

Préparation de la réunion de la commission des 1, 2 avril

La fonction exponentielle

IREM de Lorraine, avril 2005

1. Radioactivité et loi exponentielle.

Nous allons partir de l'exemple, étudié en physique, de la radioactivité, puisqu'il en est fait si grand cas. Nous retenons juste deux propriétés :

- l'invariance dans le temps
- et l'absence d'interaction entre noyaux

lesquels sont bien sûr identiques.

Parler d'invariance dans le temps ne signifiera bien sûr rien à celui qui n'aurait pas déjà rencontré la propriété. Ici cela signifie que le phénomène va évoluer à partir du temps t comme il l'aurait fait à partir d'un temps 0 de référence avec la quantité restant en t .

Dans le "modèle microscopique" ou statistique, cette invariance est expliquée par l'absence de vieillissement; cependant nous ne renvoyons pas à ce modèle.

Cela étant dit, appelons $f(t)$ le nombre de noyaux restants au temps t . Nous allons comparer l'évolution entre les temps t et $t + h$ d'une part et entre les temps u et $u + h$ d'autre part. Par invariance dans le temps, nous nous ramenons à comparer les évolutions entre les temps 0 et h , pour une quantité initiale $f(t)$ d'un côté et $f(u)$ de l'autre.

L'absence d'interactions donne la proportionnalité entre quantités restantes et quantités initiales, soit

$$\frac{f(t+h)}{f(t)} = \frac{f(u+h)}{f(u)},$$

que l'on tire du fait que la proportion $f(u)/f(t)$ doit se retrouver identique à elle-même après un délai h dans $f(u+h)/f(t+h)$.

On s'énonce : *la proportion de noyaux restants ou désintégrés ne dépend que de l'intervalle de temps pendant lequel la désintégration est considérée.* C'est la propriété fondamentale des **lois exponentielles**.

Pour faire plaisir à Jacques Treiner nous dirons que nous tenons déjà là un modèle. Il ne comprend pas d'équation différentielle mais il n'en est pas moins mathématique, même s'il s'agit d'une règle de trois qu'on enseignait jadis au primaire. Cependant les explications relèvent de la physique. Il est probable que le physicien présenterait les choses de façon plus chaleureuse et convaincante. Nous pouvons toujours le lui demander.

Ecrivons la propriété fondamentale sous la forme

$$f(t+h)f(u) = f(u+h)f(t)$$

en oubliant les dimensions physiques, la restriction selon laquelle les temps sont tous postérieurs à un temps donné et en retenant de la physique la *monotonie*¹ de f .

¹ décroissance pour la désintégration, mais croissance pour $f(-t)$.

Juste deux petites remarques. D'une part nous avons quand même écrit une formule homogène, respectueuse des dimensions. D'autre part un puriste y verrait la nullité d'un déterminant, ce qui est l'expression savante de la règle de trois.

Partant de là nous pouvons travailler dans plusieurs directions. Remarquons déjà que f est identiquement nulle ou ne s'annule pas². On pourrait montrer que f est continue en 0 puis partout³, voire dérivable⁴ avec $f'(x) = kf(x)$ si $k = f'(0)/f(0)$.

2. Une première piste.

On va normaliser la propriété fondamentale en posant $f(t) = f(0)g(t)$, où $g(0) = 1$. Remplaçant t par x , h par y et u par 0, il vient

$$g(x + y) = g(x)g(y)$$

et on cherche à construire une telle fonction.

En fait cette dernière relation, appelée dans le programme équation fonctionnelle, signifie que g transforme une somme en produit. C'est plutôt l'autre sens qui est intéressant, celui qui transforme la multiplication en cette opération plus simple qu'est l'addition. C'est davantage du logarithme que de l'exponentielle qu'on se sert. On le constatait avec les règles à calculs; on le constate toujours avec les échelles logarithmiques.

Les programmes d'il y a un demi-siècle avaient choisi cette orientation, qui consiste à mettre en parallèle une suite géométrique et une suite arithmétique et à interpoler. C'est aussi le choix que préconise Georges Lion ou Jean-Pierre Demailly. Nous y reviendrons.

Notons quand même tout de suite qu'il s'agit du problème des intérêts composés, lequel est posé en termes d'**interpolation**. On veut offrir par exemple un taux annuel de 4%. Cependant on ne veut pas que celui qui retirerait son argent au bout de six mois pour le replacer soit favorisé parce qu'on lui aura appliqué un taux de 2% par semestre. L'équité impose de calcul le taux τ sur six mois pour que $1 + \tau$ la *moyenne raison* de 1 et de 1,04 qui est $\sqrt{1,04}$. De proche en proche on en tirera le taux sur trois mois, puis sur un mois (par une racine cubique) puis encore sur quinze jours. Là on s'arrête pour ne pas faire intervenir l'incertitude sur la "date d'effet".

