

## Réflexions à propos de la licence

Comme il y a quatre ans déjà, la discussion sur l'habilitation a dû se tenir à l'intérieur d'un schéma imposé, interdisant toute réflexion sereine sur ce qu'on attend d'une véritable progression dans une formation en mathématiques. Or c'est par un travail de fond, sans a priori, qu'il aurait fallu commencer.

Voici quelques pages allant dans ce sens, à part d'idées recueillies en dehors des cercles officiels de responsabilité et de décision. Il n'est pas interdit à ces derniers d'en faire le meilleur usage.

La maquette présentée est très simple. La description de certains contenus manque; là où une description est présente, c'est sans la moindre prétention à une quelconque légitimité. Mais compléter, corriger, amender, dans un esprit collectif, ne demandera pas un gros investissement.

On a voulu démontrer que, tout en respectant des délais extrêmement courts, un autre projet pouvait être bâti, et que l'éventualité valait la peine qu'on en discute.

Voici maintenant quelques uns des principes que l'on a retenu pour aboutir au schéma présenté.

D'abord certains sont aujourd'hui sensibles à un rapprochement entre les mathématiques et la physique. Une version "Mp" de la licence pourrait être obtenue en introduisant, à côté des mathématiques, de vraies unités de physique, de cette physique traditionnelle qui entretient des rapports d'enrichissement mutuel avec les mathématiques, comme la thermodynamique ou l'électromagnétisme par exemple. A l'inverse, une version "Pm" d'une licence de sciences physiques pourrait être obtenue en introduisant, à côté de la physique, quelques modules sérieux de mathématiques.

Evidemment le même travail serait à faire avec l'informatique, non pas pour créer un tronc commun de matières mineures, comme une bureautique pour laquelle il suffit d'envisager quelques journées en dehors de toute évaluation, mais pour considérer des enseignements de la science informatique, comme un module d'algorithmique fondamentale pourrait l'être.

Plutôt que de multiplier des modules communs, mieux vaut envisager des modules déclinés suivant l'orientation mathématiques ou, par exemple, physique souhaitée, dans la plus grande cohérence.

Par ailleurs, pour favoriser autant qu'il est humainement possible la réussite des étudiants et pour trouver le temps de compenser des lacunes aussi béantes que multiples, il faut chasser une fois pour toutes cette tendance à la balkanisation, limitant supérieurement le nombre de modules et inférieurement leur taille.

Toujours pour favoriser cette réussite, qui ne se mesure pas sur la seule première année, mais au moins sur l'ensemble des trois années du cycle L et à l'aune des concours de recrutement, il convient de présenter une réelle progression dans les contenus et d'éviter les digressions inutiles. On doit systématiquement réinvestir dans les thèmes étudiés les années précédentes, mais en pouvant s'appuyer sur ce qui a fait.

## Maquette pour la licence

Ce qui suit présente des modules de mathématiques. D'une part ceux d'une version "mathématiques", la place étant réservée pour des modules d'autres disciplines, signalés par la mention "physique", laquelle peut être remplacée notamment par "informatique". D'autre part des modules "outils" sont prévus pour les versions d'autres disciplines; leur horaire peut être adapté en fonction de la demande. La troisième année de la version "pluridisciplinaire" n'est pas mentionnée; son organisation est en effet indépendante.

On suppose qu'une session de rattrapage unique à lieu fin juin. Les enseignements semestriels se tiennent sur 15 semaines, contrôle continu inclus. Dans les deux premières années, chaque module comprend 6 heures hebdomadaires pour un total de 90 heures (30 de cours, 60 de TD). La troisième année ne comprend que quatre modules de 8 ou 10 heures hebdomadaires, pour un total de 120 ou 150 heures, avec une répartition cours/TD à adapter à chacun.

### Semestre S1

Outils mathématiques 1 (module commun avec la physique)  
Structures algébriques fondamentales  
un module de physique

### Semestre S2

Algèbre et géométrie 1 / Outils mathématiques 2  
Analyse 1  
un module de physique

### Semestre S3

Algèbre et géométrie 2  
Analyse 2 / Outils mathématiques 3  
un module de physique

### Semestre S4

Algèbre et géométrie 3  
(dont une partie pour les algorithmiques et données)  
Analyse 3  
Probabilités 1

### Semestre S5

Calcul différentiel (150 heures)  
Algèbre et géométrie 4 / Analyse numérique et calcul scientifique (120 heures)

### Semestre S6

Calcul intégral réel et complexe (150 heures)  
Probabilités 2 / Probabilités 2' (120 heures)  
(avec deux niveaux envisagés, selon l'orientation Master ou CAPES)

## Variante pour la troisième année

Il s'agit de se conformer à la règle des 30, 60 ou 90 heures et d'en profiter pour arrondir l'horaire total de chaque semestre à 300 heures. Cela n'empêche pas de proposer un module de 120 heures intégrées, à condition de pouvoir en tirer deux notes, une pour 90 heures et une pour 30 par exemple. Pour les deux premières années, l'idéal pour atteindre les 300 heures par semestre serait d'intégrer 30 heures à l'un des modules du semestre; mais il faut voir avec les petites contraintes stupides et on laisse la marge de 30 heures en attendant.

