Progression spiralée en terminale S

IREM de Lorraine, 2005

Ce qui suit pourrait servir de trame à une première semaine d'enseignement en terminale scientifique. L'idée est de fournir rapidement au physicien le bagage mathématique pour étudier la radioactivité. Aussi l'approche est-elle heuristique, pour donner du sens à des notions sur lesquelles l'on reviendra par la suite de façon plus conforme aux habitudes prises en mathématiques.

Maintenant il est bien clair qu'un certain de points abordés pourraient l'avoir été, sous cette forme heuristique, en classe de première. C'est un point qu'il faudrait regarder.

La dérivée selon les physiciens.

En physique comme en mathématiques, la dérivée est une *pente*. En physique, on considère qu'un petit accroissement δx de la variable provoque un accroissement δy de la fonction qui lui est pratiquement proportionnel. C'est le *principe de linéarité des petits phénomènes*. Autrement dit

$$\delta y = k\delta x$$

sous réserve que δx soit suffisamment petit. Le facteur

$$k = \frac{\delta y}{\delta x}$$

est la pente ou la dérivée.

La difficulté apparaît quand il s'agit de préciser ce que l'on entend par "pratiquement égal" et "suffisamment petit". D'abord on va exiger que l'erreur soit petite non pas en valeur absolue mais en *valeur relative*. Là il ne s'agit encore qu'une question de précision.

Ensuite on exigera que les accroissements soient petits mais cette exigence est dépendante du contexte. Dans le phénomène de radioactivité, si la demie-vie est de de $3,8$ jours, un δt d'un heure commence à être petit. Si elle est de $55s$, c'est un δt d'une seconde qui le sera.

Le rôle des mathématiques est de traiter les problèmes indépendamment de leur contexte particulier. On ne peut donc pas y intégrer des contraintes du type précédent.

Pour cette raison on considèrera en mathématiques une situation idéale dans laquelle les accroissements sont *infinitésimaux*. Il n'est pas question ici d'en donner une définition précise. On imaginera des accroissements très petits, aussi petits qu'il serait nécessaire sans que l'on puisse préciser davantage.

On notera dx un accroissement infinitésimal de la variable y. Il lui correspond un accroissement dy qui vérifie *exactement* la relation

$$dy = kdx$$

où le facteur

$$k = \frac{dy}{dx}$$

est la pente ou la dérivée.

La géométrie, qui est somme toute une science physique, illustre cette notion. On va supposer que y est l'ordonnée du point d'une courbe en fonction de son abscisse x. Sur un tout petit intervalle, la courbe ressemble à un morceau de droite. Autrement dit, pour un accroissement δx assez petit, l'accroissement δy correspondant vérifiera

$$\delta y = k\delta x$$

comme c'est le cas en général en physique. C'est l'exemple de la pente géométrique qui a servi de modèle à la notion générale de pente ou de dérivée.

2. Composition des fonctions.

Considérons le cas d'une fonction composée, par exemple celui d'une variable z qui dépend d'une variable y, laquelle dépend elle-même d'une variable x.

Considérant z comme une fonction de y, cette fonction admet une dérivée

$$\frac{dz}{dy} \; .$$

De même, considérant y comme une fonction de x, cette fonction admet une dérivée

$$\frac{dy}{dx} \; .$$

Alors, considérant z comme une fonction de x, cette fonction (composée) admet une dérivée

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} . \frac{dy}{dx} \; .$$

Cette règle, qui s'impose d'elle-même, est celle de la *chaîne*.

3. L'exhaustion de l'hyperbole.

Considérons, dans le plan rapporté aux axes Oxy, la branche de l'hyperbole équilatère définie par

$$y = \frac{1}{x}$$

où x parcourt les nombres > 0.

Commençons par nous donner $x > 1$. Considérons la surface $A(x)$ comprise entre l'axe des x, la branche d'hyperbole et les abscisses 1 et x.

