Progression en terminale STG

Jean-Pierre Ferrier
IREM de Lorraine
juin 2007

L'idée de ce qui suit est de faire partir la réflexion sur la progression non pas de la lettre des programmes, mais d'un niveau en amont, reconstitué à partir desdits programmes. Cela ne les concerne pas en totalité, puisqu'on laissera en l'état les thèmes suivants

- ajustement et optimisation linéaires,
- arbres de probabilités,

lesquels donneront lieu à des axes s'ajoutant à ceux que l'on considèrera.

C'est sur la partie d'Analyse mathématique que l'on veut réfléchir, sachant qu'elle contient des révisions de la classe de première. Tout d'abord il est clair qu'un cours de mathématiques digne de ce nom ne peut pas comprendre un chapitre séparant d'un côté l'information chiffrée et de l'autre les fonctions nouvelles que sont l'exponentielle et le logarithme, comme le suggèrent les programmes. C'est autour des outils qu'un cours doit être organisés, outils au demeurant utiles à l'analyse de l'information chiffrée et éventuellement présentés dans un contexte particulier. Il n'y a pas à isoler dans quelque ghetto ce qui concerne l'information.

Cela dit, la partie d'Analyse peut être organisée elle-même en deux axes, l'un qui est attaché au concept de *pente* et l'autre au concept de *taux*. Pour chaque axe on envisage trois paliers, notés 1, 2 et 3, pour permettre un parcours en spirale.

	pente	taux
	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	$\dfrac{\Delta y}{y\Delta x}$
1a	variation absolue	variation relative
1b	suite arithmétique	suite géométrique
2a	$f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$	$f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$
2b	fonction linéaire affine	fonction exponentielle
3a	dérivée	taux
3b	exponentielle	
3c	logarithme	

Voyons maintenant comment les divers éléments du programme officiel peuvent s'inscrire dans cette organisation.

Variations.

On considère d'abord des évolutions discrètes, donc pas à pas. Pour cette raison il n'y a pas nécessairement de dénominateur, ou alors on ne le voit pas, le pas étant pris égal à 1. Pour commencer on s'intéresse à un seul pas.

La *variation absolue* de y est simplement la différence

$$y_2 - y_1 .$$

Elle a une dimension et se mesure avec une unité. Cela ne l'empêche pas d'être une *pente*, pour laquelle la variable x n'a pas ici de dimension.

Elle s'oppose à la *variation relative*, qui est

$$\frac{y_2 - y_1}{y_1}$$

et que les économistes appellent *taux de croissance*, comme il est naturel puisque nous sommes du côté des *taux*, sachant qu'elle traduit une croissance lorsqu'elle est positive et une décroissance dans le cas contraire. La variation relative est sans dimension; elle se mesure sans unité.

Cette variation relative peut aussi être évaluée en pourcentage, sachant que % représente simplement la fraction *un centième* ou le nombre $0,01$.

La variation relative t est évidemment liée au rapport y_2/y_1 par

$$t = \frac{y_2}{y_1} - 1 .$$

Lorsque y_2/y_1 est mesuré en pourcentage et qu'il se rapporte à une valeur y_1 prise comme référence, on parle aussi d'*indice*. Dans tous les cas, ce rapport, coefficient sans dimension par lequel on multiplie y_1 pour obtenir y_2, est central ici, qu'on l'exprime comme un nombre, une fraction ou un pourcentage.

Si l'on enchaîne deux fois le même taux t, il ressort de

$$(1+t)^2 = 1 + 2t + t^2$$

que l'on obtient $2t + t^2$ comme taux composé, et non pas $2t$ comme on pouvait le penser. Cependant, lorsque t est petit, on peut retenir $2t$ comme une bonne approximation, i.e. au prix d'un erreur *relative* faible. En effet cette erreur

$$\frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2}$$

est petite quand t est petit. Noter qu'elle est petite en valeur absolue, ou encore petite devant 1, le taux t étant sans dimension. Par exemple, si $t = 1\%$, alors l'erreur est de $0,5\%$.

