Les mathématiques enseignées peuvent-elles bénéficier du sens fourni par la modélisation?

par Jean-Pierre Ferrier, IREM de Lorraine

J'ai repris le titre qui devait être le thème de la journée du Comité scientifique des IREM du 28 novembre 2003 et qui s'est retrouvé celui de mon intervention. De cette dernière, qui figure dans le recueil sur la modélisation qui a été tiré de la journée, j'ai conservé l'orientation générale et l'argumentation, ajoutant quelques éléments et corrigeant quelques détails pour rendre le propos moins allusif.

Comme il faut de temps en temps essayer d'apporter une réponse claire à une question simple, on va expliquer que la réponse à la question posée est non, du moins si l'on prend le mot modélisation dans le sens communément admis chez les ingénieurs et les scientifiques. La modélisation ne peut apporter de sens qui puisse être pris en compte dans l'enseignement du collège ou du lycée.

Evidemment l'on peut aussi donner du terme une acception plus large. Pourquoi ne l'ai-je pas fait? D'abord parce qu'il existe déjà d'autres mots pour désigner des activités que les milieux de l'éducation ont tendance à classer dans la modélisation. Ensuite parce que je méfie de l'utilisation extensive des termes à la mode, dont le verbe conjecturer et l'adjectif isométrique sont aussi des exemples.

LE VOCABULAIRE

Qui parle de modélisation ?

De modélisation, au sens propre du terme et à propos de l'enseignement, il a été question avec Nicolas Bouleau dans un article de la revue de l'APMEP [Bo], lequel décrit la modélisation chez les ingénieurs, ou avec Claude Lobry [L] dans sa conférence au dernier séminaire des IREM de Nice, lequel a parlé de la modélisation en biologie, conférence reprise dans la revue Repères. On aurait pu penser également à Ivar Ekeland à propos des sciences économiques, mais il ne semble pas qu'il se soit exprimé en pensant à l'enseignement. Pour cette raison on parlera peu de ce domaine, ce qui n'aura heureusement pas d'incidence majeure sur l'analyse.

Comment caractériser la modélisation? Nicolas Bouleau nous donne fort opportunément la clé quand il nous révèle que "(...) la modélisation présente une troisième caractéristique, qui la distingue encore plus nettement des théories scientifiques idéales: la *sous-détermination*".

La sous-détermination est très précisément ce qui amène à faire des choix par insuffisance d'hypothèses naturelles. Prenons un exemple classique en biologie, celui de la loi logistique, laquelle a servi de thème en 2003 au sujet du baccalauréat de la série S. Inspirons-nous de la présentation donnée par Jean-Paul et Françoise Bertrandias [Be] dans leur ouvrage de première année universitaire pour les filières biologiques. Il s'agit de modéliser l'évolution d'un population $N = N(t)$ dans un milieu dont les ressources, limitées, ne permettent pas de nourrir davantage que N^* individus.

Le taux de croissance

$$\frac{dN}{Ndt}$$

qui serait constant en l'absence de limitation des ressources par le fait de naissances proportionnelles à la population pendant un intervalle de temps réduit, doit être nul pour $N = N^*$. Le modèle le plus simple correspond à un taux égal à $k(N^* - N)$. Les expériences faites avec la mouche du vinaigre montrent que le modèle est relativement bien adapté, sans que le choix d'une fonction affine de N en soit pour autant validé.

Des deux analyses citées, il ressort que la modélisation est

chez les ingénieurs :	**dans les sciences molles :**
- complexe	- subtile
- peu explicative	- instructive
- efficace	- très réductrice

On est très loin de pouvoir inspirer l'enseignement de base. Dans les deux cas le transfert vers l'enseignement, même s'il évoqué, est impossible. C'est bien trop savant et l'on pénètre beaucoup trop peu l'intimité des phénomènes.

Pour les ingénieurs, c'est l'efficacité qui prime. Et elle est au rendez-vous. En construction aéronautique toute la mise au point se fait sur ordinateur. Le premier avion construit est vendu et transporte des passagers. Il faut détruire l'idée qu'on applique des recettes. La conception des avions furtifs, par exemple, a donné lieu à des mathématiques très avancées (et secrètes).