Comment cette quantité varie-t-elle avec x? Donnons à ce dernier un accroissement infinitésimal dx supposé > 0 pour commencer. La différence entre les surfaces $A(x+dx)$ et $A(x)$ est celle d'un petit rectangle de côté dx et y. Plus exactement elle est comprise entre celles des rectangles de côtés dx et y d'une part, $y+dy$ de l'autre; mais l'erreur relative commise en assimilant ydx à $(y+dy)dx$ est dy/y : elle est infinitésimale. Ainsi la variation de $A(x)$ est-elle

$$dA = ydx \ .$$

On ferait la même constatation pour $dx < 0$, et donc $dA < 0$. On a toujours

$$\frac{dA}{dx} = y = \frac{1}{x} \ .$$

Cela signifie que, comme fonction de x, l'aire A a une dérivée égale à $1/x$. Or c'est précisément la fonction simple qui nous manquait dans la liste de dérivées obtenue en première. Cela mérite de donner un nom à la fonction rencontrée. Nous dirons que $A(x)$ est le *logarithme* de x, qu'on appelle aussi *logarithme népérien* du nom du mathématicien anglais John Napier, lequel a été francisé en Neper. On le note $\log x$ ou $\ln x$.

Donc, si $x > 1$, on a pris pour $\log x$ l'aire sous l'hyperbole entre 1 et x. Evidemment on prendra

$$\log 1 = 0$$

dans le prolongement de notre choix puisque l'aire entre 1 et 1 est nulle.

Comment définir $\log x$ pour $0 < x < 1$? Nous voulons que la dérivée reste $1/x$, donc soit positive. Mais l'aire entre x et 1 décroît avec x. C'est donc son opposée que nous prenons. L'argument développé précédemment s'applique et nous trouvons la valeur attendue pour la dérivée.

Les deux définitions se raccordent et la dérivée de la fonction logarithme au point 1 vaut encore $1/x$ c'est-à-dire 1.

4. Variations et limites du logarithme.

Par construction la fonction logarithme est strictement croissante.

On vérifie facilement que

$$\log 2^n - \log 2^{n-1} \geq (2^n - 2^{n-1}).2^n = 2^{n-1}.2^n = \frac{1}{2} \ .$$

Par suite

$$\log 2^n \geq \frac{n-1}{2} \ .$$

Il en résulte que la fonction $\log x$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut.

Dans l'autre sens

$$\log 2^{-n+1} - \log 2^{-n} \geq (2^{-n+1} - 2^{-n}).2^{n-1} = 2^{-n}.2^{n-1} = \frac{1}{2} \ .$$

Par suite

$$\log 2^{-n} \leq -\frac{n-1}{2} \ .$$

Il en résulte que la fonction $\log x$ prend des valeurs négatives aussi grandes en valeur absolue que l'on veut.

5. La fonction exponentielle.

Soit x un nombre réel quelconque. Comme le tableau de variations le montre, on peut trouver un nombre $y > 0$ et un seul dont x soit le logarithme. Ce nombre y est noté

$$e^x \qquad \text{ou} \qquad \exp(x)$$

et appelé *exponentielle* de x. Autrement dit

$$y = e^x$$

si et seulement si $y > 0$ et

$$x = \log y \ .$$

En particulier $e^0 = 1$.

La fonction exponentielle hérite des propriétés de la fonction logarithme. Par exemple, si $y = e^x$ et $x = \log y$, comme

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x \ .$$

C'est une propriété remarquable : la fonction e^x est sa propre dérivée.

6. La relation fonctionnelle.

Soit a un nombre réel. Nous avons

$$\frac{d}{dx}\frac{e^{a+x}}{e^a} = \frac{e^x e^{a+x} - e^{x+a} e^x}{(e^x)^2} = 0$$

de sorte que

$$\frac{e^{a+x}}{e^a}$$

est une constante C. Comme elle vaut e^a pour $x = 0$, on a $C = e^a$. Remplaçant x par b, cela donne

$$e^{a+b} = e^a.e^b \ .$$

C'est la relation *fonctionnelle.*

Il en résulte

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a} \ .$$

La relation fonctionnelle justifie la notation pour l'exponentielle. Si on pose $e^1 = e$, alors e^n est e élevé à la puissance n. De même $e^{p/q}$ est la racine q-ème de la puissance p-ème de e, ou l'inverse.

Pour avoir

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

on est amené, si $a > 0$ est donné à poser

$$a^x = e^{x \log a}$$

et on vérifie pour l'*exponentielle de base* a, les propriétés déjà vus pour celle de base. e.