Cela étant, invoquer le fait que la dérivée en 1 de la fonction x^2 — appelée fonction carré — est 2 est simplement grotesque. D'abord, l'erreur relative s'obtenant directement, parler de dérivée est déjà une trissotinade. Mais il y a bien plus grave : jamais une propriété asymptotique, comme la valeur d'une dérivée, n'a pu garantir une quelconque approximation. Par exemple

$$2t + 10^9 t^2$$

a bien 2 pour dérivée en 0. Cependant, pour t comme 10^{-3}, remplacer cette fonction par $2t$ n'est pas une bonne approximation.

Même si $t = 10^{-6}$, l'erreur 10^{-3} peut sembler petite, mais en, valeur relative, elle vaut

$$\frac{10^{-3}}{2.10^{-9}} = 5.10^5 \ !$$

Or cette explication ridicule apparaît à deux reprises dans le programme.

Suite arithmétique et géométrique.

Toujours dans le cadre discret, on enchaîne maintenant les pas.

Une suite arithmétique est une suite à pente constante, i.e. dont les variations relatives successives sont constantes.

Une suite géométrique est une suite à taux constant, i.e. dont les variations relatives succesives sont toujours les mêmes; il revient au même de dire que les rapports successifs le sont; on leur donne le nom de *raison*.

Dans chaque cas on peut exprimer le terme général et la somme de n termes successifs. Introduire la notation $u(n)$ est justifié par l'usage du tableur; c'est plus raisonnable à ce niveau que de chercher à voir une fonction derrière la suite.

Le programme insiste sur les propriétés suivantes (page 12) :

– dans une suite arithmétique, chaque terme est la moyenne arithmétique des deux termes qui l'encadrent;

– dans une suite géométrique, chaque terme est la moyenne géométrique des deux termes qui l'encadrent.

On peut se demander pourquoi mettre en avant de telles propriétés si ce n'est pas pour passer au modèle continu. Il est envisagé (page 49) que l' "on aurait pu (...) introduire les fonctions exponentielles par cette entrée", mais l'irréel du passé exclut cette stratégie. En haut de la page on donne la "définition retenue", qui correspond à un tout autre choix.

Il est cependant dit (page 19) ceci : "la présentation du programme privilégie l'introduction de la fonction ln avant la fonction exponentielle mais le professeur reste libre de l'ordre de l'exposé". Nous profitons de cette liberté pour mettre un peu plus de cohérence dans l'ensemble.

Fonctions linéaires affines.

A partir de cet endroit, nous cherchons à nous approcher du cas d'une variable continue, seul cas d'ailleurs où le vocable fonction devrait être utilisé au lycée.

Il ne s'agit pas véritablement d'un problème d'interpolation. On peut parler d'interpolation lorsqu'on cherche à remplir les espaces pour une fonction dont on ne dispose que d'un certain nombre de valeurs, mais sans qu'on ait aucune ligne directrice pour le faire. On pourra ainsi faire une interpolation linéaire, car c'est la moins coûteuse. Ou, dans le cas fini, une interpolation polynomiale, dont l'inconvénient est l'instabilité. Ou, encore, pour combiner esthétique et stabilité, une interpolation par des fonctions splines etc. Ici, comme on le verra, c'est très différent. On va ici construire, calculer les valeurs intermédiaires.

Si les valeurs aux points entiers sont en suite arithmétique, non seulement les pentes successives sont égales, mais toutes le sont aussi. Le prolongement naturel est donc réalisé par une fonction linéaire affine de même pente.

On peut aussi remarquer que

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

lorsque x, y sont entiers de même parité. Il est naturel d'imposer la propriété, avec x, y quelconques, pour le prolongement. Cette formule caractérise les fonctions linéaires affines aux points dyadiques. Elle permet d'abord, en considérant en effet des nombres entiers x, y succcessifs, de compléter sur les demi-entiers; ensuite on passe aux quarts etc.

Fonctions exponentielles.

On s'intéresse à la suite géométrique a^n, complétée du côté négatif. Un solution intellectuellement satisfaisante pour la prolonger consisterait à vérifier que

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \sqrt{f(x)f(y)}$$

lorsque x, y sont entiers de même parité. Partant de là on complèterait sur les demi-entiers, puis les quarts, les huitièmes ... comme précédemment.

