraction de la géométrie, avec la disparition de la géométrie projective, des coniques, des transformations de l'espace, et une augmentation de la part de l'analyse. Sans doute faudra-t-il trouver un équilibre. Cependant la première mesure pour redresser l'enseignement du lycée serait de supprimer tous les gadgets : option "sciences" en seconde, TPE en première et cette nouvelle épreuve de "mathématiques expérimentales" que l'Inspection installe au baccalauréat. Il faudrait aussi remettre à la mode la maîtrise du calcul sur les expressions, sans laquelle rien ne peut se faire, en étant plus modeste sur certains aspects théoriques, inaccessibles à la plupart des élèves. Et en mettant les calculatrices à l'écart.

Certes, pour ce qui est du contenu théorique, les programmes d'aujourd'hui sont bien moins impressionnants que ceux des années 70. Rappelons que si Dieudonné n'a jamais cautionné le délire qui s'est emparé de l'enseignement de l'époque de la maternelle au collège, il est à l'origine des programmes du lycée. Son idée était qu'à partir de la classe de seconde on devait faire de vraies mathématiques, point de vue partagé par Choquet. Ainsi a-t-on vu des programmes ambitieux, en algèbre linéaire comme en analyse. Ils ont laissé de très bons souvenirs aux collègues universitaires qui les ont connus comme élèves, ce qui ne devrait pas les empêcher de reconnaître qu'ils étaient peu représentatifs de la population du lycée. Aujourd'hui il existe à Moscou des écoles spécialisées dont le niveau est bien supérieur encore, mais les choses sont claires : ce ne sont pas des écoles pour tous.

Si ces programmes étaient ambitieux, certainement trop ambitieux pour tous les futurs utilisateurs des sciences; au moins étaient-ils sérieux. En plus ils s'appuyaient sur un enseignement antérieur encore solide et pas trop "démocratisé" quant aux capacités des élèves. Aujourd'hui la prétention est au moins égale, mais le contenu réel est vide. Un peu de modestie et l'on devrait trouver un compromis acceptable.

A l'autre bout, pour ce qui est de l'école élémentaire, il faut bien reconnaître que ce que l'on y faisait il y a un demi-siècle peut servir en gros de modèle. Certains justifient ce choix par de mauvais arguments, comme la nostalgie d'une époque marquée par la philosophie émancipatrice de l'Instruction publique ou comme la justification de certains choix par des considérations mathématiques relevant des niveaux ultérieurs; d'ailleurs leurs opposants alignent des arguments de même nature, comme une philosophie égalitariste et sacralisant l'enfant, ou comme la justification des choix à l'aide des niveaux ultérieurs également. Il ne s'agit pas de tirer du succès qu'a pu avoir cette école le principe que rien n'est acceptable qui ne serait conforme aux canons anciens. Il s'agit de considérer ce que l'on doit faire demain, à la lumière des expériences passées autant que d'idées nouvelles, sans a priori, avec même l'objectif de faire mieux que ce qui n'a jamais été fait. Il n'en reste pas moins que les vieux programmes, les vieux ouvrages n'étaient pas si mauvais. D'ailleurs il en reste une trace dans l'école, voire dans l'image que s'en fait l'Inspection du primaire ou un Philippe Meirieu.

Si l'école élémentaire arrive un jour à décliner la qualité dans sa spécificité, sachant qu'elle vise l'instruction de tous sans distinction, il restera à déterminer jusqu'à quel âge il faut la prolonger, non pas nécessairement pour tous cette fois, mais pour certains au moins. Autrement dit, pour prendre les termes du passé, quel doit être le contenu d'un certificat d'études moderne, contenu qui serait le fameux socle, et comment l'articuler avec celui des premières années d'un lycée réservé à ceux qui veulent faire jusqu'au bout des études secondaires générales? Le fait d'avoir envisagé a priori deux voies ne veut d'ailleurs pas dire qu'il faille les différencier de façon radicale. L'exemple des vecteurs et de la dépendance fonctionnelle montre que la fin du lycée, comme peut-être l'université, a surtout besoin d'un bon enseignement primaire.