On vérifie encore que $y = a^x$ équivaut à $y > 0$ et

$$x = \frac{\log x}{\log a}$$

où le membre de droite est appelé *logarithme de base* a et noté $\log_a x$.

7. Equations différentielles.

Une équation différentielle est une équation reliant une fonction inconnue et sa dérivée. Un exemple important est celui d'une équation du type

$$\frac{dy}{dx} = ay + b$$

dans laquelle a, b sont des constantes données.

Soient I un intervalle, x_0 un point de I et y_0 un nombre réel quelconque. Nous allons déterminer les fonctions y définies sur I qui vérifie l'équation donnée ainsi que la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Commençons par le cas où $b = 0$, auquel cas on parle d'équation *homogène*. Nous posons

$$z = ye^{-ax} \ .$$

Il vient

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}e^{-ax} - aye^{-ax} = aye^{-ax} - aye^{-ax} = 0 \ .$$

La fonction z est donc une constante C. Ainsi

$$y = Ce^{ax} \ .$$

La valeur de C est déterminée à partir de la condition initiale. On doit avoir

$$y_0 = Ce^{ax_0}$$

autrement dit $C = y_0 e^{-ax_0}$ et

$$y = y_0 e^{a(x-x_0)} \ .$$

Etudions maintenant le cas général, *inhomogène*. Remarquons que la fonction constante $y = b$ est solution de l'équation. Posant alors $y = b + z$, il apparaît que z est solution de l'équation homogène. Autrement dit

$$z = Ce^{-ax}$$

et

$$y = Ce^{-ax} + b\ .$$

En tenant compte de la condition initiale, on obtient maintenant

$$y = (y_0 - b)e^{a(x-x_0)} + b\ .$$

8. Une limite importante.

Nous avons vu le rôle joué par $e = e^1$. Est-il possible de donner une définition de e indépendante de la construction que nous avons menée? Pour le moment c'est l'abscisse pour laquelle l'aire sous l'hyperbole vaut 1.

La dérivée en 0 de la fonction logarithme vaut 1. Cela signifie que

$$\frac{\log(1+y)}{y} = \frac{\log(1+y) - \log 1}{y - 0} \to 1$$

quand $y \to 0$ par valeurs > 0 ou < 0. En particulier, pour $y = x/n$, nous obtenons

$$n \log(1 + x/n) \to x$$

quand $n \to \infty$. Prenons l'exponentielle des deux membres. Il vient

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$$

quand $n \to 0$.

9. La méthode d'Euler?

Prenons t comme variable, pour faire penser à un temps, et v comme fonction, pour faire penser à une vitesse dépendant du temps. Autrement dit on se place dans un contexte mécanique.

Pensant à un mobile qui est freiné proportionnellement à sa vitesse, on va imposer la condition

$$\frac{dv}{dt} = -v\ .$$

C'est une équation différentielle. Si nous supposons de plus que $v(0) = 1$, nous savons que

$$v(t) = e^{-t}\ .$$

Les physiciens disposent d'une méthode pour simuler numériquement une loi d'évolution. Il écrivent l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{\delta v}{\delta t} = -v$$

et suivent l'évolution en faisant subir à t des accroissements successifs égaux à δt. Nous partons de $t = 0$ où v vaut 1.

Au bout du temps δt, la vitesse v aura subi un accroissement

$$\delta_1 v = -1.\delta t$$

et sa nouvelle valeur sera

$$v_1 = 1 - \delta t \ .$$

Au bout d'un nouveau temps δt, elle aura subi un accroissement

$$\delta_2 v = -v_1.\delta t$$

et vaudra

$$v_2 = v_1 + \delta_2 v = v_1(1 - \delta t) = (1 - \delta t)^2 \ .$$

On montre alors, par récurrence, que la n-ième étape aboutit à

$$v_n = (1 - \delta t)^n \ .$$

Elle apporte en effet un accroissement

$$\delta_n v = -v_{n-1} = -(1 - \delta t)^{n-1}.\delta t$$

ce qui donne

$$v_n = v_{n-1} - v_{n-1}\delta t = v_{n-1}(1 - \delta t) = (1 - \delta t)^n \ .$$

Comparons avec la solution exacte. Après un temps de $n\delta t$ la vitesse aurait dû être

$$u_n = e^{-n\delta t} \ .$$

Résumons. Valider la méthode d'Euler consiste à comparer

$$(1 - \delta t)^n \quad \text{et} \quad e^{-n\delta t} \ .$$

On peut aussi faire ces calculs pour $dx/dt = x$, ce qui reviendrait à inverser le temps. On aboutirait à la comparaison entre

$$(1 + \delta t)^n \quad \text{et} \quad e^{n\delta t} \ .$$

On peut prendre $\delta t = x/n$ pour x fixé et de laisser n tendre vers l'indini. On tombe sur la limite établie à la section précédente. Cependant cela ne correspond pas à l'esprit de la méthode d'Euler et ne la valide en rien.

