

La chaîne qui tombe de la table

par Jean-Pierre Ferrier, IREM de Lorraine

Sur une table horizontale on a placé une chaîne de longueur l et de masse linéique μ dont une partie de longueur x_0 pend sur l'un des bords. Cette chaîne est souple et glisse sans frottement. On la lâche au temps $t = 0$. On note $x(t)$ la longueur de la partie qui pend au temps t .

1. Bilan énergétique

Sachant que la vitesse est égale à dx/dt en tout point, l'énergie cinétique de la chaîne est donnée par

$$\frac{1}{2}\mu l \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 .$$

Par ailleurs l'énergie potentielle ne varie que par la partie qui pend. En effet la réaction de la table, qui lui est perpendiculaire puisqu'il n'y a pas de frottement, ne travaille pas. Cette énergie est donc

$$-\frac{1}{2}\mu x^2 g$$

à une constante près.

La loi de conservation de l'énergie mécanique nous dit que

$$\frac{1}{2}\mu l \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}\mu x^2 g$$

est une constante, ou encore que

$$l \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - x^2 g$$

l'est.

On peut résoudre cette équation en dérivant, ce qui donne

$$\frac{dx}{dt} \cdot \left(l \frac{d^2x}{dt^2} - xg \right) = 0 .$$

Tout cela est très simple, mais l'intégrale première introduit la solution parasite pour laquelle la longueur x est constante. Par ailleurs est-on absolument certain qu'il ne se cache pas d'énergie à la pliure de la chaîne : sans doute puisque cette dernière est souple, mais encore?

2. Equation directe.

Débarassée de sa solution parasite, l'équation obtenue s'écrit

$$l \frac{d^2x}{dt^2} = xg .$$

C'est l'équation fondamentale de la mécanique dans laquelle on trouve, à un facteur près, à droite le poids de la partie verticale, le seul qui compte puisque celui de la partie horizontale est compensé par la réaction de la table, et à droite l'accélération appliquée à toute la longueur de la chaîne.

Cette histoire de partie qui ne compte pas pour l'entraînement mais qui compte pour l'inertie n'est cependant pas très convaincante. Normalement on additionne les forces et les accélérations comme des vecteurs.

Désignons par T la magnitude de la tension à la pliure de la chaîne située au bord de la table. Pour la partie verticale la loi fondamentale de la mécanique s'écrit

$$\mu x g - T = \mu x \frac{d^2 x}{dt^2}$$

en projection verticale. Pour la partie horizontale, elle s'écrit

$$T = \mu(l - x) \frac{d^2 x}{dt^2}$$

en projection horizontale. En ajoutant membre à membre on trouve bien l'équation attendue.

Il reste qu'on n'a pas bien expliqué pourquoi la tension était égale, en magnitude, de chaque côté de la pliure. L'argument de continuité est un peu court quand on sait que la direction du vecteur tension fait un saut d'un angle droit.

3. La chaîne qui descend la montagne.

Imaginons que notre chaîne souple descende un profil verglacé. A l'instant t fixé, désignons par s l'abscisse curviligne de long de la chaîne, supposée 0 à l'extrémité supérieure et l à l'extrémité inférieure. Faisons le bilan des forces qui s'exercent sur la fraction infinitésimale de chaîne comprise entre s et $s + ds$, en projection sur la tangente au profil en $-s$, supposée faire l'angle ϕ avec l'horizontale. On oriente tout vers le bas.

On trouve

- les tensions $-T(s)$ et $T(s + ds)$ aux extrémités,
- la projection $\mu g \sin \phi ds$ de la pesanteur,
- la "force d'inertie" $-\gamma \mu ds$ où γ est l'accélération,
- en ignorant la réaction de la montagne qui est nulle en projection.

En égalant à 0 la somme, il vient

$$dT = \gamma \mu ds - \mu g \sin \phi ds .$$

Or $\sin \phi ds = dy$ si y est la coordonnée verticale. Ainsi

$$dT = \gamma \mu ds - \mu g dy .$$

Intégrons en s entre 0 et l . Comme la tension est nulle aux extrémités, il vient

$$\int_0^l dT = 0 .$$

Comme l'accélération γ est constante le long de la chaîne, il vient

$$l\gamma = hg$$

où h est la hauteur de la chaîne, différence entre les altitudes des extrémités. C'est l'équation du mouvement.

Revenons à notre table. Supposons que le bord en soit arrondi sans qu'on connaisse la forme exacte de cet arrondi. Dès que le début de la chaîne a dépassé l'arrondi et tant que la fin ne l'a pas abordé, la différence $x - h$ est constante. Ainsi

$$l \frac{d^2 h}{dt^2} = hg$$

est l'équation exacte du mouvement.

Si maintenant le bord n'est que légèrement adouci, la différence $x - h$ reste très petite et l'équation obtenue précédemment est ainsi validée.

