LA NOTION DE FONCTION

Préambule

Rappelons l'objet des fascicules du type de celui-ci. Il s'agit de présenter une perspective pédagogique compatible avec la démarche scientifique. Maintenant qui a la légitimité pour dire ce qui est de la Science et ce qui n'en est pas? Personne assurément. Cependant les positions de l'un ou de l'autre seront d'autant plus légitimes qu'elles auront été mieux expliquées. A ce petit jeu, ce qui nous est montré aujourd'hui dans les orientations des programmes relève plus de l'incantation que de la justification.

Or il est possible de préciser très simplement la question posée. Partons du fait que la Science a pour objet de nous faire comprendre une petite partie du monde, ou, plus modestement encore, de nous en donner l'illusion. Et ajoutons-y le fait que la démarche scientifique procède du discours hypothético-déductif : on fait telle hypothèse, on en déduit telle conclusion. Il est alors clair qu'il faudra respecter les deux principes suivants.

1) On part toujours du monde physique, dans sa réalité et son éventuelle complexité.

2) On dégage à partir de là des concepts sur lesquels le discours hypothético-déductif peut avoir prise.

L'aboutissement du processus conduit à introduire des notions abstraites et à les étudier éventuellement pour elles-mêmes. Cependant leur introduction est une charnière et leur étude une deuxième étape.

Dans chaque fascicule la seconde étape sera donnée en annexe. On peut considérer qu'elle correspond au discours mathématique abouti, lequel est assez bien codifié dans l'ensemble.

C'est la première étape, celle qui correspond au point 2), qui sera l'objet principal du travail. L'annexe sera surtout là pour éviter à ceux qui en connaissent une partie la tentation d'imposer cette connaissance dans la première étape.

Etat des lieux

Nous allons dire un mot des programmes en vigueur en 2004 sur le sujet, ou de ceux qui les ont précédés, sans insister car leur analyse n'est pas notre but. Disons que nous n'y faisons allusion que pour donner un exemple de ce qu'il ne faut pas faire, chose qui peut être utile à l'occasion.

Compte tenu de ce qui a été dit précédemment, il y a deux attitudes absolument contraires à la Science, qui sont

- l'utilitarisme

- et le dogmatisme.

L'utilitarisme est le souci de répondre en priorité à la dernière mode, voire à un besoin légitime, mais sans prendre le moindre recul, sans chercher la compréhension intime des choses. C'est ainsi qu'on délaissera la lecture de Victor hugo pour "lire le journal, lire la radio, lire la télé". L'importance donnée aujourd'hui aux pourcentages, alors qu'il n'y a rien à comprendre dans les pourcentages et tout dans les fractions, relève aussi de cet utilitarisme. De façon générale on perd de vue le discours hypothético-déductif qui caractérise la Science. On ne justifie plus rien, comme c'est le cas lorsqu'on observe passivement la fluctuation d'un échantillon en seconde.

Le dogmatisme est cette apparence de rigueur qu'on impose souvent dans l'enseignement au point d'interdire telle écriture, telle formulation, telle démarche au profit d'un choix appuyé par un argument d'autorité. Il s'accorde parfaitement à l'utilitarisme parce qu'il court-circuite aussi bien les justifications.

Cependant il contredit la démarche scientifique d'une autre façon, partant de "modèles" imposés et non plus du monde réel. Ce dernier ne servira plus que de décoration plaquée a posteriori sans qu'il soit jugé nécessaire d'établir l'adéquation du modèle. C'est ainsi qu'on demandera à la nature d'être en prise avec les mathématiques enseignées et non, comme on l'aurait cru, l'inverse.

Voici quelques éléments des programmes concernant les fonctions.

a) En sixième, on considère des *graphiques* et on introduit la locution "en fonction de".

b) En troisième, on donne les exemples de fonctions *linéaires* et *affines* et on introduit la notation $f(x)$.

c) En seconde, on prend comme exemples des *tableaux de valeurs*, des *courbes*, des *expressions* et on caractérise les fonctions affines par le fait que "l'accroissement de la fonction est proportionnel à celui de la variable".

etc.