En effet, appliquer la méthode d'Euler consiste à choisir δt, petit certes, mais sur le lequel on ne reviendra pas et qu'on ne pourra pas faire tendre vers zéro. Surtout s'il faut reprendre la méthode chaque fois qu'on change le point x auquel on veut évaluer la fonction.

Ce qu'on voudrait c'est, une fois δt choisi, évaluer l'erreur commise en remplaçant par exemple $e^{-n\delta t}$ par $(1 - \delta t)^n$. Plus exactement on aimerait quelle valeur T ne pas dépasser, pour $n\delta t$, de façon à maintenir l'erreur dans certaines limites. C'est ce que nous allons préciser, en termes d'erreur relative, pour l'exponentielle décroissante e^{-t}.

Posons $\delta t = y$ pour les calculs. Le quotient de la solution approchée par la solution exacte est donné par

$$(1-y)^n e^{ny}$$

et son logarithme est $n^2 z$ où

$$z = y \log(1-y) \ .$$

Nous allons estimer z en prenant ses dérivées successives

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y}{1-y} - \log(1-y)$$

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = -\frac{y}{(1-y)^2}$$

et

$$\frac{d^3 z}{dy^3} = -\frac{1-2y}{(1-y)^2} \ .$$

La dernière expression vaut -1 en 0. On pourra toujours imposer $y = \delta t$ assez petit pour qu'elle soit $\geq -c$ pour $c > 1$ donné, typiquement $c = 1,1$; cela impose juste à δt d'être inférieur à une valeur de l'ordre du dixième du temps caractéristique.

Sachant que z et ses deux premières dérivées s'annulent en 0, il vient

$$z \geq -\frac{c}{6} y^3$$

d'où

$$n^2 z \geq -(c/6) T^2 \delta t \quad \text{et} \quad e^{n^2 z} \geq e^{-(c/6) T^2 \delta t} \ .$$

Alors l'erreur relative est majorée par

$$1 - e^{-(c/6) T^2 \delta t} \leq (c/6) T^2 \delta t \ .$$

Ainsi sait-on avant quel T s'arrêter si l'on a fixé à l'avance une borne pour l'erreur.

Construction d'une progression spiralée en terminals S :
analyse des relations entre chapitres

IREM de Lorraine, 2006

1. La géométrie.

Il est une partie du programme qui interfère peu avec le reste, c'est toute la géométrie. Pour cette raison on la placera dans un coin, par exemple dans le coin en bas à droite dans le tableau qui est proposé ici.

Il y a d'abord la **géométrie dans l'espace**, qui n'interagit avec rien :

- les **droites et plans et leur caractérisation barycentrique**, où l'on revisite la géométrie dans l'espace de seconde et le calcul barycentrique de première,

- le **produit scalaire** dans l'espace, qui s'appuie sur le produit scalaire plan vu en première.

Sinon la partie géométrique du programme comprend également un **triangle** :

- l'**écriture** $z = a + ib$

- les **transformations planes**

- l'**écriture** e^{ix}

lequel s'appuie sur la représentation des nombres complexes en coordonnées cartésiennes et polaires du programme de première. D'autre par la notation e^{ix} réalise une connexion avec la fonction exponentielle, même si c'est surtout une analogie opératoire à ce niveau.

2. Exponentielle, logarithme, intégrale et dérivée.

Venons-en au programme d'**analyse**. On va commencer par placer

- l'**exponentielle**

dont on vient de voir qu'elle se connecte sur la géométrie par les nombres complexes. Bien d'autres sujets vont toucher cette fonction. Indépendamment des consignes du programme, elle a une place naturelle au centre du dispositif. Quand on ajoute la recommandation d'en parler très tôt et de revenir à plusieurs reprises dessus, cette place n'en est que confortée.

