L'infirmité des mathématiques enseignées vis-à-vis de la Science

Jean-Pierre Ferrier, IREM de Lorraine, novembre 2004

Ce qui suit est un compte-rendu très orienté de la réunion de la commission interIREM du second cycle des 5, 6 novembre 2004. Je n'ai pas fait allusion aux exposés de géométrie. Par ailleurs j'ai inséré beaucoup de réflexions personnelles.

Par mathématiques enseignées on entend principalement celles du lycée, même si certains aspects débordent largement ce niveau, comme on le verra par la suite. Quant à la Science, on pense ici principalement à la physique. Le cas de la biologie ou des sciences économiques mènerait sans doute à des développements analogues; d'ailleurs l'interaction des mathématiques ([1]) avec ces disciplines passe souvent par des modèles de la physique théorique. Le cas de l'informatique demanderait un développement spécial; il ne sera pas envisagé dans ce texte. Il resterait à parler de l'infirmité vis-à-vis des mathématiques elles-mêmes; elle apparaîtra sans doute en filigrane mais on pourrait aussi s'y intéresser directement; maintenant où s'arrêtent les mathématiques? De quel côté situer la mécanique? Et surtout aujourd'hui la géométrie?

Les mathématiques produites l'ont presque toujours été au sein de la Science en général. C'est par exemple le cas avec la géométrie des grecs, premier exemple évident de science rationnelle selon Rudolph Bkouche ([2]), ou première science physique comme il le dit également. C'est aussi le cas avec le développement de l'analyse en Europe occidentale à partir du 17ème siècle, laquelle s'est fondée sur la mécanique, l'astronomie, les ondes vibratoires etc. Cela a été méthodiquement démontré par Roger Balian ([3]) dans son texte sur les rapports entre mathématiques et physique pour l'académie des sciences. Pendant le même temps, les mathématiques japonaises, enfermées sur elles-mêmes, se fourvoyaient dans des raffinements jusqu'à cette infirmité dont on va parler. Or les programmes de mathématiques en vigueur jusqu'il y a une cinquantaine d'années ont été écrits il y a trois siècles, par les meilleurs mathématiques de l'époque et en harmonie avec les mathématiques produites alors. Il y a donc rien d'étonnant à ce que les mathématiques enseignées il y a quelques décennies encore montrent le vrai visage de la Science. Les conférences de Jean Dhombres ([4]), comme celle qu'il vient de faire sur le calcul littéral, en font chaque fois une illustration magnifique. D'ailleurs même les mathématiques chinoises du 9ème chapitre ([5]), pourtant si maladroites à la lumière des outils d'aujourd'hui et surtout si peu annonciatrices des progrès de la Science, ont ce côté vivant qui nous les fait quand même aimer.

Evidemment il y a quelque chose d'un peu dépréciant dans l'enseignement de mathématiques dont on sait qu'elles sont, dans le meilleur des cas, vieilles de trois siècles. Les physiciens actualisent leurs programmes; on ne parle plus aujourd'hui comme on le faisait il y a seulement cinquante ans, de "l'hypothèse atomique". La biologie moléculaire a fait une irruption dans les programmes qui n'est pas passée inaperçue, même si certains déplorent l'ampleur du phénomène. Aussi est-il aisé de comprendre que des mathématiciens cherchent à renouveler les thèmes des programmes pour leur conférer une touche de modernité. Après bien des intiatives, l'opération menée par CultureMath ([6]) à l'ENS de Cachan en est un exemple récent. Malheureusement les thèmes choisis pour la modernité sont tirés des mathématiques d'il y a un siècle. C'est déjà bien loin quand on compare avec la physique ou la biologie. Mais c'est déjà beaucoup trop récent par ailleurs. Les mathématiques qui sont montrées apparaissent coupées des liens avec la physique, parce qu'il manque les intermédiaires qui permettraient de garder le contact et qui seraient trop lourds à exposer. Dans le choix que nous avons entre une photographie de la vie et le contact direct avec un minéral amorphe que représente la découverte des mathématiques aujourd'hui, ne faut-il pas préférer la photographie? Quand on voit les dessins quasi-photographiques et les manuscrits que nous montre Jean Dhombres, ne ressent-on rien? Et comment expliquer l'engouement actuel pour les dinosaures?