Ce qui n'est pas raisonnable dans ces programmes est d'avoir fait, a priori, le choix d'amener le formalisme fonctionnel très tôt, sans se demander si l'élève a eu l'occasion de rencontrer suffisamment d'exemples, de manipuler dans suffisamment de situations. Tout se passe comme si le seul point important était que l'élève ait *entendu parler* des fonctions de façon savante, qu'il y ait compris quelque chose ou rien.

Ce choix a pour conséquence de privilégier tout ce qui peut "préparer" l'élève au discours et aux notations préconisés, en prenant le risque d'appauvrir singulièrement le champ des exemples voire à trahir le concept de fonction.

Où a-t-on besoin de la notion de fonction?

Avant de chercher plus loin, tentons de cerner à quelles occasions, en restant au niveau du collège et du lycée, la notion de fonction pourrait être utile.

On va donner tout de suite quelques exemples où elle ne l'est pas.

Considérons un **parcours de randonnée** tel que celui de la randonnée Meylan-Chartreuse(1). Voici comment on décrira les variations. Partant de Meylan, au km 0, la route s'élève lentement jusqu'aux Eymes, au km 16, puis resdescend un peu jusqu'au km 23, pour s'élever doucement puis fortement jusqu'au col de Marcieu, au km 55, où elle atteint son point le plus élevé, redescendre un moment jusqu'au km 58 et monter de nouveau jusqu'à Saint Etienne du Touvet, au km 60 km, et redescendre enfin brutalement vers Meylan.

Point n'est besoin de parler de fonction, de croissance ou décroissance, de maximum. L'importance des dénivelés, la raideur des pentes sont des éléments importants.

Considérons maintenant un **régime fluvial**, en prenant un exemple théorique qui sert d'exercice dans un cours d'hydrologie fluviale(2). Voivi comment on décrira les variations. Le débit diminue légèrement de janvier à février; il augmente très fortement de février à juin, mois au cours duquel il est maximum; ensuite il diminue fortement jusqu'en août, augmente un peu d'août à octobre et diminue encore jusqu'en décembre.

(1) du Club cyclotouriste de Meylan, Isère
(2) du laboratoire d'hydrologie et aménagements, Lausanne

Ici ce qui importe n'est pas de traduire les variations dans un langage pédant. C'est l'interprétation des variations qui compte, comme leur explication par des phénomènes climatiques.

Considérons maintenant un **profil de crête** supposé vu d'assez loin pour ne pas tenir compte de la perspective. On a pris l'exemple de la chaîne des Aravis pour la beauté de l'image, et on va faire comme si la condition demandée était réalisée. Pour déterminer le sommet le plus élevé il n'est pas besoin d'introduire de fonction. Le pic situé à droite est celui-là.

Dans un tel cas la fonction à considérer n'est pas évidente. L'altitude est une fonction de deux variables, qu'on ramène à une seule par projection.

Les exemples que nous avons pris ont un point commun. **Le parcours des valeurs y est explicite**. Dans un tel cas la notion de fonction n'est d'aucune utilité.

Ainsi faudra-t-il se garder d'utiliser des graphiques ou tableaux de valeurs du type de ceux que nous avons considérés pour introduire la notion de fonction. En effet ils ne peuvent servir qu'à en dissuader l'entreprise.

En revanche la notion de fonction peut être intéressante quand le parcours des valeurs n'est pas explicite. Cela arrive souvent dans de petits problèmes d'**optimisation**. On cherchera par exemple à construire une boîte à gâteaux sans couvercle de contenance maximum à partir d'un carré de carton. Il faut introduire une *variable* x qui sera par exemple le côté d'un des quatre carrés enlevés et la *fonction* de x qui sera le volume de la boîte.

Prenons l'exemple d'un obus lancé par un canon en ignorant la résistance de l'air; on cherche à atteindre le point d'impact au sol. Il faut considérer la trajectoire dans son ensemble, et introduire la position comme *fonction* de la *variable* temps. Ensuite on pourra chercher la portée en prenant comme *variable* l'azimuth du canon.

Lorsqu'on s'intéresse à un signal, par exemple un courant électrique par dont on cherche la puissance moyenne, il faudra le considérer aussi comme une *fonction* de la *variable* temps.