On va oublier un moment la façon dont cette fonction sera introduite. Qui dit l'exponentielle dit en même temps

- le **logarithme**

et d'ailleurs les besoins de la physique, de la chimie et des sciences naturelles concernent au moins autant le logarithme que l'exponentielle, pour satisfaire une fois à la mode de l'interdisciplinarité.

Dans la foulée ajoutons les

- **exponentielles** a^x

pour compléter l'exponentielle e^x.

Même si cela ne doit pas venir tout de suite dans le déroulement du cours, le programme suggère d'introduire le logarithme par l'exhaustion de l'hyperbole, c'est-à-dire par

- l'**intégrale**

et l'on va être confronté à un choix, qu'il aurait fallu faire de toute façon, mais dont la démarche de construction d'une progression spiralée rend la nécessité encore plus évidente.

En efffet, en matière de calcul intégral plus qu'ailleurs, le programme est assez contradictoire. D'un côté il dit que l'intégrale est une aire est qu'on s'appuiera sur la notion intuitive que chacun a de l'aire. De l'autre il invite à pratiquer l'exhaustion de la parabole, donc à considérer des sommes de Riemann sans employer le mot, et d'expliquer que la stratégie se généralise, ce qui revient à s'appuyer sur la construction de Riemann sans le dire.

Evidemment on pourrait faire du chèvre-chou, mais l'intérêt de la construction d'une progression spiralée est qu'elle encourage la limpidité. On va donc présenter un choix, que l'on pourrait qualifier d'*économique* et de *pragmatique*. Puisque l'intégrale est l'aire sous le graphe et que l'aire est une notion intuitive première, on se tient à cela. En étant plus savant, on aurait su que la notion de volume en dimension quelconque ne présente aucune chauuse-trape. On peut faire comme si toute partie avait un volume. C'est le contraire de ce qui se passe pour les longueurs dans le plan ou les surfaces dans l'espace.

Cela revient à considérer que dans le corpus d'intégration, on court-circuite la définition, laissée à l'intuition, pour se concentrer sur la dérivation par rapport à la borne supérieure, qui aura un contenu mathématique puisqu'on la démontrera (dans le cas continu monotone). Voilà pour l'*économie*. Evidemment cela n'empêchera pas de passer le temps qu'il faudra pour habituer les élèves aux notations et aux propriétés de base.

Le *pragmatisme*, dans une classe de baccalauréat, invite à considérer la ROC. Il n'y en a pas sur la définition de l'intégrale mais il y en a une sur le théorème de dérivation cité. On va donc se concentrer sur ce théorème en investissant sur sa démonstration, dans le cas général et dans des cas particuliers s'il le faut.

Evidemment d'autres options sont possibles. Dans la perspective d'un enseignement "d'élite", rien n'interdit d'introduire des sommes de Riemann. D'ailleurs, dans une publication de l'IREM de Limoges, Georges Lion propose une présentation qui part de la notion intuitive d'aire pour expliciter quelques propriétés de l'intégrale de façon à en donner une construction à la fois élémentaire et rigoureuse.

Quoi que l'on fasse l'intégrale débouche sur deux nouveaux concepts, qui sont

- les **primitives**

et

- la **dérivée**

sachant qu'il n'y a pas de contenu dans la notion de primitive et que certains, comme le physicien Roger Balian, ne voit pas pourquoi on en parle, mais c'est sans grande importance.

La dérivée, en terminale, reprend le concept qui a été introduit en première de façon "intuitive", ce qui, contrairement au cas de l'aire, ne veut pas dire grand chose. D'ailleurs le document d'accompagnement de la classe de première propose une sorte de définition grossière, si l'on peut dire, qui n'est ni faite ni à faire. En terminale la dérivée apparaît comme un cas particulier de limite, mais un cas où rien de formel n'a été dégagé non plus et où l'on doit se fier à une pseudo-intuition.

Ici le souci d'*économie* inviterait à glisser. Mais que dit le *pragmatisme*? il y a le théorème de composition des dérivées qu'il faut déduire de celui, admis, pour les limites. Y a-t-il possibilité de ROC? Sans doute et il faudra en tenir compte. Maintenant ce n'est pas simple. La démonstration du théorème de composition des dérivées contient une erreur dans les meilleurs ouvrages, erreur parfaitement assumée. Peut-on vraiment ROCquer?