Pour être complet, il faut quand même donner un exemple de mathématiques pour l'ingénieur qui restent accessibles. Il s'agit de tout ce qui touche à l'infographie, que l'on s'intéresse au dessin des caractères d'imprimerie ou à la confection des pare-brise des véhicules Renault. On fait grand usage de fonctions *splines*, de courbes de l'ingénieur Bézier, ou de leurs équivalents pour les surfaces. On doit à Jean-Jacques Risler [R] l'idée de se servir de ces techniques pour illustrer la dérivabilité dans les premières années de l'université.

Le monde virtuel des fonctions splines semble ne rien devoir à la physique. En fait il lui doit tout. L'oeil humain aime les courbes tendues. L'exemple en est donné par une languette flexible — d'où le terme anglais *spline* — à la laquelle on impose à chaque extrémité une position et aussi une direction. C'est un bon exercice de chercher l'équation de la courbe ainsi obtenue. Mais qui pourrait s'y intéresser parmi les collègues mathématiciens aujourd'hui?

Dans les sciences molles, on ne cherche pas à reproduire les phénomènes réels dans toute leur complexité. On cherche surtout à détruire des idées fausses, souvent tirées elles-mêmes de modèles un peu trop vite imposés. Il y a un ou deux ans un éminent biologiste expliquait les vertus de la reproduction bisexuée, beaucoup plus propice à l'adaptation au milieu que la reproduction monosexuée. Cependant il terminait sur un doute : comment un petit avantage pourrait-il compenser la brutalité de la suite géométrique 2^n traduisant le fait qu'avec des femelles seules chaque génération compte deux fois plus d'individus. L'étude d'un petit système différentiel tenant compte de la limitation des ressources du milieu remet les choses en place.

Ce dernier modèle n'est pas sans engendrer aussi des idées fausses. Sur la base d'une évolution sur le long terme, on va définir ce qu'est un milieu favorable à une population α en compétition avec une population β. Se peut-il qu'en cas d'alternance régulière entre deux milieux — le jour et le nuit par exemple — les deux soient favorables à α alors que l'alternance est profitable à β? Comme l'a bien expliqué Claude Lobry, l'étude d'un exemple bien choisi montre que oui.

On combat donc la croyance aveugle en certains modèles par la considération d'autres modèles. Ce n'est cependant guère compatible avec le souci d'économie qui caractérise l'enseignement.

Il reste que le rôle de la modélisation est toujours explicatif, même si cette dernière n'apporte qu'une part d'explication. Cela vaut aussi pour la modélisation en sciences économiques, sachant qu'on sera encore moins exigeant sur la part d'explication qu'on en attend.

En revanche la considération d'un modèle exclusivement descriptif, qui ne cherche en rien à expliquer les phénomènes, n'entre pas dans la démarche scientifique. Tout au plus ce pourrait être une première étape, qui resterait sur le seuil de la Science.

Quand on entend parler de modélisation à propos de la recherche d'une fonction qui représenterait le contour du soleil, on a de quoi s'inquiéter. Cet exemple débile est malheureusement assez représentatif de ce qui se fait dans les TPE.

Et en physique ?

En physique le terme intervient rarement. Il est utilisé quand le physicien commence à ne plus vraiment comprendre, donc à un niveau très élevé.

Eventuellement le physicien dira que la modélisation est de son ressort et que le mathématicien lui fournit les outils. En fait la frontière des responsabilités est floue.

A un niveau élémentaire, la modélisation peut être faite aussi bien par le physicien que le mathématicien, et personne ne parle de modéliser. A un niveau plus élévé il faut les deux. Il y a des exemples de collaboration de pointe. Cependant, dans tous les cas, chacun doit connaître une part significative de la discipline de l'autre; ce n'est plus réalisé aujourd'hui chez les enseignants de mathématiques.