Ces nouveaux exemples ont un autre point commun. Ils ne sont pas très élémentaires. Autrement dit on peut se demander si la notion générale de fonction a bien sa place dans l'enseignement secondaire. On pourrait se contenter d'étudier *des* fonctions, comme la fonction homographique, celle du second degré, la fonction exponentielle ou logarithme, les fonctions trigonométriques ...

Une question se pose. Faut-il parler de fonction à propos des dépendances linéaires et affines? S'il s'agit de parler de la fonction $y = ax$ ou $y = ax + b$, il n'y a pas grand mal. Evidemment les termes de fonction et d'équation vont paraître une redondance. Ce n'est pas très grave. On parle de *fonction* quand on fait varier x, quand on en fait une *variable*. Auparavant ce n'était qu'une équation.

Où a-t-on besoin de la notation fonctionnelle?

On va tout de suite écarter un domaine où l'utilisation de la notation $f(x)$ se justifierait; c'est celui de l'algorithmique. De façon générale l'outil informatique travaille sur des représentations formalisées des objets mathématiques; c'est aussi le cas pour les fonctions.

Dans tel langage impératif, on utilisera la notation $f(x)$ pour déclarer ou appeler une fonction, mais on la définira par $f :=$. Dans un langage fonctionnel, on définira la fonction directement par $f(x) :=$ ou quelque chose de semblable.

Certes l'algorithmique pourrait déjà éclairer la notion de variable. Cependant il est inutile de poursuivre la réflexion. Son enseignement est exclu du lycée et le sera sans doute encore longtemps parce que les informaticiens le souhaitent ainsi.

A l'inverse la notation $f(x)$ n'a pas de place en physique. On écrira

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

ou

$$v = A\cos(\omega t - \phi)$$

sans utiliser ce formalisme. Par ailleurs, quand on écrit $V = RI$, qui est fonction de quoi?

On va donc chercher à l'intérieur du champ des mathématiques. Les fonctions usuelles qui ont un nom, comme les fonctions exponentielle, logarithme et trigonométriques n'utilisent pas la notation fonctionnelle. On écrit

$$\cos 2 \qquad \cos\frac{\pi}{6} \qquad e^{2x} \qquad \log 3$$

par exemple, sans parenthèses en général. L'élève verra d'abord des formules et il n'aura pas vraiment tort.

Quand on considère la fonction y qui à x associe

$$xe^x - 1$$

vaut-il mieux demander "$y(3)$" ou bien "la valeur de y pour $x = 3$"? Il semblerait qu'on apprenne d'abord à l'élève à traduire la première formulation en la seconde. N'aurait-il pas pu se contenter de cette dernière?

En fait il apparaît que la notation fonctionnelle est surtout pratique pour rédiger les énoncés. Demander le calcul de $y(2)$, $y(3)$, $y(4)$ demande moins d'effort rédactionnel que celui de y pour les valeurs 2, 3 et 4 de x. La notation $f(x)$ a beaucoup de mérites et celui qui la maîtrise peut difficilement s'en passer. Cependant est-on sûr que le sens qu'y met un mathématicien expérimenté est le même que celui qu'y met l'élève? N'y a-t-il pas le risque de proposer des présentations d'une difficulté dépassant largement les capacités des élèves?

Prenons l'exemple de la **radioactivité**. Notant $N(t)$ le nombre de noyaux au temps t, la proportionnalité (qui résulte de l'absence d'interactions) et l'invariance dans le temps (qui résulte du non vieillissement) conduisent, aussi bien dans le modèle macroscopique que microscopique, à l'équation fonctionnelle

$$N(t) - N(t+u) = k(u)N(t) \ .$$

Elle signifie que le nombre de noyaux désintégré entre t et $t+u$, rapporté à $N(t)$, ne dépend que de u. On en déduit l'équation fonctionnelle

$$N(0)N(t+u) = N(t)N(u) \ .$$

Est-ce que ceci peut avoir un sens pour un élève moyen de terminale? On peut en douter.

Mais la suite est facile. **Supposons le problème résolu** avec $N(0) \neq 0$ et une fonction N monotone. Normalisant par $N(t) = N(0)x(t)$, il vient

$$x(t+u) = x(t)x(u) \ .$$

On suppose x croissante. Posant $e = x(1)$, on a

$$x(r) = e^r = (e^p)^{1/q}$$

pour $r = p/q$ rationnel. Ensuite

$$x(t) = \lim_{r_n \to t} e^{r_n}$$

pour une suite croissante r_n vers t de nombres rationnels *. D'où l'unicité pour e donné. Ensuite on détermine $e = \lim(1+1/n)^n$ en exigeant la pente 1 en 0.