Revenons un moment sur le certificat d'études. Ce n'était pas une voie fermée, puisque l'école primaire supérieure qui lui succédait avait un niveau valant bien celui du baccalauréat. Cependant cette filière a eu du succès parce que les milieux ruraux et populaires n'osaient pas envoyer leurs enfants au lycée. Il est à peu près certain que les bons élèves du certificat d'études auraient pu suivre sans inconvénient l'enseignement du lycée. Les trois grands-parents de Laurent Lafforgue qui n'avaient que leur certifié étaient assurément beaucoup plus cultivés que bien des bacheliers d'aujourd'hui, mais, aujourd'hui, ils seraient entrés à l'université. Aussi est-il difficile de voir comme une régression l'ouverture à tous les milieux sociaux du collège, avec le concours d'entrée en classe de sixième, mettant fin à une ségrégation entre riches et pauvres.

Examinons de plus près ce socle que constitue l'enseignement de l'école primaire pour voir de quelles façons il peut être étendu. Il y a tout d'abord le *sens des opérations*, à savoir leur maîtrise technique et leur emploi judicieux dans la résolution de problèmes. Pour envisager une première extension, on peut penser à certains problèmes d'autrefois, à "résoudre par l'arithmétique" comme on disait. Il ne faut pas se faire d'illusions. Ce genre de problème n'a jamais été résolu par les élèves; la majorité des instituteurs en était déjà incapable. L'école d'autrefois qu'on décrit est bien souvent idéalisée. Une extension plus naturelle, qui singularisait le collège d'hier par rapport au certificat d'études, est l'utilisation du calcul algébrique pour résoudre des problèmes du premier degré. Faut-il enseigner ce calcul à tous? Je n'ai pas la réponse. D'un côté il est facilitant, de l'autre son enseignement n'a de sens que s'il aboutit à une véritable maîtrise. Aussi ne faut-il l'envisager que pour ceux qui pourront aller jusqu'au bout. Est-ce le cas de tous? Notons qu'on initiait bien au calcul littéral jadis en sixième et en cinquième, mais que la résolution de l'équation  $ax + b = 0$  et des problèmes du premier degré se faisait en quatrième, ce qui n'empêchait pas de chercher des solutions "par l'arithmétique". Autrement dit la spécificité du collège ne touchait guère, en mathématiques, que les deux dernières années. Pour les deux premières, elle concernait surtout le latin et une langue vivante. Voilà qui aurait permis d'envisager des passerelles.

A côté de cela, les fameux cas d'égalité des triangles étaient aussi emblématiques de la différence entre le collège et le certificat d'études. Maintenant il y a plusieurs choses derrière ces cas d'égalité. Il y a d'abord la géométrie du triangle : comment construire, ou reporter, un triangle en s'appuyant sur certains de ses éléments. On peut très bien imaginer cette partie dans le socle. En parlait-on autrefois au certificat d'études? On aurait pu le faire, à l'occasion de problèmes pratiques d'arpentage par exemple, sachant que l'enseignement y était très pratique.

Il y aussi l'initiation à la démonstration. On la pratiquait bien depuis la sixième ou la cinquième, mais comme un exercice un peu obligé. La force de l'enseignement secondaire d'autrefois résidait dans la progression, pas dans un apprentissage précoce et forcené. Ce n'est que lentement que la pratique du raisonnement s'installait, toujours étroitement lié, même en géométrie, au calcul proprement dit.

Pour finir, on pourrait dire un mot de la proportionalité, avec la règle de trois dans le socle et une extension à la dépendance  $y = ax + b$  à négocier.

En résumé, comme le dit Philippe Lombard, l'enseignement primaire a surtout besoin d'être dédié à un apprentissage systématique et non pas à l'élaboration par l'élève de procédures personnelles. Quant à la transition école-collège, elle n'a sans doute pas lieu d'être considérée. C'est le collège tout entier qui est à la fois un enseignement terminal, pour ce qui est des études générales, et une transition école-lycée, ce *palimpseste* dont parle Philippe Lombard, sachant que ces fonctions n'étaient pas complètement incompatibles. S'il faut, malgré tout, prévoir deux voies distinctes, des passerelles doivent pouvoir être installées.

### Du lycée à l'université.

Commençons en premier lieu l'exemple de l'enseignement de la géométrie, pour y découvrir une étrangeté. On a constaté une inversion entre le collège et le lycée, puisque la géométrie du premier niveau a été davantage polluée par une forme de transposition que celle du second, restée largement traditionnelle. On va s'apercevoir que le peu de géométrie qui est enseigné à l'université n'est qu'une version appauvrie des traditions de l'enseignement secondaire. Finalement, pour cette matière, la source du fameux "savoir savant" est à chercher dans certaines modes initiées dans le second degré et répandues vers les niveaux aussi bien inférieur que supérieur. C'est sans doute la raison pour laquelle la prégnance des transformations va de pair avec l'ignorance de leur composition, ou des groupes qu'elles constituent. Ainsi le savoir "savant" est-il surtout boiteux. Il est vrai que l'obligation mercantile d'utiliser des logiciels de géométrie dynamique explique aussi pour beaucoup les choix.