C'est dommage car on dispose de modèles simples utilisables dans l'enseignement des mathématiques à un niveau raisonnable. C'est le cas de l'optique géométrique, comme avec la résolution du problème de la réfraction que donne Fermat en cherchant un trajet optique minimum. C'est aussi le cas dans le problème de la stabilité des navires, que Jean Dhombres [D] cite en exemple historique de mathématiques appliquées, ou de mathématiques *mixtes*, comme on disait à l'époque.

Quand Nicolas raille Bouleau ce qu'il appelle les "sciencettes", comme l'optique géométrique, parce qu'elles seraient fausses, il a raison du point de vue de l'ingénieur. Quand il faut, pour concevoir un objectif photographique, corriger l'astigmatisme, les aberrations géométriques et chromatiques et limiter la diffraction, une lentille simple ne fait pas l'affaire. Cependant l'optique géométrique est rigoureusement exacte comme modèle asymptotique en lumière monochromatique. Alors que l'optique de l'ingénieur est fausse et sa faiblesse assumée, avec des résultats qui satisfont pleinement l'utilisateur.

Pour éviter les confusions, quand on travaille des deux côtés de la frontière entre mathématiques et physique, mieux vaut parler simplement de mathématiques contextuelles.

Si l'on en entend si peu parler de modélisation en physique au niveau élémentaire, c'est qu'il n'y a en général pas sous-détermination. D'abord il y a le cas où l'étude d'un problème physique a forcé la création de nouvelles mathématiques. On y reviendra.

Ensuite il y a le cas où l'étude d'un problème physique utilise des mathématiques déjà inventées, mais où des hypothèses s'imposent qui à leur tour imposent le modèle. C'est le cas avec la désintégration des noyaux qui sert aujourd'hui d'introduction à la fonction exponentielle dans les programmes de terminale S. L'invariance dans le temps et l'absence d'interactions conduit sans ambiguïté à une équation différentielle ou fonctionnelle qui caractérise la loi exponentielle. La version probabiliste repose sur une autre formulation des hypothèses, celle de mort sans vieillissement; mais elle conduit au même résultat.

Qui parle de modèle?

Noter que les probabilistes utilisent le mot *modèle* comme d'autres parlent d'équation, différentielle ou autre, ou les physiciens de *loi*, encore que les probabilistes utilisent aussi ce dernier terme.

Cependant choisir un modèle pour travailler sur ce dernier n'est pas modéliser, ni faire des mathématiques mixtes ou contextuelles. Encore faut-il expliquer le pourquoi du modèle en précisant les éléments qu'on a choisi de prendre en compte.

Lorsque Claude Allègre compare la chute libre d'une balle de tennis et d'une boule de pétanque sur les premiers mètres de la chute, il annonce qu'il peut négliger la résistance de l'air et prend l'équation — ou modèle — donné par

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg$$

pour conclure qu'il n'y a pas de différence sensible. Ceux qui l'ont raillé auraient dû prêter plus d'attention à son propos.

Quand Gérard Kuntz nous explique que c'est l'équation

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt}$$

qu'il faut choisir, il ne fait qu'introduire en plus la résistance de l'air, à des vitesses relativement faibles. Cette équation est elle-même inadaptée à la boule de pétanque dès que cette dernière a acquis suffisamment de vitesse.

Le choix du modèle n'est jamais arbitraire. Il dépend de ce qu'on prend en compte ou qu'à l'inverse on néglige. Une fois le contexte précisé, il doit s'imposer. L'histoire a cependant montré que la route pouvait être longue et semée d'embûches.

Lorsque la noosphère, avec des formateurs des IUFM ou des IREM par exemple, parle de la théorie des probabilités, on entend souvent que les résultats dépendent du choix du modèle. Il n'y a rien d'étonnant à cela. Les solutions d'une équation ne dépendent-elles pas de l'équation?

Là où rien ne va plus, c'est quand ils laissent entendre que le choix du modèle est arbitraire. Il arrive à des collègues, pourtant expérimentés, de s'exprimer de façon équivoque et de favoriser involontairement cette attitude.