Il y a quelques décennies on aurait dit ceci. J'avais N_0 noyaux au temps 0; j'ai N noyaux au temps t et N' au temps t'; j'aurai N'' noyaux au temps $t'' = t + t'$. Mon hypothèse se traduit par la proportionnalité

$$\frac{N - N''}{N} = \frac{N_0 - N'}{N'}$$

car il s'agit de variations relatives au cours d'un même intervalle de temps t'. J'en déduit

$$N_0 N'' = N N'$$

aussitôt. Ce n'est pas si simple non plus, mais au moins la difficulté est mieux cernée. Cependant la suite est plus délicate.

La conclusion est assez terrible. Quand la notation fonctionnelle est vraiment utile, on a largement dépassé le niveau du lycée.

---

* On se ramène à $e^{1/p} \to 1$ quand p entier tend vers l'infini. Par l'absurde si $e^{1/p} \geq 1 + \epsilon$ pour tout un $\epsilon > 0$, alors $e \geq (1+\epsilon)^p \geq p\epsilon$.

Manipuler des fonctions

C'est le titre qui a été donné à un atelier de la régionale de l'APMEP du 24 mars dernier, atelier présenté par le groupe des **lycées professionnels**. On peut dire que ce qui a été montré à cette occasion, à des niveaux allant du collège au lycée, est tout à fait conforme à la démarche scientifique.

D'abord on partait du monde physique, que ce soit pour peser des fils de cuivre de longueur variable ou un récipient qu'on remplissait à l'aide d'une dosette “lorraine”, ou encore pour travailler sur la parabole, à partir d'une définition géométrique c'est-à-dire encore une fois physique.

Ensuite on donnait du sens au concept de fonction, qui est “une grandeur qui dépend d'une autre” comme il a été dit. En veillant à ce que le concept préexiste à ses représentations. La masse du fil dépend de sa longueur. Le poids du récipent dépend de la quantité d'eau qu'on y a versé. L'ordonnée d'un point de la parabole dépend de son abscisse ... Cela n'enlève rien aux tableaux de valeurs et aux représentations graphiques qu'on va construire dans ces exemples. Les représentations graphiques fournissent les images mentales indispensables à la compréhension des fonctions. En revanche un graphique ne définit pas une fonction. Un tableau de valeurs non plus, sauf dans le cas d'ensembles finis.

Enfin on se plaçait de façon privilégiée dans des situations reproductibles, ce qui est la condition sine qua non pour qu'il y ait démarche scientifique.

En revanche on noterait qu'un tableau des températures en un lieu donné en fonction des jours de l'année présente sans doute de l'intérêt pour la géographe, mais qu'il n'a pas de valeur scientifique. Sauf pour analyser et expliquer les tendances, voire pour confronter le tableau aux valeurs tirées d'un modèle. Mais d'une part cela dépasserait nos prétentions. D'autre part ce ne seraient pas les valeurs précises du tableau qui nous importeraient. On serait loin d'une fonction.

Par ailleurs la façon dont les exemples étaient traités démontrait un souci d'éviter tout artifice qui nous éloignerait de la compréhension directe du monde physique. La pesée des fils de cuivre s'effectuait sur une balance rustique faite de fils de fer et de fonds de boîte en aluminium. On devait traduire le résultat sous forme décimale. Ensuite seulement, pour le bocal rempli de liquide, on utilisait une balance numérique.

De même préférait-on la masse que l'on sent et la longueur que l'on voit à une tension ou une intensité qui restent mystérieuses, surtout lorsqu'on les mesure avec des instruments numériques.

Dans les exemples géométriques on commençait par calculer quelques valeurs à la main avant d'aller chercher Cabri géomètre pour dresser éventuellement un tableau plus complet.

Le détail doit être présenté sur le site de l'IREM.

Etudier une fonction

On va brièvement reprendre les étapes usuelles de l'étude d'une fonction dans l'enseignement qu'on délivrait encore il y a quelques années.