Le phénomène de la radioactivité peut très bien conduire à une démarche analogue. Imaginons que la demi-vie soit de l'ordre de 4 jours, délai après lequel on aura constaté une activité égale à 50% de celle de départ. Au bout de deux jours seulement, ce n'est pas 75% mais plutôt 70% que l'on aura constaté, c'est-à-dire une moyenne raison. On pourra continuer la division des délais, mais on finira par buter sur des fluctuations empêchant d'aller plus loin.

3. Une seconde piste.

Partant de la relation fondamentale, on va maintenant prendre $u = 0$ et, supposant f non nulle, on écrit

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{1}{f(0)} \frac{f(h) - f(0)}{h} f(t) .$$

² si $f(t) \neq 0$ et $f(u) = 0$, prenant $h = t - u$, on a une contradiction.

³ en passant par la fonction g définie plus loin et l'argument pour a^x .

⁴ car $\int_x^{x+1} g(u)du = g(x) \int_0^1 g(y)dy$ ou plus directement, comme pour a^x .

Cela s'écrit encore

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = kf$$

où

$$k = \frac{1}{f(0)} \frac{\Delta f}{\Delta t}(0).$$

Si l'on considère de petits accroissements Δt , on obtient ainsi une loi d'évolution. Il est facile de "construire" la fonction f , géométriquement sur du papier quadrillé ou avec un tableur. D'après Jacques Treiner, on peut monter une expérience de physique qui conduise naturellement à cette loi, ce que l'on croit volontiers.

Cependant tout se complique quand on veut passer d'un Δt petit à un dt infiniment petit, c'est-à-dire quand on veut déboucher sur le formalisme courant des mathématiques. Entendons-nous-bien. Pour celui qui a déjà pratiqué la chose, c'est une banalité. En même temps voir de cette façon la radioactivité n'a strictement rien de choquant. En revanche vouloir faire *découvrir* à cette occasion la notion d'équation différentielle est pédagogiquement suicidaire.

Si l'on fait la comparaison avec la problématique de l'interpolation qui correspond à la première piste, il s'agit cette fois d'effectuer un **passage à la limite** pour écrire la dérivée, puis un **passage de l'infinésimal au fini** pour résoudre l'équation. C'est autrement plus complexe.

Quant à vouloir utiliser la formule

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

qui a le don de concentrer toutes les ambiguïtés⁵ de la résolution approchée des équations différentielles, autant ne pas y penser.

Cette piste est pourtant celle qui a été proposée dans les fameux documents d'accompagnement des programmes. Même s'il ne s'agit que d'une proposition, elle est considérée comme le choix officiel. Il était donc prévisible qu'elle soit reprise dans la réflexion à l'intérieur des IREM ou ailleurs. On la trouve dans le polycopié pour la préparation au CAPES de Daniel Perrin ou dans un document de travail de Robert Rolland, lequel développe aussi d'autres prolongements.

Retenons de cela que si f est dérivable en 0, alors f est dérivable partout. De plus

$$f'(t) = kf(t)$$

où $k = f'(0)/f(0)$. C'est important : si l'on construit une fonction f qui satisfait la relation fondamentale, il suffira de savoir la dériver en zéro pour la dériver partout. En particulier

$$f'(t) = f(t)$$

si $f(0) = f'(0) = 1$ bien sûr.

⁵ avec le saut d'une courbe intégrale à l'autre et le choix d'une suite de pas d'intégration pour chaque x .

4. Une troisième piste.

Cette dernière piste se greffe sur la précédente. Remplaçant f par x , nous avons

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = k$$

où nous reconnâtrions à gauche une dérivée composée s'il existait une fonction de x dont la dérivée soit $1/x$. Supposons un instant qu'une telle fonction existe et notons la \log . Il vient alors

$$\log x - \log x_0 = k(t - t_0)$$

où $x_0 = x(t_0)$.

En particulier $\log x = t$ si $x(0) = x'(0) = 1$. Exprimer x demande seulement de construire une réciproque de \log que l'on notera \exp ou e^x .

Une remarque. Cette composition pénible de dérivées est inutile si l'on peut changer

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

en

$$\frac{dx}{x} = kdt$$

que l'on intègre entre t_0 et t .