En attendant de définir précisément ce qu'il faut faire à ce sujet, on passe vite sur l'utilité des dérivées pour

- les **variations**

d'une fonction, puisque c'est dans le programme de première. On va plutôt regarder du côté des limites en oubliant un moment la connexion avec les dérivées pour reprendre le sujet à la source.

En attendant aussi on notera comme prongement de la notion de dérivée, les

- **équations différentielles**,

avec des exemples dans lesquels la fonction exponentielle joue un rôle prééminent. D'ailleurs c'est de cette façon que les dsocuments d'accompagnement suggère de l'introduire. A défaut cet aspect devra très vite être considéré dans le déroulement du cours.

Les équations différentielles sont l'entrée principale vers la **modélisation**. On ne fait cependant pas de cet aspect un thème car il correspond plus à une attitude qu'à un contenu.

3. Limites.

En première on a vu d'une part des calculs de limites et d'autre part la définition de la limite d'une suite, sans hypothèse de monotonie; dans le cas des suites on a établi le "théorème des gendarmes".

En terminale le programme ajoute deux choses, d'une part

- la **limite infinie** d'une suite

et d'autre part

- la limite **à l'infini** d'une fonction.

Diverses compositions de limites sont aussi considérées mais la démonstration n'est pas exigée, semble-t-il.

Dans le cas des limites à l'infini de fonctions, il s'agit d'étendre au cas des fonctions (en $+\infty$ ou $-\infty$ donc), ce qui a été fait pour des suites en première : donner une définition, établir l'unicité et démontrer le "théorème des gendarmes".

Le cadre est assez bien défini même s'il n'est pas sans susciter d'interrogation. D'abord pourquoi tient-on tant à ce théorème des gendarmes, dont on ne tirera rien sinon quelques exercices sur mesure, alors que la bonne stratégie (pour définir par exemple un vecteur vitesse) consiste à ramener les limites à la limite zéro, donc à des limites de valeurs positives, éventuellement monotones même ? Les documents d'accompagnement fournissent la réponse : pour que les élèves aient rencontré dans une démonstation l'utilisation d'une définition formelle. Il y a ROC possible et le *pragmatisme* ne laisse pas beaucoup le choix.

Un peu quand même. La définition officielle est simplement incompréhensible pour un individu normal, qui n'a donc pas déjà fait le tour de la notion de limite. Que signifie la phrase "tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand"? Il y a là un double quantificateur universel à moitié caché et un quantificateur existenciel totalement camouflé. Donner cela comme définition relève de l'escroquerie.

Puisque qu'on ne peut glisser guidé par un souci d'*économie*, on va prendre le parti opposé à celui pris pour l'intégrale. On choisira d'expliciter, pour donner la propriété sous une forme opérationnelle du genre : on se donne un intervalle ouvert I contenant L; on peut alors trouver un nombre A tel que si $x \geq A$, alors $f(x)$ est dans I. On dessinera des "tubes". Il ne faut pas se faire d'illusion. A part un sujet exceptionnel comme on en rencontre de temps en temps, personne ne peut comprendre en profondeur une notion comme celle de limite sans avoir fait *beaucoup* d'exercices sur le sujet. Or le programme n'en demande qu'un seul : le théorème des gendarmes. On le présentera de façon aussi soignée que possible en pensant à la ROC. Maintenant avec les calculatrices et leur mémoire faut-il vraiment comprendre?

Les limites infinies se relient aux exponentielles et aux logarithmes à propos des

- **croissances comparées**,

ce qui ramène au centre du dispositif.

On en arrive aux limites de suites. Le programme introduit les limites infinies, ainsi que le théorème suivant : **une suite croissante non majorée tend vers** $+\infty$. Le fait qu'une suite croissante majorée ait une limite finie est soit admis, soit dérivé de l'existence d'une limite commune à des suites adjacentes.

Quel contenu mathématique y a-t-il derrière cela? Rien. Pour une suite croissante, ou bien elle est majorée et elle a une limite, ce qui est admis, ou bien elle n'est pas majorée et on peut décider qu'elle tend vers $+\infty$ par définition.

