Unités et produits tensoriels

Si les nombres abstraits (sans unité) relèvent de l'élévation d'un cran dans le structuralisme par rapport aux nombres concrets (avec unité), un nouveau cran réhabiliterait ces derniers. Le niveau supérieur est celui des droites vectorielles et leurs produits tensoriels. On va donc essayer de dire un mot du sujet, en essayant de se placer au niveau d'un professeur de collège,pari qu'on ne réussira pas à tenir. Maintenant la compréhension dans le détail de la construction abstraite d'un produit tensoriel n'est pas nécessaire; on verra en effet pour finir que le discours naïf est plus profond et plus légitime qu'il n'y paraît.

Droites vectorielles.

Considérons une grandeur, la longueur par exemple. On peut représenter les longueurs par les points d'une demi-droite (D) d'origine O. Se donner une longueur $\mathbf{u}$ non nulle, qui servira d'unité, revient à choisir un point U de (D), celui pour lequel $OU = \mathbf{u}$.

Alors, pour une longueur $\mathbf{l} = OM$ quelconque, il existe un nombre réel x et un seul pour lequel

$$OM = x.OU \quad \text{ou} \quad \mathbf{l} = x.\mathbf{u}$$

et ce nombre x est la mesure de ladite longueur lorsqu'on a pris $\mathbf{u} = OU$ comme unité.

Pour beaucoup de grandeurs, une mesure négative n'aura pas de sens. Cependant on peut être amené à considérer des intervalles de temps négatifs. Pour une raison de commodité on va remplacer systématiquement les demi-droites par des droites; on ne s'occupera pas du tout du plus ou moins bien fondé de ce choix.

On représentera donc une grandeur unidimensionnelle par les points de ce qu'on appelle une droite *vectorielle* et qui est une droite (D) munie d'une origine O. Tout ce qu'on vient de dire se transpose.

La donnée d'une unité $\mathbf{u} = OU$ correspond, dans ce cadre, à la donnée d'une *base* de la droite vectorielle (du côté des grandeurs qui ont un sens physique s'il le faut).

Produit tensoriel de deux espaces vectoriels.

Ici nous allons commencer par considérer des espaces vectoriels plus généraux avant de revenir aux droites vectorielles, parce que le cas particulier de la dimension 1 n'est pas très gratifiant. La difficulté est qu'il convient d'introduire le produit tensoriel indépendamment du choix de bases pour voir ensuite comment en choisir une. On va tenter de caractériser ce produit par les propriétés qu'on en attend.

Soient E, F deux espaces vectoriels. Par exemple E sera de dimension 2, donc un plan vectoriel, et F un espace de dimension 3, comme l'espace de la géométrie.

Le plan E admet une base constituée de deux éléments $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et tout élément v de E s'écrit de façon unique

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$$

où x_1, x_2 sont les coordonnées dans la base considérée.

Le plan F admet une base constituée de trois éléments $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, , $\mathbf{f}_3$ et tout élément w de F s'écrit de façon unique

$$\mathbf{w} = y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2 + y_3\mathbf{f}_3$$

où y_1, y_2, y_3 sont les coordonnées dans la base considérée.

Le *produit tensoriel* de E et de F sera un nouvel espace vectoriel que l'on notera $E \otimes F$. A chaque couple $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ d'un vecteur de E et d'un vecteur de F on associera un élément de $E \otimes F$ qui sera le tenseur

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$$

de façon *bilinéaire* en $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, c'est-à-dire de façon linéaire par rapport à $\mathbf{v}$ et par rapport à $\mathbf{w}$. Autrement dit on aura

$$(x\mathbf{v} + x'\mathbf{v}') \otimes \mathbf{w} = x.\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + x'.\mathbf{v}' \otimes \mathbf{w}$$

et la propriété analogue dans le second argument.

De plus on demandera

- que $E \otimes F$ ne comprenne rien d'inutile, précisément qu'il soit constitué des sommes de tenseurs du type $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$.

- et qu'il n'y ait pas d'autres relations dans $E \otimes F$ que celles qui résultent de la propriété de bilinéarité demandée.

On va d'abord supposer la construction réalisée et considérer des bases. A quoi le produit tensoriel doit-il ressembler?

Il va contenir les vecteurs

$$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_1 \ , \ \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{f}_1 \ , \ \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_2 \ , \ \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{f}_2 \ , \ \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_3 \ , \ \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{f}_3$$

entre autres.

Maintenant tout $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ va se décomposer en une combinaison linéaire de ses six vecteurs par bilinéarité. Précisément il vient

$$x_1y_1.\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_1 + x_2y_1.\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{f}_1 + x_1y_2.\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_2 + x_2y_2.\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{f}_2 + x_1y_3.\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_3 + x_2y_3.\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{f}_3$$

avec les notations utilisées. Les sommes de tels vecteurs se décomposent aussi. Les six vecteurs indiqués vont ainsi engendrer $E \otimes F$. Comme il ne doit pas y avoir de relation entre eux, ils constitueront une base.