Cependant, sachant que $a^0 = 1$ ici, c'est plutôt sous la forme

$$a^{x+y} = a^x.a^y \tag{1}$$

que l'on retiendra la propriété pour x, y entiers, puis dyadiques, ou plus généralement rationnels. On en déduira que

$$(a^{x/n})^n = a$$

ce qui conduit à $a^{1/n}$, puis à $a^{p/n}$.

En fait, historiquement, c'est plutôt la propriété

$$g(\sqrt{xy}) = \frac{g(x)+g(y)}{2}$$

ou $g(xy) = g(x) + g(y)$, qui a été retenue, pour accéder au logarithme. L'idée est de transformer une moyenne géométrique en moyenne arithmétique, ou un produit en somme, rendant ainsi simple ce qui est complexe. Le programme y fait allusion (page 49), mais cette idée est malheureusement orthogonale au choix qu'il fait dans sa présentation, choix qui fait passer sans transition des valeurs aux points entiers à celles aux points réels.

La propriété (1) est complétée par

$$(ab)^x = a^x.b^x \tag{2}$$

et

$$(a^x)^y = a^{xy} \tag{3}$$

comme on le vérifie aussi.

Maintenant, pour coller davantage à la lettre du programme, on peut avoir l'idée ne retenir que la propriété

$$f(x) = \sqrt{f(x-1)f(x+1)}$$

qui relie $x-1$, x, $x+1$, pour chercher d'abord la valeur à prendre entre deux nombres entiers consécutifs. On en tirerait, en changeant l'échelle, la valeur en un demi-entier. Or ce n'est pas très convaincant. Pourquoi aurait-on la même formule en changeant l'échelle? Par exemple

$$2^x + \sin(2\pi x)$$

a la propriété cherchée sans être une fonction exponentielle. On ne peut donc pas se contenter de considérer trois termes consécutifs.

Par ailleurs parler de "taux moyen" pour désigner le taux t tel que $(1+t)^2 = 1+T$, où T serait le "taux global", est très malheureux. Mieux aurait valu un autre nom pour ce taux intermédiaire, qui va finir par donner pratiquement un taux instantané si l'on poursuit la division. Appelerait-on pente moyenne la moitié de la pente? En fait les valeurs moyennes sont toutes des valeurs globales. Il s'agit à la rigueur d'un "taux médian" : la médiane est la valeur au milieu quand la moyenne est le milieu des valeurs.

Plutôt que de chercher un point moyen entre deux autres, on serait bien plus crédible en cherchant une suite géométrique représentant les valeurs aux points $n/2$ et coïncidant avec la première aux points entiers. On s'aperçoit alors que la raison de cette nouvelle suite doit être la racine carrée de la raison de la première. C'est donc un taux intermédiaire que l'on met ainsi en évidence.

Il reste que cette construction aux points dyadiques ne correspond guère aux situations réelles, pas plus que le calcul du fameux "taux moyen". Les intérêts sont donnés par un taux annuel alors qu'on applique à l'épargne un taux bimestriel. C'est une division par 24 de l'intervalle de temps qui fait passer de l'un à l'autre. En musique l'intervalle de base de la gamme chromatique correspond à un découpage géométrique en 12 du facteur 2.

Pour cette raison la formule (1) devrait servir de guide à la définition de a^x pour x rationnel, c'est-à-dire de $a^{n/q}$ et en particulier de $a^{1/q}$. Il est très étonnant que cette dernière expression ne soit pas présentée dans le programme avant l'introduction du logarithme. Le passage délicat par le continu n'est en rien nécessaire.

Dérivée.

La dérivée est la limite de la pente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

quand Δx tend vers 0. On peut aussi parler de pente instantanée.

Le programme dit que le nombre dérivé a été défini en classe de première. En même temps le concept de fonction, introduit en seconde, y est consolidé.

A ce sujet on a droit à l'innommable litanie sur les calculatrices et ordinateurs, lesquels en auraient, dit-on, renouvelé la problématique. Comment peut-on écrire une ânerie pareille, à savoir que les machines auraient changé le concept de fonction? Le concept s'est construit progressivement au cours des derniers siècles, notamment avec les problèmes de mécanique, et il a été complètement codifié avant la dernière guerre par Bourbaki, même si l'enseignement du lycée n'a pas à y chercher un modèle.

