Mathématiques et informatique

(20/6/99)

Science encore.

On a dit que l'informatique était une partie des mathématiques; cette partie est celle des mathématiques dites "discrètes". Les mathématiques traditionnelles ont une composante dans les sciences de l'ingénieur, avec les statistiques appliquées, les méthodes de résolution numérique des EDP par exemple. Cependant cette composante est nettement plus développée pour l'informatique, ce qui explique son classement en science de l'ingénieur. Un tel classement se justifie pour la gouvernance de la science, car il correspond aux préoccupations dominantes des chercheurs.

Cependant, quand il s'agit d'enseigner, l'inclusion de l'informatique dans les mathématiques est naturelle. Cette inclusion présente des similitudes avec celle des mathématiques dans la physique.

Fonctions abstraites.

Prenons l'exemple de la notion de fonction. Quand on considère des fonctions à la frontière entre mathématiques et physique, ou tout simplement en calcul différentiel, on pense souvent à des variables liées entre elles, en se permettant de changer celle qui joue la variable et celle qui joue la fonction.

La traduction informatique, que soit dans un langage impératif ou dans un langage fonctionnel pur, exige que tout soit explicité. Le concept informatique correspondant apparait donc plus abstrait que le concept mathématique traditionnel.

Place de l'informatique.

Compte-tenu de ce qu'on vient de dire, il serait aberrant de partir de l'informatique pour tenter d'expliquer une notion mathématique. En revanche, aller vers l'interprétation informatique, avec les exigences que cela entraîne, peut être du plus grand intérêt.

De même serait-il aberrant de débuter l'apprentissage de la géométrie par un logiciel de constructions, quel qu'il soit. On doit commencer par manipuler des figures dont la construction est implicite. Certains voudraient remettre au goût du jour le raisonnement par analyse et synthèse. Ils ont bien raison. Ne supposons donc pas les problèmes analysés par avance.

Les informaticiens tiennent beaucoup à la phase d'analyse. Le paradoxe est vite levé. Utiliser un logiciel n'est en aucun cas une activité relevant de l'informatique.

A fortiori utiliser une calculette ne relève pas de l'informatique. En revanche comprendre son fonctionnement relève de cette science, donc des mathématiques. On est pas obligé d'aller très loin. L'essentiel est d'avoir compris que la machine fait, jusqu'à certaines limites, ce qu'on a voulu qu'elle fasse, et qu'on saurait faire soi-même avec du courage et du temps. Autrement dit la machine doit apparaître comme l'esclave de l'homme et non pas l'inverse.

Cette remarque vaut également pour l'apprentissage de l'informatique tel que pratiqué à l'université. On peut considérer que l'utilisation, d'entrée de jeu, d'un langage fonctionnel pur relève de la même philosophie obscurantiste que celui d'une calculette. Un langage impératif simple n'aura pas ce défaut dans la mesure où il traduira directement l'activité de celui qui calcule à la main; il faudra juste un petit effort d'abstraction pour considérer les itérations. En revanche savoir un peu comment fonctionne un langage plus évolué est du plus grand intérêt pour le mathématicien.

Regardons un collègue s'amuser avec Mathematica. Il va lui poser des questions dont il connaît la réponse et analyser ses réactions. "Tiens! Il interprète la chose de cette façon … Ce n'est pas mal!" dit-il, émerveillé. Il est indulgent avec la machine, parce qu'il a conscience des difficultés. Il n'en est pas esclave.

Peut-être pas si abstrait.

On a dit que l'informatique se situait dans la partie la plus théorique des mathématiques. Cependant, quand on prend l'affaire par le bon bout qui n'est pas celui de la contemplation béate, il s'y attache un côté utilitaire, avec la récompense qui l'accompagne. Certains sujets deviennent abordables quand on en comprend la nécessité.

Prenons le cas des bases de numération. Proposer de travailler en base autre que 10, ou de développer une théorie sur le sujet, relève de la démence. Cependant, tout change quand on parle de l'information élémentaire, du nombre de bits nécessaires pour coder 2, 4, 16 ou 256 couleurs ... et plus. Il n'est pas indécent de faire, à la main, une addition sur 8 bits, avec retenue; les réflexes sont ceux de l'addition décimale, avec une simplication qui exclut toute base autre que 2 et 10, dont 8 et 16, d'ailleurs.

Considérons la théorie des ensembles. Parler de couple ou d'ensemble produit, dans l'enseignement de mathématiques à un certain niveau, est simplement stupide. En revanche la structure d'enregistrement est facile à appréhender.

De l'informatique au baccalauréat?

Y-a-t-il de l'informatique dans le sujet? Le problème est que ce n'est pratiquement jamais le cas. On confond informatique et utilisation des machines ou des logiciels.