La logique voudrait que chacun des cycles, celui du collège, celui du lycée et celui de l'université ait sa spécificité dans la façon d'apprendre la géométrie. Au collège on enseigne la géométrie comme "la première science physique"; c'est une géométrie du triangle, avec les cas d'égalité, et du parallélisme. Au lycée, on commence à ajouter des outils qui l'algébrisent peu à peu : vecteur, barycentre, produit scalaire etc. A l'université, dans les filières de mathématiques, on étudie un modèle abstrait du plan ou de l'espace euclidiens fondé sur l'algèbre linéaire, à la manière de l'ouvrage de Dieudonné.

Bien sûr on peut discuter de l'endroit où il faut placer les deux charnières. La dernière se situait en fin d'enseignement universitaire il y a un demi-siècle. Dans les années 70, on l'a avancée jusqu'au début du lycée. Le plus tôt possible dans les deux premières années universitaires paraît raisonnable aujourd'hui, sachant que refaire à l'identique à l'université ce qu'on fait au lycée n'est pas très motivant. C'est pourtant ce que l'on découvre lorsqu'on veut traiter l'illustration géométrique des nombres complexes : on se donne un plan géométrique et un repère, on suppose connues les lignes trigonométriques et les formules d'addition, on mélange les angles et leur mesure etc.

## Deux exemples.

Nous allons maintenant détailler deux exemples inspirés par l'enseignement des premières années universitaires. Si l'on oublie l'aspect un peu technique des sujets, on devrait pouvoir constater que les problèmes soulevés sont de même nature que ceux des autres degrés. Mieux encore, c'est l'oeuf du serpent qu'on va révéler.

L'un de ces exemples concerne l'introduction des fractions rationnelles. Alors qu'on ne rencontre au lycée que des fonctions, on va marquer une rupture à l'université en voyant les polynômes et fractions rationnelles comme des expressions formelles, ce qui permet d'écrire  $x/x = 1$  sans souci d'un quelconque ensemble de définition. En première année, il est sage de se contenter de dire qu'une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes, avec les règles, notamment de simplification, bien connues pour les fractions ordinaires. Cependant on doit envisager un jour d'être plus explicite, ce qu'on fait parfois en construisant le corps des fractions d'un anneau intègre. Cette construction a été à la mode à une époque pour les fractions ordinaires, heureusement oubliée aujourd'hui : le quotient de 2 par 3 est un développement décimal illimité; on le sait depuis l'école primaire. De même, une manière plus heureuse d'introduire les fractions, à laquelle tient beaucoup quelqu'un comme Pierre-Yves Gaillard, est de prendre le quotient dans le corps des séries de Laurent formelles du type

$$\sum_{n \geq -m} a_n x^n .$$

La dérivation, les parties polaires, la décomposition en éléments simples sont des trivialités dans ce cadre. Pourquoi cette stratégie nous fait-elle peur?

Ce n'est pas la complexité des opérations dans le corps : elles sont définies par des algorithmes simples. A l'inverse, il n'existe aucun algorithme pour ajouter, et a fortiori multiplier, des développements décimaux. Cela ne veut pas dire qu'il faille ne pas parler de ces opérations au lycée; on devrait le faire, sans entrer dans les détails et en s'appuyant sur l'existence d'une limite pour une suite croissante majorée. Cette propriété doit être démontrée, si possible en visualisant les décimales successives de la limite, comme le préconise Jean-Pierre Demailly. Il reste que les nombres réels sont plus difficiles à manipuler que les séries de Laurent. Alors?

La grande différence est que les nombres réels et les opérations sur ces nombres sont issus d'opérations sur des grandeurs, comme nous l'explique Henri Lebesgue dans son ouvrage pédagogique. On dispose d'une intuition géométrique, ou physique, qui permet la compréhension des opérations et rend, dans un premier temps, très accessoire leur définition abstraite. De la même façon que la géométrie profitait de son statut initial de science physique, où les classes d'équivalence de bipoints n'avaient pas de place. A l'inverse on ne peut penser la représentation d'une fraction rationnelle par une série de Laurent que dans l'analogie avec la représentation des fractions ordinaires par des développements décimaux. Ou alors quand on a déjà une certaine habitude de l'abstraction, comme le traité de mathématiques de Bourbaki le suppose de ses lecteurs.