Les inconvénients de la proposition suivante, qui a l'avantage de la lisibilité des contenus, sont les suivants.

1) Le risque d'inflation des programmes. L'augmentation du nombre de modules produit automatiquement cette inflation. Aussi des programmes raisonnables vont-ils être rédigés pour empêcher cette inflation, sachant que tout ce que l'on enseignera doit être formateur — mais pas forcément directement utilisable — pour le CAPES entre autres.

2) Le risque d'introduire des options. Inmanquablement certains trouveront que certains modules sont moins indispensables en vue de telle ou telle orientation et proposeront de détruire la simplicité biblique de l'édifice. Aussi les modules d'analyse de chaque semestre vont-ils être jumelés par leur contenu. On pourrait même envisager des épreuves jumelées fournissant deux notes. Par exemple les exercices de topologie pourront se placer dans un contexte explicite de calcul différentiel et les exercices de calcul différentiel pourront-ils faire appel à des arguments de nature topologique demandant un certain travail. De la même façon le calcul intégral pourra concerner une variable complexe et les passages à la limite des intégrales sur des chemins seront-ils traités en harmonie avec les passages à la limite du calcul intégral.

### Semestre S5

Topologie générale, espaces normés (90 heures)

Calcul différentiel (90 heures)

Groupes et géométrie / Analyse numérique et calcul scientifique (120 = 90 + 30 heures)

### Semestre S6

Calcul intégral (90 heures)

Variable complexe (90 heures)

Probabilités 2 / Probabilités 2' (120 = 90 + 30 heures)

(avec deux niveaux envisagés, selon l'orientation Master ou CAPES)

## Semestre S1

### Outils mathématiques 1

**NB.** Dans ce module la notion de fonction est prise au sens de la physique, à savoir comme une variable dépendant d'une autre, par exemple du temps, ou de plusieurs, par exemple de variables d'espace; les questions théoriques d'existence sont exclues; par ailleurs on considère, autant que possible, des valeurs complexes.

L'idée générale est d'apprendre à calculer en calculant : des dérivées, notamment avec des puissances fractionnaires, des développements limités, des changements de variable, à travailler le passage des expressions réelles aux expressions complexes etc.

La présence de dérivées partielles est ici inoffensive : ce ne sont que des dérivées ordinaires, les autres variables ayant été fixées, conformément à ce dont a besoin en physique, en thermodynamique notamment.

Courbes planes implicites et paramétrées  
Dérivée, dérivée partielle, gradient, règle de la chaîne  
Fonctions réciproques, cas des lignes trigonométriques  
Formule de Taylor, développements limités  
Changement de variable dans une primitive ou intégrale  
EDO du 1er ordre, linéaires du 2nd ordre  
Systèmes d'EDO en dimension 2 : cas linéaire, équilibre, linéarisation

### Structures algébriques fondamentales

**NB.** Le contenu de ce module se veut très classique, correspondant en gros à quelques uns des premiers chapitres des ouvrages courants : le Queysanne de 1964, le Dixmier de 1969 et bien d'autres, jusqu'à celui de la collection Ramis-Warusefel.

Cependant l'exposé sera systématique sans être dogmatique. D'un côté il sera illustré par de petits exemples, qui resteront néanmoins conformes à ceux qu'on a une chance de rencontrer en mathématiques. D'un autre il constituera une base solide, que l'on revisitera plus tard, mais sans avoir à la reprendre.

Evidemment il ne s'agit pas d'aller jusqu'au bout des notions abordées.  
En revanche il n'est pas exclu de sensibiliser au soin dans l'expression.

Ensembles, relations, fonctions, lois de composition  
Groupes,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$   
Groupe des permutations, transpositions, cycles  
Anneaux commutatifs unitaires, corps,  $\mathbf{Q}$   
Anneau des polynômes  
Corps des fractions rationnelles  
Décomposition en éléments simples, applications

**Physique :**

## Semestre S2

### Algèbre et géométrie 1

**NB.** L'objectif du module, présenté en introduction, est l'unification de deux domaines, celui de la géométrie élémentaire symbolique d'une part et celui des calculs sur les coordonnées d'autre part; on privilégie par ailleurs l'illustration géométrique des concepts de l'algèbre linéaire.

Cependant on n'oublie pas les calculs, comme pour la résolution pratique des systèmes linéaires, que l'on effectuera en pivotant, de façon explicite ou non.

Algèbre linéaire : espaces vectoriels, applications linéaires

Système libre, générateur, bases

Sous-espace, produit, noyau, image ...