4. Retour sur le bord de la table.

On va supposer maintenant le bord arrondi de table représenté en section par un quart de cercle de rayon r . On va faire le bilan des forces qui s'exercent sur la partie de la chaîne qui glisse sur cet arrondi. Plus précisément on va faire le bilan de leurs moments par rapport au centre du petit cercle considéré, pour éviter la considération de l'abscisse curviligne.

Aux extrémités il y a une tension verticale de magnitude T_v orientée vers le bas et une tension horizontale de magnitude T_h orientée vers la table. En moment on obtient

$$T_v r - T_h r = (T_v - T_h)r$$

dans le sens qui entraîne la chaîne.

La réaction du support est partout radiale; elle ne produit aucun moment.

En revanche la pesanteur de la partie de la chaîne qui glisse sur l'arrondi introduit un moment global égal à

$$\int_0^{\pi/2} r \cos \theta \cdot \mu r g d\theta = \mu r^2 g$$

dans le sens qui entraîne la chaîne.

Le total obtenu équilibre en moment les "forces d'inertie". ce qui donne

$$(T_v - T_h)r + \mu r^2 g = \frac{\pi r}{2} \mu \gamma r$$

si γ est l'accélération à l'instant t , ou encore

$$T_v - T_h = \mu \left(\frac{\pi \gamma}{2} - g \right) r$$

en simplifiant. Or l'accélération est certainement positive et inférieure à la valeur g qu'elle aurait si la chaîne était en chute libre. On voit bien que la différence est d'autant plus petite que r est petit. Cela justifie donc le raisonnement tenu en **2**.

5. Moralité.

Il faut certainement connaître un peu de physique pour comprendre ce qui précède. On y trouve de façon générale la notion de force et de moment d'un couple et plus particulièrement la réaction du support et la tension.

C'est au physicien qu'incombe la responsabilité d'expliquer cela, par exemple de préciser l'absence de frottement par la perpendicularité au support de la réaction.

Cependant, une fois que le physicien aura fait ce travail en transmettant au mathématicien une information sous une forme qu'il doit être capable d'exploiter, ce dernier peut poursuivre seul. Dire qu'un vecteur représentant une force est perpendiculaire à une droite ou à la tangente à une courbe n'est quand même pas du chinois pour quelqu'un qui prétend avoir reçu une formation mathématique.

Le physicien n'est pas si embarrassé quand il utilise les outils mathématiques. Il n'appelle pas au secours pour faire une addition. Que dirait-on si le mathématicien avait le même comportement vis-à-vis de la langue française que celui qu'il a vis-à-vis de la physique? S'il lui fallait un spécialiste chaque fois qu'il a besoin d'écrire une phrase avec un sujet et un complément? Maintenant peut-être suis-je optimiste; il est possible que cela arrive un jour.

Maintenant il y a une autre difficulté dans certains des calculs qu'on a présentés, et celle-là n'a rien à voir avec la physique : elle est interne aux mathématiques.

Nous avons considéré une fraction infinitésimale de chaîne, en commençant par un accroissement infinitésimal ds de l'abscisse curviligne. Il ne servirait à rien de construire un formalisme, comme celui des formes différentielles, pour y donner du sens. Ce sens a quelque chose de primitif. Pour le physicien expérimentateur ce sera un petit accroissement, pas toujours si petit que cela d'ailleurs, car il y a les fluctuations, la précision des mesures etc. Pour le mathématicien c'est pareil mais il n'a pas besoin de se limiter dans la petitesse, ce qui est une simplification considérable.

La dérivée dy/dx , qui est la pente limite, exprime le quotient de deux accroissements infinitésimaux. Le fait de donner à la limite une définition abstraite n'apporte aucun sens, mais cela permet de fixer avec précisions les règles du calcul dit "infinitésimal", c'est-à-dire sur ces accroissements infinitésimaux.

Il ne faudrait pas qu'insister sur la formalisation fasse perdre de vue le sens primitif des choses et surtout l'art qui consiste à jongler avec tous des ds , dy , dh ou dT , jonglerie dont l'efficacité est sans commune mesure avec l'écriture des $f'(g(x))g'(x)$ ou autres $1/f'(f^{-1}(y))$.

L'apprentissage de la mise en équation différentielle de petits problèmes est un vrai "petit métier", comme le dit Philippe Lombard à propos du raisonnement, qu'il faudrait cultiver dès qu'on le peut à l'école.

On retrouve, à propos de l'analyse, l'hélice structurale qu'on rencontre avec les nombres et la géométrie. Le premier niveau est le niveau intuitif des accroissements infinitésimaux. Le second est celui des dérivées et des limites; si c'est de là qu'on part, on développe un formalisme vide de sens. Le troisième niveau est celui des formes différentielles, lequel donne une interprétation du premier. Comme dans les autres exemples d'hélice structurale, le niveau le plus savant rejoint le niveau le plus élémentaire. Mais le niveau savant n'ajoute pas de sens. Ce dernier était tout entier dans le niveau de base.