Cette voie est celle qui a été choisie depuis plusieurs décennies et jusqu'en 2002. D'ailleurs elle est la seule qui soit mentionnée les nouveaux programmes eux-mêmes, que les documents d'accompagnement n'ont donc pas suivi.

5. L'unité de temps.

A partir de ce qu'on vient de dire on dispose de **l'arsenal des propriétés** des fonctions exponentielle et logarithme dont le physicien aura besoin; il ne reste plus qu'à en dresser le tableau.

Bien sûr le cours de mathématiques doit proposer une construction, qui peut venir plus tard. Pour cela on privilégiera l'une des trois pistes.

Que faut-il **conserver** de ce qu'on vient de faire? Ce qu'on va dire maintenant justifierait une étude sérieuse et sans a priori, de la part de didacticiens; la question leur est posée.

Il est certain qu'il n'est pas très coûteux d'explorer les trois pistes et de dresser l'arsenal des propriétés. Mais est-ce efficace? Les élèves ne vont-ils pas tout embrouiller? C'est bien probable. Quand on leur a introduit la fonction exponentielle par l'équation $f' = f$, les élèves ne savent plus sa dérivée.

Avec une exposition tranquille, organisée en tranches précises dont chacune traite un petit groupe de propriétés associées, avec ses démonstrations et ses dessins, pour donner lieu à une famille identifiée d'exercices, l'élève peut associer à chaque notion un souvenir dans l'avancement du cours. Le risque de tout brouiller est probablement moindre.

Ainsi faut-il penser que cette exploration n'a été qu'un catalyseur, qu'elle a pour vocation de s'autodétruire en fin de compte.

6. La place de la physique.

Il reste la loi fondamentale. Elle a son intérêt propre et donne lieu à des exercices spécifiques, pour lesquels il n'est pas besoin de considérer une équation différentielle. C'est le cas lorsqu'il s'agit d'extrapoler une évolution à partir de l'évolution constatée pendant un intervalle de temps donné. Un des exercices proposés par l'IG en préparation du bac 2005 est de cette nature.

Cette partie est élémentaire mais elle n'est pas si facile. Et puis le physicien peut très bien s'en charger tout seul, puisque les outils mathématiques auront été acquis, en principe, depuis longtemps. S'ils ne l'ont pas été, ce n'est pas un cours de mathématiques sur la proportionnalité qui changera l'affaire. En revanche, dans un contexte concret, certains parviendront peut-être à comprendre.

Autrement dit nous sommes aussi amenés à rayer cette introduction de la classe de mathématiques. Ce qui revient à enseigner la fonction exponentielle sans se préoccuper de la physique.

D'abord la solution actuelle ne satisfait pas le physicien. Il a aussi besoin de la fonction logarithme. Comme il ne peut attendre le moment où elle sera traitée en mathématiques, il doit l'introduire tout seul. Ensuite et surtout, on peut se demander si le choix de la radioactivité est bien raisonnable, sur le plan épistémologique, pour introduire la fonction exponentielle. Si ce ne serait pas plutôt la fonction exponentielle qui éclairerait le phénomène de la radioactivité?

D'ailleurs, si l'on tenait à prendre un exemple en physique comme introduction, mieux vaudrait choisir la décharge d'un condensateur, plus facile à interpréter.

Nous pouvons conclure. La bonne⁶ adéquation du cours de mathématiques au cours de physique impose, paradoxalement, que l'introduction de la fonction exponentielle soit faite en mathématiques indépendamment de la physique.

7. Les contraintes du calendrier.

Le physicien demande que les fonctions exponentielle et logarithme soient traitées en mathématiques le plus tôt possible, certainement avant la Toussaint. On a vu que la méthode officielle ne satisfait pas cette exigence.

La présentation du logarithme par la quadrature de l'hyperbole a beaucoup d'avantages. Elle est répond à une question naturelle : trouver une primitive de $1/x$. Elle est simple, propre et parfaitement maîtrisée par la quasi-totalité des enseignants.

Malheureusement elle nécessite que l'on ait d'abord traité l'intégrale. Or cette partie du cours, l'une des rares qui soit satisfaisante dans les nouveaux programmes, pour peu qu'on ne les lise pas dans le détail, doit pas être sacrifiée à un impératif de calendrier.

La seule solution qui nous reste est de suivre la première piste. Elle a l'avantage de bien se prêter à un enseignement de rodage de début d'année.