Or le premier ordinateur date de 1947. Certes la science informatique a enrichi le concept d'exemples nouveaux, mais cela n'a rien à voir avec l'utilisation des machines. Bref le dessin de la courbe n'est pas un but mais une synthèse de l'étude effectuée. En faire la première étape revient simplement à donner la solution avant de la demander. Car il y a des l'intelligence humaine dans la conception des machines.

A propos des machines on nous explique par le menu les connaissances pratiques exigibles et dont l'apprentissage est trop souvent négligé, qui font de l'élève un esclave d'une technique qui n'est pas toujours au point.

Il convient de faire une exception pour le tableur que je ne range pas avec le grapheur ou la calculatrice graphique. Le fonctionnement du tableur, à condition de n'utiliser que les opérations de base, est transparent. Il peut répéter, en grand nombre, des opérations que l'élève doit savoir faire seul, ce qui suppose qu'il en ait déjà compris le sens et n'ai pas été gâté par les calculatrices en amont.

Sinon l'alibi qui consiste à parler des limites du calcul sur machine, en expliquant qu'il ne peut pas servir de démonstration, est lamentable. Les insuffisances en matière de précision, de grain, de domaine, sont illustrées par des exemples d'école, qui ne concernent pas la vraie vie. Les machines fonctionnent remarquablement et c'est heureux. Le rôle de l'enseignement est d'expliquer, autant que faire ce peut, comment elles fonctionnent.

Revenons à la dérivée. En première, le nombre dérivé est introduit comme un concept graphique ou à partir d'une approximation linéaire graphique. A aucun moment le rapport

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

n'est mentionné, ni la notation

$$\frac{dy}{dx}$$

utilisée. C'est ce qui fait que toutes les formules sont admises alors que les expliquer aurait été si simple.

Il est étonnant que, dans une filière se voulant appliquée, on n'imagine pas que x, y puissent avoir une dimension. En même temps on peut lire, une fois de plus : "on parle de pente uniquement lorsque le repère est orthonormé". Or c'est absolument faux. Déjà la pente d'une route est le quotient de l'élévation par la distance parcourue sur la route : une pente de $100\% = 1$ caractérise la verticale. Par ailleurs, en électronique, la *pente interne* ou *transconductance* est le quotient d'une intensité par une tension.

Seul élément positif dans cette débâcle, la notation $v \circ u$ n'est pas au programme. Cette limitation, mineure, au concept de fonction s'explique par un souci de rigueur mathématique : on ne peut pas composer correctement les fonctions au lycée. Elle est néanmoins bienvenue.

Taux.

La dérivée est la limite du taux

$$\frac{\Delta y}{y \Delta x}$$

quand Δx tend vers 0. On peut aussi parler de taux instantané.

Exponentielle et logarithme : approche heuristique.

Commençons par une approche heuristique, dans laquelle on ne se soucie pas trop de justifications théoriques. On définit la fonction exponentielle $y = a^x$ en passant du cas où x est décimal au cas où il est réel, i.e. du cas d'un développement décimal limité à un développement décimal illimité. Les propriétés (1), (2), (3) s'étendent.

La dérivée sera la limite de

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x . \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \ .$$

De son côté le taux sera la limite de

$$\frac{\Delta y}{y \Delta x} = \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \ .$$

Cette quantité ne dépend pas de x, ce qui veut dire qu'une fonction exponentielle représente une évolution à taux constant. Le taux en question, qui est aussi la dérivée de a^x en 0, est un nombre $\mu(a)$.