On voit ainsi l'importance du respect des spécificité de chaque degré. Il convient d'associer les nombres à la mesure des grandeurs dès l'école élémentaire, d'effectuer des calculs intelligents sur les fractions au collège, de les étendre aux fonctions algébriques

au lycée, si l'on veut plus tard, au moment de préparer l'agrégation peut-être, se servir d'un corps de séries de Laurent.

Le second exemple concerne l'analyse, matière dominante au lycée comme à l'université, et son enseignement dans la filière de sciences physiques que nous avons déjà évoquée. L'orientation donnée aux études de mathématiques au lycée n'est pas seulement inadéquate pour l'enseignement des sciences dans ce même lycée. Elle l'est plus encore pour l'enseignement de la physique à l'université. C'est ce qui explique le nombre des témoignages recueillis par Catherine Krafft qui attribuent à la faiblesse en mathématiques le principal handicap des étudiants en physique. Le temps passé au lycée à batifoler autour de la notion de limite, en sacralisant notamment le ridicule "théorème des gendarmes", est perdu pour un apprentissage du calcul sur les expressions, seule façon de comprendre et de maîtriser limites ou dérivées. Avec l'épreuve pratique que l'inspection générale est en cours d'installation, ce sera pire encore : aucun bachelier ne saura calculer.

Déjà, indépendamment de tout cela, les choix techniques, comme celui de la notation fonctionnelle  $f(x)$ , sont inspirés par une prétention de conformité aux références auxquelles les mathématiciens renvoient implicitement pour la correction de leur propos. Ils ne correspondent à aucune pratique, ni de la part des physiciens ni de la part des mathématiciens eux-mêmes. On ne les trouve guère que dans l'enseignement des mathématiques à l'université, comme au lycée ou au collège, par transposition. Puisque l'enseignement des mathématiques n'est jamais confronté à une quelconque réalité, même pas celle de pratiquer cette discipline, et peut s'étendre à loisir sur des beautés creuses, cela donne un corpus qui s'enferme sur lui-même, servant aussi de base aux concours de recrutement des futurs enseignants.

L'interdisciplinarité n'est donc qu'un slogan. Voilà aussi pourquoi la dénaturation de notre enseignement est davantage ressentie par les enseignants de physique : ils sont obligés de considérer les mathématiques dont leur science a besoin.

En physique et ailleurs, une fonction est une variable qui dépend d'une autre, ou de plusieurs autres. Dans la référence mathématique, on donne un nom à cette dépendance, comme  $f$  par exemple. Dans la pratique de tous, on donne un nom aux variables, comme  $x$  et  $t$ . C'est absolument clair en physique. Cela l'est tout autant en géométrie : on donne par exemple un nom au résultat et aux coordonnées locales, ne changeant pas de fonction quand on change ces dernières. En analyse encore, la fonction inconnue qui figure dans une équation différentielle ou aux dérivées partielles garde le même nom si l'on effectue un changement de variables. Ce n'est guère que lorsqu'on pense à une fonction comme une application donnée une fois pour toutes que l'on utilise la notation fonctionnelle de référence : dans  $\dot{x} = f(t, x)$  par exemple, ce qui n'empêche pas de confondre  $x$  et  $x(t)$ .

Le choix dans la notation fonctionnelle a une incidence évidente lorsqu'il faut noter une dérivée. Dans la référence, on peut écrire  $f'$  et  $f'(x)$ . Dans la pratique, on préférera  $dx/dt$ .

La différence se fait tout de suite sentir quand chercher à composer ou à inverser des fonctions. Dans le premier cas, la formule de composition, qu'on écrit  $(f(g(x)))' = f'(g(x)).g'(x)$  en acceptant déjà quelque abus, est si peu pratique que le formulaire ne donne pas le résultat pour des fonctions simples mais déjà pour des composées. On n'écrit pas  $(x^n)' = nx^{n-1}$  mais  $(u^n)' = nu^{n-1}.u'$ .

Prenons l'exemple du calcul de la dérivée de la fonction

$$\ln(1 + \sqrt{x^2 + 1}) .$$

Ce qui suit est extrait d'une fiche destinée aux étudiants de première année de la licence de physique.