Le souci d'*économie* inviterait à glisser. Malheureusement il y a ROC, et une ROC méchante. Compte-tenu de l'autorisation des calculatrices au baccalauréat, on ne peut demander de ROC que là où il n'y a pas seulement "restitution" mais aussi un peu "invention", ce qui est contraire au principe de la ROC. Les questions théoriques sur les limites de suites, qui sont d'une difficulté considérable comme une étude récente du groupe "suites" de l'IREM de Strasbourg en a administré la preuve, se prêtent idéalement à ce jeu vicieux.

Donc il faudra en tenir compte. Ce n'est pas seulement une démonstration léchée sur l'existence d'une limite infinie qu'il faut prévoir, mais tout un travail de logique autour de l'existence ou non d'un majorant, accompagné d'un repertoire d'exemples et de contrexemples. La mémoire des calculatrices sera bien sollicitée.

De la limite à l'infini, on passerait logiquement à

- la **limite en un point**

et

- la **continuité**,

avec le théorème des **valeurs intermédiaires**. On peut évacuer tout de suite ce dernier : la seule chose exigée par le programme est de déduire le cas particulier (d'une fonction monotone) du cas général, autrement dit rien.

Cependant, contrairement à la logique, le programme n'active pas le lien entre une limite à l'infini et une limite en un point. Cela fait que le bloc de la continuité et de la dérivée est complètement déconnecté de la notion de limite. On en reste là-dessus à la pseudo-intuition du cours de première, ce qui fait que la partie centrale du programme d'analyse repose un peu sur le vide.

Bien sûr rien n'interdit de traduire pour une limite en un point ce qui a été dit pour une limite à l'infini. Il n'est pas difficile de prolonger l'escroquerie en remplaçant "pour x assez grand" par "pour x suffisamment voisin de a" ou "pour x dans un voisinage convenable de a". Cependant on épaissit le mystère avec l'emploi des mots "voisin" et surtout "voisinage". C'est d'ailleurs l'une des raisons pour lesquelles le programme a préféré se limiter aux limites à l'infini. Comme il semble hors de question de développer ici, faute de ROC possible, mieux vaut laisser en l'état.

4. Une transition.

L'étude des suites fournit une occasion de mettre en application le principe de

- la **récurrence**,

sachant que c'est un outil que l'on utilise dans des situations très variées.

A l'occasion des suites on peut fournir une manière alternative de calculer certaines intégrales, comme celle sous la parabole qui figure dans le programme, même si l'on exclut d'en faire une introduction aux aires.

5. Probabilités et statistiques.

Le principe de récurrence est à la base de la définition de la fonction $n!$. C'est un moyen parmi d'autres de calculer

- les **combinaisons**,

sachant qu'une approche directe est aussi possible. Il y a là un sujet de ROC, peut-être trop facile pour être exploité.

L'analyse combinatoire est l'outil de base pour calculer

- les **lois discrètes**,

lesquelles partagent le thème des

- **conditionnement et indépendance**

avec

- les **lois continues**.

Ces dernières sont évidemment liées à l'intégrale et surtout à la fonction exponentielle, puisque seules les lois uniforme et exponentielle sont au programme.

Le thème des probabilités débouche sur la **simulation**, et à travers cette dernière sur le problème d'**adéquation** en statistiques, ce qui renoue avec les programmes de seconde et de première.

6. Petite conclusion provisoire.

On a vu, en décortiquant le programme, l'articulation avec les programmes des années antérieures. Peut-être aurait-il fallu mieux flécher les prérequis qu'il faut réactiver, autrement dit préciser la place de quelques révisions.

On aussi vu quelle importance pouvait avoir une contrainte comme la ROC dans une classe de préparation au baccalauréat.

Pour le reste l'analyse du programme donne lieu à des discussions animées parce que ledit programme n'est pas très cohérent. Si ses concepteurs s'étaient livrés à l'exercice de recherche de liens, peut-être auraient-ils amélioré leu copie. D'un autre côté mieux vaut qu'ils ne l'aient pas fait. Il est plus amusant de travailler sur un programme mal foutu que sur un programme impeccablement construit. Les faiblesses ouvrent un espace pour la liberté pédagogique que la recherche d'une progression raisonnée exploite merveilleusement. Et ceci avant même que l'aspect spiralaire proprement dit ait été abordé.