De cette absence de science, les informaticiens sont aussi un peu responsables. Il y a quelques années le programme de l'option informatique au baccalauréat contenait à peu près tout ce que l'on veut, sauf de l'informatique. On aurait pu l'enseigner sans problème avec la géographie économique.

Dérivée et dérivée formelle.

Quelqu'un a eu l'idée, pour introduire les dérivées, de laisser les élèves regarder travailler Derive dans une machine de Texas Instruments. On finit par deviner par exemple que la dérivée de x^n sera nx^{n-1}. L'idée a eu beaucoup de succès malheureusement.

La chose est tellement grossière qu'on a du mal à choisir un argument parmi ceux à lui opposer. Pourtant, si la notion de dérivée est si importante, c'est bien parce qu'elle recouvre les notions de vitesse, de pente, qu'elle est au centre de l'analyse mathématique depuis Newton et Leibniz. Se convaincre que x^2 ne peut avoir d'autre dérivée que $2x$, par n'importe quelle méthode aussi heuristique fût-elle, est un exercice aussi merveilleux qu'essentiel. Comment peut-on gâcher tout cela au bénéfice de la considération parfaitement gratuite d'une opération complètement désincarnée?

Si utiliser Derive ne relève pas de l'informatique, l'utiliser de cette façon n'est pas faire de mathématiques. Y voir l'occasion de faire des conjectures, c'est prôner les contrefaçons.

S'il n'y a pas de dérivée dans tout cela, il y a bien une dérive. Partant d'un concept essentiel, mais soumis hélas à des exigences politiquement correctes de rigueur, on finit par ne plus retenir qu'un aspect superficiel et scolaire. Ce dernier finit par remplacer le concept lui-même. On a si bien fait le vide qu'il n'y a plus qu'à laisser travailler les machines.

Le calcul formel en général.

Le numéro 15 de la revue “Hypothèses” de Texas Instruments présente, en introduction, une interview fort intéressante de deux chercheurs de l'INRIA sur le calcul formel. En particulier ils abordent la question de l'utilité d'un tel outil.

D'abord “l'expérimentation permet de développer l'intuition”, vont-ils affirmer. Et de donner le calcul de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^k} dx$$

comme exemple. Pouvait-on faire plus scolaire et plus ridicule? Qui a besoin de ce calcul? Il faut tuer cette idée d'expérimentation tout de suite.

Ensuite, sérieusement, ils notent que “l'on peut aborder des problèmes plus complexes ... sans être handicapé par les difficultés de surface du calcul”. C'est incontestable. Mais qui a besoin d'étudier des problèmes complexes? Le professionnel sans aucun doute, mais pas l'élève. Il ne faut pas confondre outil d'apprentissage et outil de production. Pour découvrir une notion nouvelle, on doit travailler sur des exemples simples. Ensuite, il est vrai, il peut y avoir grand avantage à appliquer ce que l'on appris à des situations réalistes. L'outil de calcul formel sera bien utile alors. Son usage est réservé à des prolongements, des synthèses, jamais à la découverte.

Quand on dit que la suppression des difficultés de calcul permet de “se concentrer sur la nature profonde des phénomènes”, on fait un contresens majeur. Pour comprendre, surtout quand on a du mal, rien n'est plus bénéfice que quelques calculs simples, et à la main. Il faut vite oublier la distinction entre tâches nobles, de compréhension, et tâches serviles, de calcul. Bien sûr, un calcul fastidieux n'apprendra rien. Même sans logiciel de calcul formel, c'était déjà vrai.

Pour finir, ils annoncent que le “calcul formel amène à revoir les mathématiques”; par exemple le calcul d'une primitive de fraction rationnelle ne passe pas par la décomposition en éléments simples. Voilà qui est vraiment intéressant. L'exigence d'effectivité du calcul formel pose en effet des problèmes nouveaux. Cependant il ne s'agit plus là d'utilisation passive. Il s'agit, tout au contraire, de comprendre comment fonctionne ledit calcul. Ce n'est pas une aide à la compréhension des mathématiques, mais une occasion de mieux les comprendre que le calcul formel nous offre. A ce sujet, rien que le problème de la reconnaissance du zéro est déjà captivante.

La suite du numéro est assez lamentable. Ainsi l'exemple d'utilisation de la TI-89 en première S.T.L. Bio est un cas de dérive signalée plus haut. Point de biologie bien sûr. Point de mathématiques non plus. On étudie une fonction complètement artificielle dont le seul mérite est de déjouer les calculateurs graphiques. L'informatique est créatrice d'une nouvelle famille d'exercices truqués.