En fait il y a bien eu dans les programmes de mathématiques des opérations de renouvellement. Il y a eu celle des mathématiques modernes vers 1970. Aujourd'hui se dessine un nouveau bouleversement avec des "mathématiques modélisantes" alors qu'on n'a pas digéré le premier ni même tiré des leçons de son échec. Au risque de surprendre, on doit rappeler que l'enseignement traditionnel des mathématiques a évolué dans son esprit avant d'évoluer dans son contenu, et ce bien avant la réforme des mathématiques modernes. Et le reflux annoncé de ces mathématiques en 1982 n'a rien changé, au contraire. Quant à l'intrusion des mathématiques modélisantes, elle n'a pas eu l'effet correcteur que certains attendaient peut-être; elle a encore aggravé le processus en donnant aux mathématiciens une place en opposition par rapport aux autres sciences. Les publications des IREM de Strasbourg ([7]) ou de Limoges ([8]) émanant de groupes de travail mixtes réunissant mathématiciens et physiciens en témoignent. Il s'agit chaque fois de montrer ce qui diffère entre mathématiques et physique, et l'on va dans la différenciation jusqu'à l'extrême de la caricature.

L'évolution dans l'enseignement des mathématiques est l'apparition de la raideur. Il faut bien en attribuer la paternité à l'Inspection générale, même si le processus continue sans elle et peut-être même en certaines occasions contre elle depuis une vingtaine d'années. Au départ il y a eu le souci d'apporter de la rigueur à l'édifice des mathématiques manifesté par Bourbaki. Sa traduction dans l'enseignement universitaire s'est faite avec Gustave Choquet en 1953. Comme on le voit il n'a pas fallu un siècle. On s'adressait à l'époque à des étudiants formés au lycée et en classes préparatoires avec les anciens programmes. D'ailleurs Bourbaki lui-même ne préconisait-il pas d'avoir atteint ce niveau pour lire son traité. La rigueur est devenue raideur dans la traduction qui s'est faite pour les degrés qui précédent l'université. Il faut voir que Bourbaki n'a rien changé pour la pratique des chercheurs, même s'il a eu un impact positif sur la production, au bénéfice de l'école française notamment. Ce n'était qu'une mise au propre. Mais transposé ailleurs, ce qui n'était souvent que des conventions fait figure de normes.

Pour autant la raideur ne s'est pas complètement installée dès la réforme des mathématiques modernes. Sous la forme envisagée par Jean-Alexandre Dieudonné ([9]), elle s'adressait uniquement au lycée scientifique. D'ailleurs ceux qui ont eu la chance de connaître la réforme à ce niveau, à un moment où les connaissances acquises au collège étaient solides et les enseignants formés à la vieille école, ne s'en sont pas mal sortis. Il est assez surprenant de voir que ceux qui ont découvert "Bourbaki" au lycée, ceux qui l'ont découvert au moment "idéal" après la propédeutique ou les classes préparatoires et ceux qui l'ont découvert après leurs études universitaires se sont vite retrouvés au même point.

La raideur est naturelle, elle est humaine, quand on reçoit un conseil qu'on interprète comme un ordre et qu'on ne comprend pas. Aujourd'hui elle atteint tout le monde de l'enseignement à commencer par la noosphère, dont les universitaires et les inspecteurs généraux qui ont participé ou participent aux programmes ou à leur application à l'exception peut-être de quelques enseignants de terrain de tout niveau.

C'est la raideur de certains membres de la noosphère dans leurs conceptions prises au sens de Guy Brousseau ([10]), conceptions souvent fraîchement installées d'ailleurs, confrontée aux conceptions des élèves, dont quelques enseignants réalistes tentent de se faire les interprètes, qui produit, dans une situation didactique largement virtuelle, la transposition dont nos mathématiques enseignées aujourd'hui sont le résultat. C'est vrai pour la conception des programmes, pour la confection des sujets de baccalauréat et largement aussi pour la production des IREM.

Le résultat est que les mathématiques enseignées aujourd'hui sont épurées, voire éviscérées comme le dit Yves Chevallard ([11]), au point d'en être infirmes. C'est ce que nous allons vérifier.