⁶ bonne si une introduction sérieuse en mathématiques est possible; sinon c'est différent; on pourra prendre la physique pour support : voir un TPE sur le site de l'IREM de Lorraine; c'est mieux que la touche de la calculatrice de la première STI.

8. La progression.

Considérant un nombre $a > 1$, on **commencera** par définir a^d pour d décimal⁷, comme une fonction croissante vérifiant $a^{d+d'} = a^d \cdot a^{d'}$, ce qui fait revoir utilement la manipulation des puissances.

Ensuite on définira a^x pour x réel, pour construire une fonction croissante telle que $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, donc continue⁸, en montrant que

si $d_n \nearrow x$ et $d'_n \searrow x$, alors a^{d_n} et $a^{d'_n}$ ont même limite⁹, ce qui fait manipuler les limites de suites monotones.

Le comportement établi en $\pm\infty$, on définira la fonction \log_a comme réciproque¹⁰, elle-même croissante, continue, vérifiant $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Ou bien on montrera¹¹ que a^x admet une dérivée en 0 et en tirera¹² que \log_a possède une dérivée en 1 inverse de la précédente, ou bien on l'admettra. Pour que cette dérivée soit 1, il faut alors choisir $a = \lim(1 + 1/n)^n$, d'où la définition de e .

On donnera enfin les dérivées des fonctions \log et \exp et résoudra $x' = ax + b$.

Plus tard, on reprendra la définition du logarithme par quadrature, en vérifiant la compatibilité avec la première définition, pour établir la propriété manquante s'il y a lieu. Cela fera une bonne révision.

9. Le cadre théorique.

L'inconvénient de cette présentation et qu'elle repose sur l'**explicitation** d'un certain nombre de résultats. Il y a par exemple le théorème des valeurs intermédiaires; pour une fonction monotone continue, il n'est quand même pas difficile à démontrer¹³. Il faudra de toute façon parler de ce théorème, lequel est à la base de l'exploitation traditionnelle des tableaux de variation.

Il y a surtout l'explicitation de quelques propriétés des limites, dans le cadre monotone. Par exemple, relier la dérivée du logarithme à celle de l'exponentielle n'est pas très intuitif. Donner l'argument de symétrie des graphes est sans doute nécessaire pour entraîner l'adhésion de la plupart des élèves.

La présentation de Jean-Pierre Demailly évite ces deux difficultés. Le logarithme de a est défini par la dérivée en 0 de a^x . Cependant l'enchaînement des propriétés est assez subtil.

⁷ plutôt que rationnel, car les nombres réels sont à voir comme des développements décimaux illimités.

⁸ en se ramenant en 0; comme $a^x = (a^{x/2})^2$, la limite l à gauche ou à droite vérifie $l^2 = l$; ce n'est pas 0 donc c'est 1.

⁹ considérant $c_n = d'_n - d_n \searrow 0$, on a $a^{c_n} \rightarrow l'/l$; comme $a^{c_n} = (a^{c_n/2})^2$, la limite de a^{c_n} est 1; d'où $l' = l$; ainsi la limite ne dépend pas du choix de d_n ou d'_n .

¹⁰ i.e. $y = a^x$ si et seulement si $y > 0$ et $x = \log_a y$; on suppose le théorème des valeurs intermédiaires établi pour une fonction croissante continue.

¹¹ en montrant la croissance de $\frac{a^x-1}{x}$ pour $x > 0$, se ramenant à x décimal puis entier, et y comparant $\frac{a^{-x}-1}{-x}$.

¹² si l, k sont les dérivées respectives de a^x et \log_a en 0 et 1, on a $\frac{a^x-1}{x} \leq 1/k$ pour $x > 0$ et $\frac{y-1}{\log_a y} \leq l$ pour $y > 1$; à la limite $l = 1/k$; de plus $(1 + 1/n)^n \rightarrow a^k$.

¹³ si l'on construit une solution de $f(x) = 0$ en "calculant" successivement ses décimales, comme pour "démontrer" l'existence de la limite d'une suite croissante majorée.

Dans une étape transitoire, pour laquelle on ne voudrait pas bouleverser trop profondément le programme de terminale, ce raffinement n'est peut-être pas nécessaire.

Toute cette construction n'a d'intérêt que si l'on a mis l'accent sur les limites monotones. Ou bien il s'agira de limites de suites ou de limites à gauche et à droite en un point.

Au départ les nombres réels sont des développements décimaux illimités et la question des représentations multiples a été réglée.