Matrices, équations linéaires

Calcul barycentrique

Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice

Interprétation géométrique en dimension 2 et 3

### Outils mathématiques 2

(NB: l'objectif du module est de préparer aux enseignements de physique, comme celui d'électromagnétisme)

Notion d'indépendance linéaire et de base jusqu'à la dimension 3

Applications linéaires, matrices

Déterminants en dimension 2 ou 3 comme aire ou volume orientés

Produit scalaire, produit vectoriel

Élément de longueur, élément de surface, circulation et flux

Rotationnel, divergence

Formule(s) de Stokes

### Analyse 1

(NB : contrairement au module Outils mathématiques 1, l'objet est de donner des définitions et démonstrations complètes, pour ce qui correspond en gros au programme de terminale complété par celui de S1)

Axiome de la borne supérieure

Suites et séries numériques, critère de Cauchy

Continuité et limite en une variable; notations  $o$  et  $O$

Dérivée, dérivée d'ordre  $n$ , étude locale d'une courbe

Continuité uniforme, intégrale d'une fonction continue sur un segment

Théorème fondamental de l'analyse

Esquisse d'une construction des nombres réels

### Physique :

## Semestre S3

### Algèbre et géométrie 2

(NB : la réduction des endomorphismes pourra se limiter à la décomposition spectrale)

Valeurs, vecteurs propres d'un endomorphisme, réduction

Formes bilinéaires

Formes quadratiques et hermitiennes, signature

Orthogonalité et polarité

Espaces euclidiens et hermitiens

Réduction simultanée, application aux axes des coniques et quadriques

### Analyse 2

(NB : le contenu se rapproche ici de celui du module Outils mathématiques 3 qui suit, à ceci près que l'on y ajoute la justification complète des passages à la limite)

Intégrales convergentes

Suites et séries de fonctions, convergence uniforme, normale

Continuité de la limite, dérivation terme à terme

Séries entières, exemples, application à la résolution des EDO

Séries de Fourier, application aux EDO et aux EDP

### Outils mathématiques 3

(NB: ce module, dont le contenu est un peu semblable à celui du module Analyse 2 précédent, inclut les séries numériques car il s'adresse a priori à des étudiants n'ayant pas suivi le module Analyse 1; par ailleurs les justifications théoriques fines en sont absentes)

Séries numériques

Intégrales convergentes

Séries entières, application à la résolution des EDO

Séries de Fourier, application aux EDO et aux EDP

### Physique :

## Semestre S4

### Algèbre et géométrie 3

(NB : le module est principalement dévolu à l'arithmétique et aux anneaux de polynômes; par exception, il ne devrait pas concerner la géométrie élémentaire)

En plus du contenu mathématique, on y introduira des éléments d'algorithmique.

Structuration des données

Traitements algorithmiques fondamentaux

Exemple de preuve de programmes

### Analyse 3

(NB : ce module est une sorte de module Analyse 1 décliné en plusieurs variables; les définitions et démonstrations y sont présentées de façon complète)

Continuité et limites en plusieurs variables

Différentielle en dimension finie, théorème des accroissements finis

Dérivées partielles d'ordre supérieur, formule de Taylor en deux variables

Application à la recherche des extrema

Application à l'étude locale d'une surface

Intégrale d'une fonction continue sur un carré, un cube ou un domaine simple

Intégrales à paramètres

### Probabilités 1

## Semestre S5

### Calcul différentiel

(NB : le contenu de ce module correspond en gros à celui du premier tome des fondements de l'analyse moderne de Dieudonné, dont il faut se souvenir qu'il occupait, avec la variable complexe, la moitié de l'année de l'ancienne licence)

- Espaces normés, espaces métriques
- Topologie des espaces métriques, compacité, connexité
- Complétion, théorème du point fixe
- Espaces hilbertiens, séries de Fourier
- Différentielle, accroissements finis
- Cas d'une variable complexe
- Différentielle d'ordre supérieur, extrema locaux
- Inversion locale, fonctions implicites
- Sous-variétés, extrema liés
- Calcul des variations
- Théorème de Cauchy-Lipschitz sur les EDO

### Algèbre et géométrie 4

(NB : le thème dominant est celui des groupes, avec des exemples de groupes et d'actions de groupe liés à la géométrie)

### Analyse numérique

## Semestre S6

### Calcul intégral réel et complexe

(NB : pour l'intégrale, on se limite à celle de Lebesgue dans  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}^n$ ; pour la variable complexe le contenu est une version allégée du livre de Cartan sur les fonctions analytiques)

Mesure d'une partie de  $\mathbf{R}$ , intégrale d'une fonction sur  $\mathbf{R}$

Convergence monotone, dominée, intégration des séries

Continuité et dérivabilité sous l'intégrale

Intégrale dans  $\mathbf{R}^n$ , théorème de Fubini

Changement de variables

Intégrale de  $f(z)dz$  le long d'un chemin, indice

Théorie de Cauchy, théorème des résidus

Prolongement analytique

Zéros et pôles, théorème de Rouché

Introduction aux intégrales de Fourier et de Laplace

### Probabilités 2 (Master)

### Probabilités 2' (CAPES)