Prenons le jeu de franc-carreau, dû à Buffon. On lance un écu dans une chambre pavée de carrés égaux; quelle est la probabilité que l'écu soit à franc-carreau, i.e. entièrement dans un carreau? Lorsque Buffon ramène l'étude à un seul carreau et annonce que le centre de l'écu suit une distribution uniforme sur ledit carreau, il fait preuve d'une brillante intuition, dans l'esprit d'une époque qui ignorait le besoin de justicications pédantes.

Cherchons d'abord à simplifier les choses. Si l'on se tient vers le milieu d'une grande chambre pour jeter l'écu, autant la supposer sans limites. On se placera donc dans la situation idéale d'un carrelage infini.

Cependant cela n'a pas de sens de choisir un point — le centre de l'écu — au hasard dans le plan. Ce faisant on fait l'hypothèse implicite d'une invariance, à savoir l'invariance par translation. Or il ne peut exister dans le plan — comme déjà sur la droite — de loi invariante par translation; il existe une seule mesure non nulle invariante, à un facteur près, et elle est de masse totale infinie.

Représentons la chambre par le plan $\mathbf{R}^2$ et le carrelage par le réseau $\mathbf{Z}^2$. Comme les translations entières n'affectent pas l'évènement considéré, au lieu de chercher une mesure invariante sur le groupe $\mathbf{R}^2$ lui-même, nous allons en chercher une sur le quotient $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2$. Il est alors facile de vérifier qu'il existe une loi de probabilités invariante et une seule. C'est la mesure $dxdy$, c'est-à-dire l'aire usuelle, ou encore la loi uniforme. Le quotient est un tore, mais on peut sans inconvénient l'assimiler à un carreau, car il est improbable que le centre tombe sur les bords.

On peut donner de cette présentation une version moins pédante. Cependant le principe de réduction est un support essentiel pour l'intuition.

Bien sûr on a présenté des hypothèses idéalisées, asymptotiques. Qui a déjà lancé un écu dans une chambre infinie? Mais une fois les hypothèses acceptées, le modèle s'impose de façon implacable.

On ne va pas parler de ce que pourrait être une modèle plus réaliste pour le jeu de Buffon. Disons seulement qu'il apparaît in fine que le modèle asymptotique est loin d'être ridicule.

Le problème de l'aiguille du même Buffon se traite de façon analogue, mais caractériser la mesure invariante est juste un peu plus délicat.

Il faut en revanche se méfier des situations de pure fiction. Le spaghétto qu'on coupe en trois morceaux ou la corde qu'on choisit au hasard sur un cercle ne conduisent à aucun modèle naturel car il n'y a pas d'hypothèse. Disserter sur de tels sujets n'a pas le moindre rapport avec la modélisation. Parler de "modélisations différentes" est impropre. C'est juste une occasion comme une autre d'illustrer des modèles.

Pour terminer sur un registre élémentaire, considérons le jeu de Bernard Parzysz où l'on tire un gagnant dans un ensemble B de bonnes réponses en tirant successivement dans l'ensemble A de toutes les réponses jusqu'à en trouver une bonne. L'équiprobabilité des évènements "c'est b qui gagne" dans l'ensemble C des arrangements de A se montre sans calcul. On a supposé implicitement l'invariance par le groupe S_B des permutations de B. Or ce groupe opère sur C de façon invariante. On peut même ajouter à A des objets hétéroclites. D'ailleurs les transpositions suffisent. C'est l'argument de symétrie.

DEUX PHILOSOPHIES POUR LE RAPPORT A LA REALITE

Un contresens majeur.

Il est malheureux que le mot modélisation se soit introduit dans la noosphère, avec un sens nécessairement déformé et qui traduit un contresens dans le rapport à la réalité.

Quand Nicolas Bouleau dit ce qui suit, il dépasse sans doute sa pensée mais résume sans le vouloir une opinion commune chez les enseignants.

"Le trait le plus marquant du modernisme tel que Bourbaki le révèle est cette approche unitaire : que le sens de chaque notion soit le même pour tous (et, dans le secondaire, que chaque élève n'utilise pour raisonner que ce qui a trait à l'appartenance d'un élément à un ensemble, à l'exclusion de toute autre intuition).