Le but de cette petite étude n'est pas de donner des solutions miracles mais de pointer des difficultés. Certaines pourraient être facilement effacées avec un peu de courage ou de bonne volonté, d'autres sont beaucoup plus profondes sans doute. En tout cas rien ne pourra être dit ni fait de constructif à propos d'interdisciplinarité, de modélisation ou dans les TPE tant qu'on n'aura pas pris pleinement conscience de certaines difficultés.

Lorsque les éditeurs de la revue Tangente ([12]) envisagent de publier des manuels pour le collège ou le lycée, l'idée d'utiliser leur expérience pour proposer une approche plus ouverte des mathématiques est certainement très sympathique. Cependant je pense qu'ils sousestiment déjà la difficulté qu'il y a à rester au niveau requis si l'on veut pratiquer cette ouverture, sans qu'elle relève du gadget ou de l'historiette. Quant à respecter en plus la stricte conformité aux programmes, cela tient du rêve. Certes les ouvrages actuels, même les plus exigeants, sont très perfectibles. Mais s'il était si facile d'en renouveler l'esprit il y a longtemps que ce serait fait.

Au moins la prise en compte des difficultés devrait servir de mise en garde à tous ceux qui n'arrêtent pas de charger la barque, préconisant ici la création de laboratoires de mathématiques, recommandant là que les enseignants se recyclent en permanence en ingurgitant toute une bibliothèque de fascicules exposant des mathématiques d'aujourd'hui, se battant encore pour faire introduire dans les programmes la spécialité qui a assuré leur carrière de chercheur etc. Un peu de réalisme, s'il vous plaît. Commençons par être un peu moins raide dans notre façon de vivre l'enseignement des mathématiques et laissons les collègues des autres disciplines enfin profiter de cet outil merveilleux sans avoir à tout réécrire.

Calculs approchés et calculs d'erreur.

À l'école on parle beaucoup des trois calculs, du calcul mental, du calcul posé et du calcul approché, en préconisant de compléter l'apprentissage du second par celui des autres dans une stratification pédagogique, alors que les apprentissages doivent rester fortement imbriqués pour concourir à la compréhension intime des nombres. Pour être complet, il faut dire qu'on parle aussi du calcul sur machine pour le placer sur le même niveau alors que c'est un intrus dans ce paysage.

Quand on regarde de plus près on s'aperçoit que ce qui est appelé calcul mental n'est que du calcul posé non écrit et que ce qui est appelé calcul approché est un calcul d'encadrement, c'est-à-dire un autre calcul exact très précisément. On ne fait pas pratiquer le calcul approché "à la louche", celui pour lequel 23 fois 37 font à peu près 800. Ce faisant on s'interdit la familarité avec les ordres de grandeurs.

Au lycée l'inculture à propos de ce qu'on pourrait appeler un calcul approché "maîtrisé" est complète. Jean-Pierre Kahane donne l'exemple d'un problème sur un oeuf ([13]) qui se terminait par le calcul de $\pi\sqrt{2}$. On demandait de prendre les valeurs approchées $\pi = 3,14$ et $\sqrt{2} = 1,41$ pour obtenir une valeur à 1% près. Il souligne l'incohérence de la question. Si l'on fournit des valeurs approchées pour chacun des facteurs, il ne reste qu'à les multiplier et on ne comprend pas le statut de l'exigence de précision sur le produit. Peut-être est-elle seulement là pour fixer le format dans lequel le résultat sera présenté?

Dans cet exemple, on trouve d'abord une escroquerie très fréquente dans les exercices proposés aujourd'hui, notamment au baccalauréat. On place une exigence de respect des usages scientifiques, comme celle d'indiquer une précision dans un résultat, mais en même temps on laisse l'énoncé remplir l'exigence tout seul, pour être bien sûr que les élèves n'auront pas à s'y frotter. C'est un peu comme dans cette caricature des exercices "modernes", où la seule chose demandée aux élèves était de souligner en rouge les valeurs numériques de l'énoncé.

Si l'on triche de la sorte, c'est parce que les calculs d'erreur, auxquels on formait dans le cours de physique du lycée il y a quelques décennies, sont complètement sortis de la culture de l'enseignement. Or il est facile de donner un sens à la question de notre exemple. Les valeurs $3,14$ et $1,41$ sont implicitement des arrondis, et par conséquent approchées à $0,005$ près. On sait que l'erreur relative sur le produit est la somme des erreurs relatives sur les facteurs. Cette somme est ici à peu près $1/600 + 1/300 = 1/200$. Cela suffit largement à garantir la précision demandée.