Pour $a > 1$, on a $\mu(a) \geq 0$ et même $\mu(a) > 0$; sinon on verrait que la fonction a^x est constante, mais il y aurait de meilleurs arguments. Sachant que $(a^t)^x = a^{tx}$, on obtient

$$\mu(a^t) = t\mu(a) \ .$$

Par conséquent le taux $\mu(a)$ peut prendre tous les valeurs réelles : l'on obtiendra de la sorte tous les taux d'évolution. En particulier il existe un nombre réel e et un seul tel que $\mu(e) = 1$, et donc $(e^x)' = e^x$. De plus $e^{\mu(x)} = x$. Désormais on notera $\ln(x)$ le taux $\mu(x)$ et il sera appelé le *logarithme népérien* de x; la fonction qui à x associe $\ln(x)$ est appelée *fonction logarithme de base e*. Comme

$$\ln(e^x) = x$$

c'est la fonction inverse de la fonction e^x, appelée *fonction exponentielle de base e*.

On évidemment $a^x = e^{x \ln(a)}$, ce qui ramène l'étude de toutes les fonctions exponentielles à celle de base e.

Les propriétés de la fonction ln s'obtiennent aisément, soit à partir de celles de e^x, soit à partir de sa définition. D'abord $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. Ensuite la dérivée de $\ln(x)$ est 1/x.

Il resterait, même si ce n'est pas demandé dans le programme, à caractériser toutes les fonctions à taux constant, i.e. à résoudre $y' = ay$, pour constater que ce sont, à un facteur constant près, les exponentielles : on dérive $e^{-ax}.y$ pour cela.

Le logarithme d'abord.

Le programme demande d'admettre l'existence d'une primitive pour la fonction $1/x$. Il est parfaitement anormal de faire cette hypothèse a priori, comme cela a été le cas pour la primitive d'une fonction continue, voire dérivable, à une époque. Ce n'est pas parce qu'on connaît un primitive pour les autres puissances de x et qu'on n'en a pas rencontré pour la valeur -1, qu'il en existerait une aussi. C'est “Dieu existe : je ne l'ai pas rencontré”.

Certes on peut justifier l'hypothèse si l'on devine qu'il existe une fonction transformant les produits en somme, comme la remarque en est faite (page 49) dans le programme. Encore faudrait-il disposer d'une intuition de cette existence, par exemple en plaçant des points intermédiaires à la manière de ce que nous avons fait. Or ce n'est précisément pas le choix du programme.

Cela étant, ce qu'on vient de dire ne s'applique pas du tout à un programme de terminale scientifique. En effet les objectifs sont différents et les deux approches, par le logarithme ou par l'exponentielle, également défendables.

a) On ne vise pas en priorité les calculs d'intérêts composés, mais la résolution des équations différentielles de la physique. Ainsi les deux propriétés $(e^x)' = e^x$ et $(\ln(x))' = 1/x$ sont-elles premières.

b) On n'admet pas l'existence d'une primitive de $1/x$, on la démontre. Par l'exhaustion de l'hyperbole, laquelle s'appuie sur le concept intuitif d'aire. Comme on introduit l'intégrale d'une fonction continue plus ou moins monotone, il est bien normal de s'en servir.

La suite est banale. On étudie les variations de la fonction ln et on montre que $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ en dérivant. On définit e par $\ln e = 1$ et a^b par $\ln(a^b) = b \ln a$. On étudie la fonction e^x et la dérive. On termine par la fonction a^x.

On sent bien que ce c'est la possibilité de faire des démonstrations formellement "correctes" qui a été déterminant dans le choix des concepteurs du programme, au mépris de l'éthique scientifique. Comme le dirait Henri Lebesgue, la vision d'ensemble est sacrifiée au bénéfice de quelques parties "rigoureuses" : les mathématiques cessent d'être un monument pour ne plus être qu'un tas!

Justifications.

Reprenons le fil de la présentation heuristique pour en combler les manques. Les justifications ne sont sans doute pas nécessaires pour la filière STG. C'est pour une filière scientifique qu'elles prennent tout leur sens.

Cela nous renvoie à la stratégie préconisée par Jean-Pierre Demailly, laquelle est inspirée de la présentation de John Napier lui-même et se greffe très naturellement sur la définition de la fonction a^x que nous avons esquissée. La méthode est en même temps complètement rigoureuse. En particulier elle se passe du théorème, admis au lycée, suivant lequel une fonction de dérivée nulle sur un intervalle y est constante, sachant que l'énoncé est malgré tout incontournable pour étudier certaines variations et pour résoudre les équations différentielles $y' = ay + b$ du programme. Il n'est pas besoin non plus de connaître la dérivée d'une fonction inverse.