Imaginons une situation, géométrique ou plus généralement physique, qui fasse apparaître une grandeur y en fonction d'une autre x, autrement dit qui mette en évidence une fonction.

Si on le peut, on exprimera y en fonction de x au moyen du symbolisme précédemment acquis. Pour cela l'on s'appuiera par exemple sur des théorèmes géométriques, ou bien sur des hypothèses inspirées par la physique.

Ensuite on étudiera les variations de la fonction. Au besoin on calculera une dérivée, si l'on dispose bien sûr de cet outil. Le résultat sera inscrit dans un tableau comme c'est l'usage. Cette mise sous forme d'un tableau a le mérite d'être bien codifiée. On ne peut cependant pas dire qu'elle présente un intérêt mathématique éminent.

Dans certains cas on ne peut pas aboutir à une expression. Il en est ainsi lorsqu'on introduit une fonction essentiellement nouvelle. A ce moment on doit raisonner sur la définition elle-même pour obtenir les variations.

Partant des variations, inscrites ou non dans un tableau, complétées au besoin par des études complémentaires, on donnera l'allure de la représentation graphique. Le but n'a jamais été de se servir de cette courbe pour y effectuer des calculs, de même qu'on ne se sert pas d'une figure géométrique pour y mesurer des longueurs ou des angles. La représentation graphique réalise une synthèse visuelle des propriétés de la fonction. Elle peut, au même titre que la figure géométrique, servir de support à l'intuition sans être en elle-même un moyen de démonstration.

Dessiner à la main une courbe presque exacte a pu être un objectif dans le passé pour les ingénieurs, mais cela a toujours été un exercice dénué de tout rôle formateur. Aujourd'hui les ordinateurs nous libèrent de certaines tâches répétitives et fastidieuses, mais cela ne devrait pas avoir d'incidence sur la formation. Seul le travail des ingénieurs est radicalement changé.

On peut quand même se demander s'il est intéressant d'obtenir, sans appui extérieur, l'allure générale. La réponse est oui et elle tient en plusieurs points. Cela indépendamment du fait qu'il n'y a pas de concurrence avec les calculatrices graphiques. Ces dernières sont peu à l'aise pour faire apparaître les éléments importants.

D'abord la seule façon de mémoriser des images aussi simples que les variations du sinus, son allure au voisinage de zéro ... est d'avoir eu à construire des courbes soi-même. On constate aujourd'hui chez les étudiants une incapacité totale à interpréter une expression, à déceler la présence d'une singularité due à un dénominateur qui s'annule, à voir d'un coup d'œil si une fonction simple est infiniment grande ou petite en 0 ou à l'infini. Le fait de ne plus avoir à construire de représentations graphiques en est certainement la cause principale.

Ensuite, si l'on veut, dans l'esprit utilitariste actuel, apprendre aux élèves à lire des graphiques, la meilleure chose que l'on puisse faire est de leur apprendre à en produire. De même que l'on ne peut pas dissocier la lecture intelligente de la composition de textes construits. La lecture des graphiques pourrait être largement un objectif d'autres disciplines. Leur production ne peut pas trouver meilleur cadre que les mathématiques. D'ailleurs la lecture intelligente d'un graphique ne consiste pas à dire que "la fonction est croissante entre a et b" mais, par exemple, que telle grandeur croît entre les temps t_0 et t_1 et qu'on reconnaît telle influence. Ce dernier discours est d'ailleurs bien plus conforme à la Science en général et aux mathématiques en particulier. Les caractéristiques du graphique sont le résultat de phénomènes primordiaux et non pas leur origine.

Cela ne signifie pas qu'une activité d'interprétation de graphique soit à exclure définitivement du cours de mathématiques. Mais une telle activité ne peut être que complémentaire. Une question comme "à quelle fonction (d'une liste donnée) correspond cette représentation graphique" amène à des aller-retours entre fonctions et graphique. On ne commence pas par essayer de tout tirer du graphique avant de regarder les fonctions.

En revanche on ne peut pas faire de la lecture de graphiques le centre de l'étude des fonctions. Il faut bien reconnaître, hélas, que c'est un peu la mode. Il y a plusieurs raisons, toutes aussi malheureuses les unes que les autres.