Dans un TPE, consacré à l'influence comparée du soleil et de la lune dans le phénomène des marées et présenté dans une publication de Michèle Artigue et de Martine Bühler ([14]), on terminait par un calcul approché. On était largement dans les limites de l'épure : il s'agissait de montrer que l'influence de la lune est en gros le double de celui du soleil. Une précision de 1% eût été du luxe. Cependant à un aucun moment n'est venue à l'esprit de l'élève, du professeur encadrant le TPE, ou des rédacteurs de l'article la moindre inquiétude sur la précision des calculs.

Dans un autre TPE, consacré à la détermination de la distance de la terre au soleil et cité par ([15]), on devait utiliser l'approximation $\sin x \simeq x$ pour un petit angle x mesuré en radians. L'élève reliait cette question à l'approximation affine dont il est question dans son cours de mathématiques et il en a profité pour placer une définition en règle de la dérivée, avec la propriété suivante : la fonction $\sin x$ admet une dérivée égale à 1 en 0.

On peut déjà s'inquiéter de voir arriver tout un formalisme pour exprimer le simple fait que $\sin x/x$ tend vers 1 quand x tend vers 0. Mais il y a plus grave. André Antibi a fait justement remarquer que l'existence de cette limite ne fournit absolument aucune indication pour un arc bien précis comme $0,01$ radian par exemple. A ce compte-là mieux valait prendre un petit bout de fil et comparer l'arc et son sinus expérimentalement.

Les grandeurs dimensionnées.

A l'école on répugne aujourd'hui à faire intervenir les nombres "concrets", où figurent des grandeurs, comme : $3cm$, $15m^2$, $60kg$ etc. Or c'est par là qu'il faudrait commencer pour expliquer les opérations. Cette tendance est confirmée dans les programmes de l'école par le regroupement dans un ghetto "mesure" de tout ce qui fait intervenir des dimensions.

L'exemple de la vitesse est caricatural. Dire que la vitesse est le quotient de la distance parcourue par le temps écoulé, par exemple qu'un sprinter qui parcourt $10m$ en $1s$ a une vitesse de $10m/s$, semble au delà de ce que peut supporter un pédagogue des mathématiques d'aujourd'hui. Il préfèrera sans doute dire que la vitesse est le nombre obtenu en divisant la mesure d'une distance par la mesure d'un temps, des unités de longueur et de temps ayant été choisies.

Cette dernière formulation est sans doute plus conforme au contenu de certaines fiches préparées pour Sésamath ([16]), où l'on peut notamment lire que l'aire est la "mesure de la surface d'une figure exprimée en unités d'aire".

Dans les sujets sélectionnés par l'Inspection générale comme exemples des (futures) orientations du baccalauréat 2004 ([17]), il en est un qui concerne un circuit qui excite une inductance. On y parle d'une résistance R (exprimée en Ohms), d'une inductance L (exprimée en Henrys), d'une force électromotrice E (exprimée en volts), d'une intensité i (exprimée) en Ampères. Curieusement, pour le temps, on dit seulement que l'unité est la seconde. En principe R, L, E, i sont donc des nombres et non des grandeurs physiques. D'ailleurs on donne les valeurs numériques $R = 5$, $L = 1/2$, $E = 3$, ce qui fait très justement hurler le physicien qu'est Jacques Treiner, lequel pense à ses malheureux collègues qui passent leur temps à expliquer qu'il ne faut jamais omettre les unités. Purisme pour purisme, je me demande ce que peut représenter la dérivée i' d'une fonction numérique par rapport à la grandeur dimensionnée qu'est un temps.

Le sujet 2004 pour la série S ([18]) comprenait un exercice sur un chariot soumis à une force d'entraînement constante et à une résistance proportionnelle à la vitesse, dont la rédaction a été critiquée par Françoise de Labachelerie ([19]). Dans toute la partie cosmétique, dont le candidat devait comprendre qu'il ne fallait pas la lire, on respecte les usages scientifiques, parlant d'une masse de $200kg$, d'un coefficient de $25N.m^{-1}.s^{-1}$. En revanche, dans la partie à retenir, il est question d'une distance x en mètres et d'un temps t exprimé en secondes, pour lequel on oublie d'ailleurs de préciser tout de suite l'origine. Ainsi l'équation du mouvement

$$25x' + 200x'' = 50$$

a-t-elle perdu tout sens physique.