Plus encore, cette présentation ne nécessite même pas d'avoir parlé du concept de limite ou de dérivée en général, donc de savoir, même vaguement, ce qu'est une fonction continue ou dérivable. On se contente de calculer des limites monotones majorées, auxquelles on aura donné un sens, en les ayant établies : ce sont des nombres réels, dans le sens qu'en donne Henri Lebesgue, déjà cité, dans son ouvrage sur la mesure des grandeurs, autrement dit des développements décimaux illimités. Et on calcule des dérivées qui ont aussi un sens. Le seul point de divergence que l'on puisse exprimer avec le promoteur de cette stratégie est qu'il ne semble pas vouloir profiter complètement de cette chance de comcilier jusqu'au bout une prétention modeste avec une grande exigence.

Donc on aura commencé par construire a^x pour x réel en passant à la limite sur des a^r, où r est rationnel. Les propriétés (1), (2), (3) s'étendent.

Il ne faut pas sousestimer l'étude du cas des exposants rationnels. On aura défini $b = a^{m/p}$ par $b^p = a^m$. Par exemple, puisque c'est finalement la clé de tout, il faudra démontrer explicitement la propriété

$$\left(a^{m/p}\right)^{n/q} = a^{mn/pq} \ .$$

En effet, avec b comme plus haut et $c = b^{n/q}$, on a

$$c^{pq} = (c^q)^p = (b^n)^p = (b^p)^n = (a^m)^n = a^{mn} \ .$$

Maintenant est-il raisonnable de penser que l'on puisse comprendre directement la cas continu sans passer par des intermédiaires comme $a^{1/q}$ au moins? L'exemple des intérêts composés n'atteint jamais le cas continu : on calcule par quinzaine.

La notation a^b est un exemple typique du formalisme qui pense tout seul à votre place. La propriété $(a^b)^c = a^{bc}$ est tellement inscrite dans la notation elle-même qu'on peut oublier comment elle se démontre tant il est impossible de s'y tromper. Sur le plan didactique, en particulier, c'est une très bonne raison d'y recourir comme intermédiaire.

Pour passer aux exposants réels, on a besoin d'une propriété qui exprime la continuité de la fonction croissante a^x, sachant qu'il suffit de se placer en 0 et de prendre $1/q$ comme argument. Par exemple, pour $a = 1 + h > 1$, on a

$$1 \leq (1 + h)^{1/q} \leq 1 + \frac{h}{q}$$

comme le donne la formule du binôme apliquée à $(1 + h/q)^q$.

Il faut ensuite justifier l'existence de la dérivée, sachant qu'il suffit de se placer en 0 et de justifier la limite de

$$\frac{a^h - 1}{h}$$

quand h tend vers 0. Pour cela on montre que l'expression est croissante en h réel non nul. On se ramène aussitôt au cas rationnel non nul. Si maintenant $x = n/q$ et $y = p/q$, on pose $a = b^{1/q}$ pour comparer les valeurs en x et y; on se ramène ainsi au cas au cas entier relatif non nul. Enfin il n'est pas très difficile de se ramener au cas entier naturel non nul. On doit finalement comparer les valeurs en deux nombres entiers consécutifs, pour montrer que

$$n(a^{n+1} - 1) \geq (n + 1)(a^n - 1) \quad \text{ou} \quad n(a^{n+1} - a^n) \geq a^n - 1$$

ce qu'on obtient en ajoutant les inégalités $a^{n+1} - a^n \geq a^{p+1} - a^p$ pour $1 \leq p \leq n$.

Partant de là, on définit le *logarithme népérien* $\ln a$ comme le multiplicateurque nous avons considéré, autrement dit comme la dérivée de a^x en 0. Les formules pour $\ln(a^t)$ et $\ln(ab)$ s'obtiennent aussitôt. La dérivée du logarithme en découle. Le fait que la dérivée en 1 soit égale à 1 résulte de l'encadrement

$$1 - \frac{1}{a} \leq \ln a \leq a - 1$$

pour $a > 0$, lequel découle de la croissance en h du quotient de dérivation.

La fin est banale.