Ensuite on noterait qu'une réalisation possible du produit tensoriel consisterait à se donner a priori un espace de dimension 6 avec une base que l'on nommerait de la façon ci-dessus et à définir alors $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ en prenant la décomposition déjà considérée.

Noter que la dimension du produit tensoriel $E \otimes F$ est le produit de celles de ses facteurs : $2 \times 3 = 6$. Celle du produit $E \times F$ en est la somme : $2 + 3 = 5$.

On définit de façon semblable le produit tensoriel d'un nombre fini d'espaces vectoriels.

Produits tensoriels de droites vectorielles.

Le produit tensoriel de deux droites vectorielles a la dimension $1 \times 1 = 1$; c'est aussi une droite vectorielle. Si $\mathbf{u}$ est une base de la droite vectorielle D et $\mathbf{u}'$ une base de la droite vectorielle D', alors $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}'$ est une base de la droite vectorielle $D \otimes D'$.

Si l'on revient à ce que l'on a dit au début, et que l'on interprète le choix d'une base comme celui d'une unité, le choix de l'unité $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}'$ du produit tensoriel s'inscrit dans qu'on appelle en physique un système cohérent d'unités.

Par exemple si F est la droite vectorielle des magnitudes de forces et L celle des longueurs, le produit tensoriel $F \otimes L$ est la droite vectorielle des énergies. Si le newton (N) est l'unité pour les forces et le mètre (m) l'unité pour les longueurs, l'unité cohérente pour les énergies est le joule (J). Autrement dit

$$J = N \otimes m$$

et par exemple

$$3,5N \otimes 4m = 14\ N \otimes m = 14J\ .$$

Il n'y a plus qu'à remplacer les $\otimes$ par des $\times$ pour retrouver l'écriture des produits de nombres concrets.

En particulier on peut définir les puissances tensorielles de droites vectorielles. Si L est la droite vectorielle des longueurs, alors $L \otimes L$ est celle des surfaces et $L \otimes L \otimes L$ celle des volumes. Si le mètre (m) a été choisi comme unité de longueur, on choisira le m^2 et le m^3 pour les surfaces et les volumes pour la cohérence.

Puissances négatives.

Il arrive que considère des grandeurs en *dualité*. Par exemple une fréquence est définie comme l'inverse d'une période, c'est-à-dire d'un temps (ou plutôt d'un intervalle de temps). Cela signifie que si l'on multiplie un temps $\mathbf{t}$ par une fréquence $\mathbf{f}$ on obtient pour $\mathbf{t}.\mathbf{f}$ un vrai nombre réel, et ceci indépendamment de la considération d'unités.

Dans le cas général une dualité entre les droites vectorielles D et D' est une application bilinéaire non nulle de $D \times D'$ dans le corps de base. On dit alors que D' réalise l'inverse tensoriel de D. On notera encore D^{-1} la droite D'.

Si D' est l'inverse tensoriel de la droite D, on associe à la base $\mathbf{u}$ de D la base $\mathbf{u}'$ de D' qui vérifie

$$\mathbf{u}.\mathbf{u}' = 1\ .$$

On fait ainsi pour choisir de façon cohérente les unités. Dans l'exemple des temps et des fréquences, si l'unité de temps est la seconde (s), l'unité de fréquence correspondante est le hertz (Hz).

Les puissances négatives et les produits avec des exposants de signe quelconque s'ensuivent évidemment.

Puissance nulle.

Le cas de la puissance nulle (indépendamment de la grandeur concernée) correspond à une grandeur sans dimension, c'est à dire aux nombres réels. Dans ce cas il n'y a pas à faire de choix d'unité; il en existe une, naturelle, qui est le nombre 1.

On notera que $D \otimes D^{-1}$ s'identifie au corps de base. Dans notre exemple l'unité est le produit de $1s$ par $1Hz$; c'est exactement le nombre 1.

Il y avait plus simple.

Quand on cherche à introduire les tenseurs, on peut partir de leur expression dans une base, comme des systèmes multi-indexés de nombres, en explicitant la dépendance par rapport à la base, covariante ou contravariante suivant les indices. Dans le cas des dimensions 2 et 3 que nous avons considéré, on aurait considéré des tableaux x_{ij}, où i prend les valeurs de 1 à 2, et j les valeurs de 1 à 3. Une telle démarche n'est ni simple ni chargée de sens. Surtout il était totalement impossible de l'adopter ici puisque le choix des bases doit venir après.

C'est la raison pour laquelle on a choisi une présentation plus intrinsèque. Malheureusement on n'a pas pu présenter les propriétés demandées sous une forme optimale, pour respect à un niveau raisonnable. La considération de sommes de $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ arrive un peu comme les cheveux sur la soupe. Surtout demander qu'il n'y ait pas d'autre relation que celles attendues n'a pas une signification très claire.