Ensuite on rappelle l'égalité entre la vitesse $v(t)$, qui est a priori une vraie vitesse puisqu'on ne dit pas comment l'exprimer, à la dérivée $x'(t)$, ce qui égale une grandeur dimensionnée à une grandeur sans dimension.

Fin 2004, l'Inspection générale a publié un dossier contenant des exercices comportant une "restitution organisée de connaissances" (ROC) ([17b]). C'est une réponse au projet un moment caressé d'inclure une question de cours dans le sujet du baccalauréat. Comme il n'y a aucune vraie démonstration exigible dans le programme, l'entreprise était évidemment impossible et l'on a droit à ce nouveau trompe-l'œil. Dans la liste proposée, l'exercice **R11** concerne l'évolution de la température d'un liquide placé dans une pièce plus froide. L'équation différentielle, qui n'est pas écrite dans l'énoncé, est ici

$$\frac{d\theta}{dt} = a(\theta_0 - \theta)$$

où θ est la température (variable) du liquide et θ_0 celle (fixe) de la pièce. Il faut comprendre, car rien n'est dit, que le liquide est dans un petit vase et que son refroissement est sans effet sensible sur la température de la pièce. On ne dit pas comment on mesure θ; il faut comprendre qu'on prend l'échelle Celsius. En revanche le temps est exprimé en minutes. Surtout on précise que a est un nombre réel, alors qu'il a la dimension T^{-1}. Voilà de quoi faire hurler une nouvelle fois le physicien.

De toute façon, après les six lignes d'introduction, on tourne la page. On demande pour finir de résoudre $y' = ay - 20a$ et il n'y a plus de physique. C'est dommage car l'exercice n'était pas inintéressant. Il fallait trouver a sachant que θ passe de 70 à 60 degrés C en 5 minutes pour prédire la température au bout de 30 minutes .

Il y a ainsi une incapacité absolue à manipuler les dimensions de la part de ceux-là mêmes qui contrôlent notre système éducatif en mathématiques, non seulement à l'occasion de questions soumises aux élèves, mais aussi dans des textes de présentation. Dans ces conditions, ou bien on ne nous parle plus d'interdisciplinarité ou alors on prend les mesures qui s'imposent pour libérer les mathématiques du carcan formaliste dans lesquelles on les a enfermées.

La manipulation des fonctions.

Il n'est pas possible de manipuler des fonctions si l'on ne considère pas qu'une fonction est une grandeur ou une variable qui dépend d'une autre et si l'on s'interdit de désigner de la même façon la fonction et sa valeur pour une valeur indéterminée de la variable, autrement si l'on s'interdit de penser et d'écrire $x = x(t)$ ([20]).

Le sujet du baccalauréat de 2003 pour la série S ([21]) en arrive ainsi à ne jamais utiliser deux fois de suite le même symbolisme pour écrire des équations différentielles, certaines étant d'ailleurs considérées comme telles alors que d'autres ne sont que des relations. On peut ainsi lire ce qui suit.

a) *la fonction f est solution de l'équation différentielle : $y' = ay$.*

b) *la fonction g ... vérifie la relation :*

$$g'(t) = ag(t)\Big(1 - \frac{g(t)}{M}\Big)$$

c) *la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle: (E') $y' + ay = \frac{a}{M}$.*

d)

$$g'' = a(1 - \frac{2g}{M}\Big)g' \ .$$

On constate que l'on écrit tantôt g tantôt $g(t)$, qu'on ne sait pas noter de la même façon la fonction inconnue de l'équation différentielle et une solution de cette équation.

Surtout on n'a jamais pu écrire que N vérifiait l'équation différentielle

$$\frac{dN}{dt} = aN\Big(1 - \frac{N}{M}\Big)$$

comme tout scientifique normal, ce que je fais remarquer dans mon fascicule "enseigner l'essentiel" ([22]).