Or ce n'est pas ainsi que les mathématiques se sont reliées historiquement aux autres sciences et que les notions se sont chargées de sens."

Passons sur le fait qu'il s'agit moins de Bourbaki que de ce qu'on en aurait retenu pour l'enseignement secondaire. Sinon, pour ce qui est des mathématiques dites "modernes", Nicolas Bouleau est en-dessous de la vérité; elles ne sont pas caractérisées par l'unicité du sens, mais plutôt par l'absence de sens.

C'est la suite qui est très malheureuse. En s'exprimant comme il le fait, il accrédite l'idée que

- les mathématiques existent a priori et elles trouvent des applications,
- les notions existent a priori et on leur ajoute du sens.

En fait les mathématiques sont en permanence forcées par la physique. "Si donc il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie", pour imiter Rudolph Bkouche [B] qui cite Poincaré dans *La Science et l'Hypothèse*.

Les notions abstraites, et unitaires, réalisent une synthèse. Même si d'autres interprétations peuvent apparaître après coup. L'unité n'est pas l'unitarisme.

Pour suivre encore et toujours Rudolph Bkouche, les mathématiques s'inscrivent historiquement "dans le programme de la *mathesis universalis*, laquelle n'est autre que la construction de la science rationnelle ... celle qui se construit *via* le raisonnement comme l'explique Aristote dans les *Seconds Analytiques* : ce que nous appelons ici savoir c'est connaître par le moyen de la démonstration."

Plus radicalement, Vladimir Igorevitch Arnold considère, non sans raison, que les mathématiques sont une science physique. Il rend le formalisme responsable de la crise de l'enseignement des mathématiques.

"The axiomatic-deductive method, having led to the banishment of all examples (and especially the motives for introducing definitions) in the teaching of mathematics at every level is above all responsible for this."

Il cite lui-même Feynman pour se moquer de ce goût du formalisme au Brésil ... ou en France, en physique comme en mathématiques.

"The lecturer declared that the moment of inertia of a material point relative to an axis is the product of the mass by the square of the distance from the axis. The students write down the definition. Il seems that all is well. But Feynman explains that such teaching is unacceptable.

It is necessary to explain that a weight fastened to a door near its hinge hardly affects the opening of the door while one fastened to the handle interferes with it strongly."

Trois pommes plus trois pommes.

D'un côté, pour expliquer "trois pommes + trois pommes", on va chercher un modèle abstrait pour l'addition et on applique le modèle. Le choix, fait depuis quelques décennies, d'écarter systématiquement les unités, à l'école, au collège ou au baccalauréat, n'en est que la traduction. De l'autre on ose s'appuyer sur l'expérience de la vie courante et construit l'addition dessus. Et l'on n'a pas peur de se servir des unités dans les opérations, pour en comprendre le sens.

D'un côté, pour établir la figure d'équilibre de la chaînette, le mathématicien ne sait plus et le physicien ne veut plus; on choisit arbitrairement un modèle, algébrique ou hyperbolique ou autre, et l'on pense avoir tout résolu. De l'autre aussi bien le mathématicien que le physicien peut s'atteler à la question, faisant intervenir pesanteur, tension et tangente; alors l'équation s'impose.

D'un côté on définit un vecteur comme un triplet (x_1, x_2, x_3), on balance une formule pour le moment d'inertie. De l'autre on définit, selon Poincaré, un vecteur comme une force, on ose le jean qui sèche de Marc Legrand, on insiste sur le fait qu'une masse placée près de la charnière d'une porte a moins d'effet que la même placée près de la serrure.

D'un côté on annonce que le sens usuel des mots est à oublier tout de suite en mathématiques. De l'autre on explique que le sens mathématique est d'abord le sens usuel et que ce n'est que plus tard qu'il faudra le préciser.

CONCLUSION

Un post modernisme ...

Cette mode prétendûment "modélisatrice" dans l'enseignement, loin de corriger les excès des mathématiques dites "modernes", en perpétue les travers sous une forme post-moderne.