La première version, en colonne de gauche, est dans la ligne des programmes de mathématiques du lycée en vigueur; la seconde, en colonne de droite est traditionnelle et plus proche des usages en physique.

Pour dériver

$$f(x) = \ln(1 + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$z = \ln(1 + \sqrt{x^2 + 1})$$

on pose

$$\underbrace{\ln(1 + \underbrace{\sqrt{x^2 + 1}}_v)}_u$$

$$f(x) = \ln u(x)$$

$$z = \ln u$$

$$u(x) = 1 + \sqrt{v(x)}$$

$$u = 1 + \sqrt{v}$$

$$v(x) = x^2 + 1$$

$$v = x^2 + 1$$

pour appliquer

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot (2x)$$

$$u'(x) = \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}}$$

$$v'(x) = 2x$$

et obtenir

$$\frac{v'(x)}{2u(x)\sqrt{v(x)}} = \frac{2x}{2(1 + \sqrt{x^2 + 1})\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (2x)$$

soit

$$\frac{1}{x^2 + 1 + \sqrt{x^2 + 1}} .$$

pour finir.

Les calculs sont infiniment plus lisibles dans la colonne de droite. Malheureusement il faut présenter, voire privilégier, celle de gauche à cause des habitudes prises au lycée.

Notons au passage qu'autant l'utilisation de calculatrices ou autres prothèses électroniques est néfaste à la formation des jeunes esprits, autant la fréquentation d'un tableur, premier petit pas vers la science informatique, est bénéfique. Expliquer la composition des fonctions avec un tableur aboutit à l'introduction de variables intermédiaires  $u$  et  $v$ , très exactement comme on l'a fait plus haut dans la colonne de droite.

Considérons maintenant le cas de fonctions de deux variables, une fonction  $f$  définie sur un domaine de  $\mathbf{R}^2$  pour suivre la référence ou une fonction  $z$  dépendant de  $x$  et  $y$  pour parler simplement. Comment faut-il noter les dérivées partielles?

La version savante évite ce problème en ne considérant presque exclusivement que la différentielle  $df$ . Quid de la version transposée? L'excellent livre de Jacques Dixmier utilise la notation

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_1} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial \xi_2}$$

où le couple  $(\xi_1, \xi_2)$  est apparu auparavant pour désigner, comme une variable muette, un point de  $\mathbf{R}^2$ . Ce choix n'est pas très orthodoxe : certains préfèrent écrire  $f_{,1}$  et  $f_{,2}$ ; mais tout le monde comprend, ce qui est quand même le but recherché. Si l'on écrit

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

comme on le fait très souvent, il est plus difficile de résister à la critique : pourquoi le premier argument est-il  $x$  plutôt que  $y$ ? Les mathématiques seraient-elles sensibles à une réforme de l'alphabet?

Avec la version pratique, les notations  $\partial z/\partial x$  et  $\partial z/\partial y$  sont beaucoup plus claires. Encore que pas tout à fait. Prenons l'exemple de

$$z = 2xy \text{ .}$$

Supposons que l'on veuille évaluer  $z$  en coordonnées polaires. On aura

$$z = r \sin(2\theta) \text{ .}$$

Ici on a gardé le même nom  $z$  : si l'on fait le choix de la référence, il faut introduire une autre fonction. On peut parler de  $\partial z/\partial r$  et  $\partial z/\partial \theta$ . Mais on peut aussi écrire localement

$$z = 2x^2 \arctan \theta \text{ .}$$

Le  $\partial z/\partial x$  qui s'en déduit n'est pas celui du début. Pour être clair il faut expliquer toutes les coordonnées locales, comme le font les thermodynamiciens. On distinguera alors

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\theta$$

où les variables en indice sont celles que l'on fixe.

Ecrire les variables que l'on fixe a aussi des vertus pédagogiques. Ici l'utilisation de  $\partial$  en place de  $d$  est surtout cosmétique. Les dérivées partielles sont des dérivées très ordinaires, une fois que l'on a compris que les variables fixées sont des constantes. Mais on retrouve là la discussion sur les paramètres.

Ainsi, à propos des dérivées, avons-nous découvert tout un corpus d'enseignement disciplinaire refermé sur lui-même. Maintenant, fort de sa prétendue légitimité, ledit corpus artificiellement créé va s'imposer, par transposition, au collège, si ce n'est pas à l'école. C'est ainsi que les tableaux de valeurs sont aujourd'hui l'exemple fondateur de la notion de fonction.

La boucle est bouclée.