L'exercice du sujet de 2004 ([18]) déjà cité accepte de confondre la distance parcourue x avec la fonction du temps qu'elle définit. Cependant cette liberté est confinée à la présentation initiale dont on sait qu'elle ne doit pas être lue. Dès qu'on entre dans les questions à résoudre, les précautions prises sont infinies. On rappelle que $v(t) = x'(t)$, au cas où quelqu'un l'ignorerait. Pourquoi ne pas avoir écrit $v = x'$ simplement?. N'est-ce pas ainsi qu'on passe de l'équation en x à celle en v?

On demande de "calculer, pour tout nombre réel t positif t, $x'(t)$". Faut-il comprendre qu'il faut faire autant de calculs qu'il y a de nombres réels positifs? Pourquoi n'a-t-on pas demandé x' tout simplement?

Les précautions prises ne sont probablement pas inutiles. Mais elles sont la preuve de la faillite de l'enseignement des mathématiques. Si nous ne pouvons plus écrire $x = 2t - 16 + 16e^{-t/8}$ et $x' = \dots$ comme des physiciens le feraient, c'est que nous sommes infirmes.

Le calcul différentiel et intégral.

Le document d'accompagnement des programmes de terminale S ([23]) utilise, pour modéliser une pile de pont, la formule

$$V(z) = \int_0^z S(t)dt \tag{1}$$

qui relie le volume entre les sections horizontales de cotes 0 et z et l'aire S(t) de cette section à la cote t. Il en déduit

$$V'(z) = S(z)\ . \tag{2}$$

D'où la formule (1) provient-elle? Ce n'est pas une définition du volume. Le programme introduit l'intégrale à partir de la notion intuitive d'aire ([24]). Alors la notion de volume relève nécessairement de la même intuition. Si l'on définissait l'intégrale, l'aire et le volume de façon abstraite, encore faudrait-il les relier, ce qui revient à établir le théorème de Fubini dans un cas particulier. Comme ce n'est pas le cas, la seule façon raisonnable d'établir (1) est encore de montrer (2). D'ailleurs on peut aussi montrer le théorème de Fubini de la sorte.

Or la relation

$$dV = Sdz$$

est on ne peut plus naturelle. On assimile le volume entre les cotes z et $z + dz$ à celui d'un cylindre de hauteur dz et de base $S(z)$. Autrement dit on procède exactement comme pour dériver l'intégrale, introduite comme une aire, par rapport à sa borne supérieure.

On touche ici un point crucial de l'idéologie qui soustend l'enseignement actuel des mathématiques, notamment celles du lycée. Modéliser consiste à écrire le plus tôt possible une expression mathématique formalisée. Peu importe comment on l'obtient puisqu'on prétend que ce n'est pas le travail du mathématicien. Qu'importe alors si ce que l'on déduit à l'aide de théorèmes officiels était en réalité ce que fournit directement la modélisation. Cela rappelle celui qui pour faire chauffer de l'eau prend la recette de cuisson d'un oeuf; il n'a plus qu'à retirer l'oeuf à la fin.

Le même document d'accompagnement des programmes de terminale S préconise d'introduire la fonction exponentielle à partir de l'équation différentielle traduisant la désintégration des noyaux. Une annexe a été écrite sur le sujet par des mathématiciens et des physiciens des deux GEPS et cette annexe figure dans le document pour la physique comme dans celui pour les mathématiques, à l'identique — contrairement à ce que j'ai cru un moment et affirmé à ma plus grande honte ([25]).

D'après ce que j'ai lu de la part de quelques intervenants, la collaboration s'est déroulée dans une excellente ambiance. On ne comprend pas alors pourquoi on a laissé au seul physicien le soin d'établir l'équation différentielle — partie que me suis obstiné à attribuer à un mathématicien avant de finir par comprendre ce que le physicien voulait dire et de regretter qu'il ne l'ait pas dit comme il le pensait en physicien. Au delà de la forme critiquable de la présentation, chose finalement sans importance, c'est la répugnance des mathématiciens à se salir les mains qui est insupportable. C'est de la paralysie.

De façon générale, il est impossible d'établir une équation différentielle, dans un contexte géométrique par exemple et a fortiori physique, sans raisonner comme le font les physiciens, sans penser la proportionnalité entre dy et dx de la même façon que Jacques Treiner vit la proportionalité entre dN et dt (petit mais pas trop) sur un photomultiplicateur pour la désintégration des noyaux. C'est vrai pour la chaînette, dont la figure d'équilibre était établie en mathématiques il y a quelques décennies, ou encore pour la lame flexible.