Or, au moins dans le cas de droites vectorielles, on peut faire beaucoup mieux. Prenons l'exemple de la droite F des (magnitudes de) forces et de la droite L des longueurs. Lorsque l'on déplace dans une certaine direction sur une longueur $\mathbf{l}$, la force dont la composante dans la direction indiquée est $\mathbf{f}$, on produit un travail

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}.\mathbf{l}$$

qui appartient à la droite vectorielle W des énergies.

Cette formule fournit une énergie qui dépend de façon bilinéaire du couple $(\mathbf{f}, \mathbf{l})$, c'est-à-dire à la fois linéairement de $\mathbf{f}$ et linéairement de $\mathbf{l}$. Et l'on vérifie qu'une grandeur qui dépend de $\mathbf{f}$ et $\mathbf{l}$ de la sorte dépend alors linéairement de $\mathbf{w}$ d'une façon bien définie.

En termes plus concrets, la formule fournit une énergie à la fois proportionnelle à $\mathbf{f}$ et proportionnelle à $\mathbf{l}$. Et toute grandeur qui est à la fois proportionnelle à $\mathbf{f}$ et proportionnelle à $\mathbf{l}$ est alors proportionnelle à $\mathbf{w}$ avec un coefficient de proportionnalité bien défini.

Faisons une démonstration. Soit $\mathbf{g}$ une grandeur possédant les propriétés indiquées. On a d'abord

$$\mathbf{g} = \alpha \mathbf{f}$$

où α ne dépend pas de $\mathbf{f}$, par la proportionnalité en $\mathbf{f}$. De même

$$\mathbf{g} = \beta \mathbf{l}$$

où β ne dépend pas de $\mathbf{l}$, par la proportionnalité en $\mathbf{l}$. Alors

$$\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{w}} = \frac{\alpha}{\mathbf{l}} = \frac{\beta}{\mathbf{f}}$$

où la seconde fraction ne dépend pas de $\mathbf{f}$ et où la troisième ne dépend pas de $\mathbf{l}$. La première a une valeur γ qui ne dépend donc ni de $\mathbf{f}$ ni de $\mathbf{l}$. Ainsi

$$\mathbf{g} = \gamma \mathbf{w}$$

Q.E.D.

Or la formulation indiquée ici est très exactement la traduction du discours savant qui consiste, comme on le dit de façon pédante, à représenter un foncteur ou à résoudre un problème universel.

Ainsi la petite formule du travail réalise-t-elle la droite des énérgies comme le produit tensoriel de la droite des forces et de celle des longueurs. Cela permet d'écrire

$$W = F \otimes L$$

et

$$\mathbf{f}.\mathbf{l} = \mathbf{f} \otimes \mathbf{l}$$

mais on voit bien qu'il n'y a aucun avantage à introduire le signe $\otimes$ puisque, comme on l'a vu, la première chose à faire sera de le remplacer par un signe ordinaire de produit.

Moralité.

Une première constatation est que plus le formalisme devient savant, plus il se rapproche du sens primitif. Cela n'est pas très surprenant. On peut faire un parallèle avec l'outil informatique.

A leurs débuts les ordinateurs ont rendu d'inestimables services; cependant c'était à l'homme de s'adapter à la machine. C'est elle qui demandait d'entrer les données; en cas d'erreur il fallait lancer tout un protocole. Aujourd'hui, avec le développement d'interfaces plus élaborées, on introduit les données dans des zones où l'on peut corriger en permanence et on lance le traitement après; c'est la machine qui s'adapte.

De même telle calculatrice utilisait la notation polonaise inversée; aujourd'hui les formules sont écrites avec les parenthèses classiques. Aussi la mode des calculs arborescents à l'école que motivait le modèle informatique n'est-elle plus du tout de mise.

Il faut donc se méfier pour l'enseignement du modernisme, qu'il s'inspire de théories mathématiques nouvelles ou de technologies de pointe. Celui qui attend un peu se retrouve conforté dans ses habitudes de toujours.

Une autre constatation est la faible utilité du formalisme savant quand il est introduit trop tôt. Les produits tensoriels n'ont pas été inventés pour justifier les nombres concrets, heureusement. Celui qui les a bien intégrés dans sa culture n'aura pas de peine à reconnaître les premiers derrière les systèmes cohétents d'unités de la physique. Faut-il imposer ce détour aux futurs enseignants de l'école? Certainement pas.

En sachant écrire que $3m$ fois $5m$ font $15m^2$, on aura bien plus compris de mathématiques qu'en tentant d'approfondir un discours comme celui qui précède, lequel devrait rester incompréhensible malgré les efforts désespérés de vulgarisation qu'il a impliqués.

Ainsi, pour la plupart des gens, y compris les enseignants de mathématiques, la pratique dimensionnelle de la géométrie, à défaut de celle d'une science physique plus vaste, éclaire davantage la question abstraite soulevée que cette dernière n'éclaire la pratique considérée.