10. Deux écueils.

Cependant il convient alors d'être très soigneux sur la définition des limites monotones en évitant notamment deux écueils.

D'abord on se gardera de toute allusion aux **bornes** supérieures ou inférieures en privilégiant l'idée de limite. Pour une suite croissante x_n ,

ou bien, étant donné m quelconque, le terme général x_n finit par dépasser m pour un certain rang et alors $x_n \geq m$ pour tous les rangs qui suivent, et on dit que x_n tend vers $+\infty$ ou admet la limite $+\infty$,

ou bien il existe un unique nombre $\lim x_n$, sa limite, qui possède les propriétés :

(i) *tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à la limite* $\lim x_n$,

(ii) étant donné $m < \lim x_n$ quelconque, le terme général x_n finit par dépasser m pour un certain rang et alors $x_n \geq m$ pour tous les rangs qui suivent.

Cette dernière propriété s'exprime encore sous la forme : si $x_n \leq m$ pour tout n , alors $\lim x_n \leq m$; mais plutôt que d'y voir un plus petit majorant, on préférera y voir un passage à la limite dans une inégalité large.

L'autre écueil se trouve dans l'existence **automatique** de limites. Pour éviter l'écriture réflexive et ravageuse $\lim \dots = \dots$, on réservera l'emploi du symbole \lim aux passages à la limite qu'on fera précéder d'un argument de monotonie. Par exemple : on a

$$x_n \leq y_n$$

pour tout n . Comme les suites sont *monotones*, il vient

$$\lim x_n \leq \lim y_n$$

à la limite. Mieux encore on interdira tout simplement l'usage du symbole.

Il resterait à interroger les didacticiens pour savoir ce qui est raisonnable, ce qui pourrait donner lieu à un débat scientifique, dans le strict respect des intentions ci-dessus.

Maintenant la **monotonie locale** est bien adaptée à la limite d'une puissance, d'un inverse, voire d'une composée¹⁴; pour l'exponentielle et le logarithme cela suffit.

Les fonctions élémentaires rencontrées au lycée sont toutes naturellement localement monotones. En revanche il n'est pas possible de prédire à ce niveau la monotonie locale d'une somme ou d'un produit, par exemple d'un polynôme, même si l'on verra plus tard que c'est le cas, parce qu'il s'agit de fonctions analytiques auxquelles s'applique le théorème des zéros isolés.

¹⁴ mais pour la limite en 0 à droite de a^x on peut supposer par l'absurde $a^x \geq 1 + b$ où $b > 0$, d'où $a^x = (a^{x/n})^n \geq nb$.

Pour traiter les limites quelconques on commencera par définir $o(1)$ et pour cela on se ramènera au cas décroissant. On décidera que converge vers 0 ce qui est **majoré** en valeur absolue par une suite ou fonction qui converge vers 0 **en décroissant**.

La converge vers l est ramenée à celle en 0. On peut suivre ce principe en première pour calculer des dérivées.

Au passage on notera que le théorème des gendarmes peut être ignoré. Il est très spécifique du cas réel en effet.

11. Petite conclusion.

On retiendrait quelques **principes**;

- respect, pour une problématique donnée, de l'unité de temps;
- stratégie mettant en parallèle une approche formalisée et une approche heuristique;
- concentration sur un aspect : par exemple les limites monotones.

Maintenant, si l'on devait placer cette réflexion dans une **réorganisation des filières**, où les options de spécialité pourraient être intégrées à l'enseignement principal, l'approche formalisée serait réservée à la filière maths-physique. Le parallélisme des deux approches permettrait aussi de pallier les inconvénients des options de spécialité en attendant.

Le texte qui précède a été rédigé par Jean-Pierre Ferrier. Il résume diverses réflexions auxquelles ont participé, ces dernières années, Bernard André, Laure Dumoulin, Pierre Marchal, Christel Pravda-Starov et lui-même.

Références

J.-P. Demailly, document de travail, 2 p

G. Lion, *Sur différentes manières d'introduire la fonction exponentielle*, document de travail, 3 p

D. Perrin, *Une définition de la fonction exponentielle dans l'esprit des nouveaux programmes*, extrait de polycopié, 5 p

A. Warusfel, *La radioactivité, un mathématicien, un physicien et un probabiliste aux prises avec la radioactivité*, RMS, année 114, 1, 11 p

R. Rolland, *Autour de la présentation de la fonction exponentielle suivant le programme de TS 2002*, document de travail, 22p

Programmes de Terminale S, *document d'accompagnement*