L'exemple suivant a été fourni par Pierre-Henri Terracher ([26]). On considère un récipient rempli d'un liquide A, alimenté par en haut avec un liquide B et vidé par en bas. Les liquides se mélangent sans modification des volumes. Les flux entrant et sortant sont supposés égaux et suffisamment faibles pour que le mélange dans le récipient soit maintenu homogène en permanence par brassage. Comment la proportion évolue-t-elle au cours du temps?

Déjà une majorité de collègues (presque tous en réalité) va considérer que ce n'est pas un exercice de mathématiques et se demander pourquoi et comment un mathématicien a bien pu s'y intéresser. C'est cela qui est grave. Comment peut-on souscrire à cette mode (illusoire mais largement suivie) de l'interdisciplinarité ou de la modélisation, notamment dans les TPE, et refuser de se salir les mains dès que la plus petite occasion se présente. Il semblerait que la mode en question cache, dans le meilleur des cas, l'occasion de rencontres humaines entre professeurs de disciplines différentes et, dans le pire, un prétexte donné à chacun de vendre sa salade sans se soucier si elle sera du goût de l'autre.

La solution que l'on a envie de donner et que donnent sans vergogne les physiciens est la suivante. Soit V le volume (fixe) du récipient et soit p la proportion (variable) du liquide B dans ce dernier. Pendant l'intervalle de temps dt, la proportion passe de p à la valeur $p + dp$ très voisine, le récipient recevant kdt de liquide B pur et en évacuant $kpdt$ du même dans le mélange. Donc la quantité de liquide B dans le récipent varie de

$$V(p + dp) - Vp = Vdp = k(1 - p)dt \ .$$

D'où l'équation différentielle en dp/dt régissant l'évolution de p.

Pierre-Henri Terracher a éprouvé le besoin de donner une présentation plus conforme aux standards des mathématiques enseignées au lycée, en utilisant l'intégrale. Fondamentalement c'est la même chose, mais il faut déjà un certain bagage technique pour y parvenir. J'avoue avoir recherché comme lui à maintes occasions cette impression (illusion?) de rigueur. Avec le recul il me paraît maintenant vraiment dommage qu'on ne puisse pas enseigner la solution sous la forme donnée ici dans un cours de mathématiques. Pour l'élève c'est un "petit métier", comme dirait Philippe Lombard ([27]), qu'il conviendrait d'acquérir.

Jean Dhombres nous a montré un manuscrit de Monge où le calcul de la courbure de la parabole se fait en introduisant un cercle osculateur ([28]). Bien sûr Monge néglige tous les termes à négliger qu'il cache sous un grand symbole. Pourrait-on enseigner les mathématiques de cette façon, je veux dire avec cette efficacité, aujourd'hui? Je ne le crois pas et le déplore. Cela donne du relief au livre pour l'Agrégation externe de Jacques Rouvière ([29]); il a eu le courage de mettre des petits points à la place de ces termes encombrants et inutiles qu'on se croit obligé de faire figurer explicitement.

Notes

([1]) Un "comité des interactions des mathématiques" a été mis en place au CNRS en 1992 par le directeur général F. Kourilsky. Il comprenait notamment J. Vuillemin pour la biologie et J.-M. Grandmont pour les sciences économiques. La remarque fait partie des conclusions, jamais diffusées hélas.

([2]) Voir la conférence "La géométrie élémentaire, une science physique?" faite par Rudolph Bkouche, IREM de Lille, à l'IREM de Liège au printemps 2002.

([3]) Il s'agit d'un texte sur les relations entre mathématiques et physique écrit dans le cadre des travaux de la CREM (?).

([4]) Voir l'exposé à la commission "Historique et problèmes du calcul", par Jean Dhombres, EHESS et Comité scientifique des IREM.

([5]) Voir l'ouvrage "les neuf chapitres" de Karine Chemla et ... , notamment l'exercice ... du 9ème chapitre présenté et commenté à la commission par Jean-Pierre Kahane.