Avec les mathématiques "modernes", on prenait pour exemple le mathématicien professionnel. Avec la prétention "modélisatrice", on prend pour exemple l'ingénieur mathématicien. *Dans les deux cas on confond logique de production et logique d'apprentissage.*

Avec les mathématiques "modernes", on a ignoré le physicien par indifférence. Avec la prétention "modélisatrice", on l'ignore par condescendance, lui concédant un piètre rôle de figurant.

Avec les mathématiques "modernes", les mathématiques existent d'abord et après on verra. Avec la prétention "modélisatrice", elles existent d'abord et après elles s'appliquent comme par enchantement et, en cas de conflit, c'est le modèle qui dit la vérité. *Dans les deux cas on ne peut profiter d'images préexistantes. Avec le risque d'une application en dépit du bons sens.*

C'est ce genre d'application aberrante que Claude Lobry nous montre à travers trois exemples, pour nous rappeler en conclusion qu'il ne faut pas céder à "l'illusion de croire que la formalisation des mathématiques permettra de lever toutes les ambiguités".

... **ou un retour aux sources.**

Revenir à des mathématiques qui sont à la source de la Science sera difficile. Il faudra une attitude ouverte, accepter la languette flexible, la chaînette, le jean qui sèche, le principe de superposition qui traduit la linéarité, l'énergie entièrement répartie entre les modes qui traduit la formule de Bessel-Parseval ...

Il faudra remettre à sa place le formalisme, attendant qu'il soit vraiment utile avant de le proposer.

Il faudra éventuellement remettre en cause quelques habitudes, telles que la notation fonctionnelle moderne, trop éloignée de l'idée qu'on se fait d'une fonction en physique.

Il faudra une sélection rigoureuse des approches, car on ne peut pas à la fois enraciner profondément les notions à transmettre et couvrir une surface démesurée en se permettant tous les chevauchements.

Il faudra aussi une grande cohérence. Si l'on veut imiter à l'occasion les physiciens qui ont su mettre du vernis à leurs programmes, et donc traiter des sujets un tantinet savants avec des moyens modestes, cela ne peut se faire que dans un ordonnancement impeccable.

Que faire?

Il ne servirait à rien de multiplier les contacts entre disciplines. En revanche il est urgent que les mathématiciens apprennent un peu de physique. Il convient donc de remettre en place au plus vite le DEUG MP. En attendant, les IREM pourraient recruter des physiciens et former les collègues à la physique du lycée du milieu du siècle dernier.

Pour citer encore Arnold, laissons-lui vanter les mérites de la Russie éternelle. N'oublions par exemple pas que, dans telle république de l'ex-URSS aujourd'hui Ukraine, le département de mathématiques de Kharkov faisait partie d'un laboratoire de Physique. Cela ne l'a pas empêché de produire une médaille Fields.

"In Russia the divorce between 'pure' and 'applied' mathematics was never complete ... "

Enfin il faudrait faire de place en chassant les activités périphériques telles que les IDD, TPE ou B2i, lesquelles sont peut-être justifiées dans les horaires des sciences expérimentales mais pas dans ceux de mathématiques.

[A] Arnold (Victor Igorevitch), *Topological problems of the theory of wave propagation*, Uspekhi Mat. Nauk **51**:1 3-50.

[Be] Bertrandias (Jean-Paul et Françoise), *Mathématiques pour les sciences de la vie, de la nature et de la santé*, Presses universitaires de Grenoble, 1997.

[Bk] Bkouche (Rudolph), *La géométrie élémentaire, une science physique?*, à paraître dans Repères-IREM.

[Bo] Bouleau (Nicolas), *Sur le rôle des mathématiques dans la société d'aujourd'hui*, revue de l'APMEP 309-322 .

[D] Dhombres (Jean),

[L] Lobry (Claude), *Mathématiques et autres disciplines*, conférence au Séminaire de l'ADIREM, mars 2003, Nice, et Repères-IREM **57** 69-82.

[P] Poincaré (Henri), *Les définitions en mathématiques*, 1903.

[R] Risler (Jean-Jacques), conférence au colloque, Bussang.