([6]) Voir le site de CultureMath à l'adresse

dma.ens.fr/culturemath

ainsi que l'exposé "Présentation du site CultureMATH", par Farouk Boucekkine, ENS Cachan.

([7]) Voir la publication "Dictionnaire de mathématiques et de sciences physiques", par le groupe Maths-Physique, IREM de Strasbourg, 1996.

([8]) Voir la publication "Mesurer et calculer : une liaison Math-Physique au lycée expérimentée en classe", par Gérard Armengaud, Alain Vacher, Michel Villaret, IREM de Limoges, septembre 2001.

([9]) Voir l'ouvrage sur la géométrie ... de Jean-Alexandre Dieudonné ...

([10]) Voir l'article "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", par Guy Brousseau, Recherches en didactiques des mathématiques 7 (2).

([11]) Voir la conférence "Quel avenir pour l'enseignement des mathématiques?" par Yves Chevallard, UME ADEF et IUFM d'Aix-Marseille, aux actes du colloque "L'enseignement des mathématiques du collège au premier cycle l'université", Metz, IUFM de Lorraine, 8-10 octobre 2003.

([12]) Voir le numéro ... de la revue Tangente, et l'exposé à la commission "Apport de la revue Tangente dans l'enseignement des mathématiques", par Gilles Cohen, directeur de publication aux éditions POLE.

([13]) Voir ...

([14]) Voir l'article "Quelle place pour les mathématiques dans les TPE?", par Michèle Artigue et Martine Bühler, IREM Paris 7, 2003.

Le texte a été présenté au Comité scientifique des IREM le 28 novembre 2003 à propos du débat sur la modélisation. Voir la contribution n°6 "Réflexion sur le travail des groupes TPE et groupe modélisation", par Michèle Artigue, IREM de Paris VII, recueil sur la modélisation du Comité scientifique des IREM.

([15]) Il s'agit d'un TPE présenté par des élèves auquel Eric Barbazo a fait allusion dans son exposé "Où sont les maths dans les TPE?" à la commission au printemps 2003. Le commentaire d'André Antibi a été formulé à cette occasion; je n'avais pas relevé le point, irrité par le formalisme du travail.

([16]) Voir, sur le portail des IREM dans les pages de la commission interIREM Sesamath, une contribution de l'IREM de Montpellier.

([17]) Voir le document officiel "Baccalauréat des voies générales et technologiques, Mathématiques, Série S, Exemples d'exercices", 20 novembre 2003, à l'adresse

eduscol.education.fr/bac

([17]) Voir ...

([17b]) Voir ...

([19]) Voir l'exposé à la commission "Liaison Math-Physique", par Françoise de Labachelerie, IREM de Franche-Comté.

([20]) Voir l'exposé à la commission "La notion de fonction et la notation fonctionnelle", par Jean-Pierre Ferrier, IREM de Lorraine.

([21]) Voir ...

([22]) Voir le fascicule "Enseigner l'essentiel en mathématiques", Didactiques n°6, IREM de Lorraine, avril 2004.

([23]) Voir le document officiel d'accompagnement du programme de terminale S, document distribué par le Centre National de la Recherche Pédagogique et consultable sur son site.

([24]) Une présentation rigoureuse et élémentaire de l'intégrale à partir de l'aire pour le lycée est proposée par Georges Lion, IREM de Limoges, 2004.

([25]) Voir la correspondance entre J. Treiner et J.-P. Ferrier entre les 2 et 26 juin 2003 rassemblée par J. Treiner, en faisant abstraction du ton désagréable des échanges, sachant que je trouve par ailleurs très saine la position du physicien sur les mathématiques.

([26]) Pierre-Henri Terracher a commencé par donner l'explication qui figure ici, ou quelque chose d'avoisinant, manifestant une clarté dans l'énonciation qui traduisait nécessairement une bonne conception. Cela ne peut pas être si mauvais pour l'enseignement.

([27]) Voir la conférence "De l'intuition à l'argumentation : peut-on apprendre à Raisonner?" par Philippe Lombard, IREM de Lorraine, aux actes du colloque "L'enseignement des mathématiques du collège au premier cycle l'université", Metz, IUFM de Lorraine, 8-10 octobre 2003.

([28]) Voir ...

([29]) Voir l'ouvrage ... de Jacques Rouvière ...