Il y a l'utilitarisme dont on a parlé, lequel va l'encontre de l'utilité puisqu'il conduit à utiliser une partie importante du temps accordé aux mathématiques à des sujets qui auraient une place plus naturelle ailleurs.

Il y a surtout l'utilisation imposée des calculatrices. Ces dernières produisent une représentation graphique sans effort lorsqu'on introduit une expression, simple ou complexe. Le résultat n'est pas toujours à la hauteur? Peu importe. Esclave pour esclave, on passera le temps qu'il faut à discuter du choix des limites. Finalement on n'ose plus poser les questions dans le bon ordre. On arrive ainsi à proposer qu'un graphique puisse *définir* une fonction, ce qui est proprement monstrueux. On va même jusqu'à demander de chercher sur le graphique l'ensemble de définition, alors que ce dernier est constitutif de la donnée de la fonction. D'ailleurs lorsqu'un graphique réaliste est utile à un mathématicien qui n'a plus besoin d'apprendre ce qu'est une fonction, dans une situation sans rapport avec l'apprentissage, il ne lui paraît pas déshonorant de faire appel à un calculateur graphique. Cependant il ne sera absolument pas gêné de n'avoir qu'une partie du graphe. Il n'attendra pas du dessin qu'il l'éclaire sur l'ensemble de définition.

Un livre comme celui de Frédéric Pham sur les "fonctions d'une ou deux variables" met l'accent sur les dessins. Cependant son leitmotiv "DVI" signifie "dessiner, voir, interpréter" et l'ordre n'est pas innocent. L'élève commence par dessiner, ce qui fait de lui un auteur, avant de chercher à voir et interpréter d'autres dessins. Sans doute est-ce en cela que "ce n'est pas des maths" car "il faut réfléchir" au lieu d'observer passivement ce que d'autres auront réalisé.

Dans le même ouvrage on constatera d'ailleurs que les fonctions considérées préexistent aux dessins. C'est le cas pour la population "hobbit" qui double en un siècle; on demande de choisir la figure qui convient. C'est aussi le cas pour les "fonctions" d'une variable des anciens géomètres qui étaient les fonctions puissances. C'est encore le cas pour "le train qui ralentit" dont la vitesse est proportionnelle à la distance qui le sépare de l'arrivée, ou pour le point qui se déplace dans un plan muni d'une origine O de façon que sa vitesse angulaire soit constante et sa vitesse radiale proportionnelle à la distance à O.

Il y a pas mal d'analogies entre les graphiques de fonctions et les figures des problèmes de géométrie. Le premier trait est une évidence. Les élèves, comme les professeurs eux-mêmes, en produisent trop peu. On a dit que cela aboutissait à un déficit grave en images mentales. L'abondance de graphiques et figures dont les ouvrages sont pourvus n'y change rien. En fait elle aurait plutôt tendance à dissuader d'en faire par soi-même. Les exercices donnent le graphique ou la figure là où il aurait fallu les demander.

Le second trait est un paradoxe. Alors qu'on a tout fait pour que les élèves ne se construisent pas d'images mentales, on se sert du visuel comme élément de définition. On définit une fonction par un graphique, une figure par un dessin.

On aura compris que ce qu'on vient de dire n'est pas pour discréditer l'activité de dessin, bien au contraire. Là encore, c'est comme en géométrie. Si je pense "soit un triangle ABC", je gribouille immédiatement un triangle sur le papier. Si je pense "soit une fonction f", je trace des axes sommaires et un bout de graphe. On notera au passage, dans les deux cas, l'avantage qu'il y a à disposer de la technologie papier-crayon ou tableau-craie plutôt que d'ordinateurs et de logiciels.

La notation $f(x)$; une difficulté

La notation $f(x)$ n'a rien d'indispensable pour étudier des fonctions particulières. Etudier la fonction

$$y = \frac{2x^3 + 3}{x^2 + 1}$$

peut se faire sans avoir à utiliser cette notation. On demandera de calculer les valeurs de y pour $x = 0$ et pour $x = 1$. On demandera encore de calculer la dérivée

$$\frac{dy}{dx}$$

et les valeurs de cette dernière pour telle valeur de x. On demandera de comparer y avec

$$z = 2x$$

etc.

On s'aperçoit que la notation $f(x)$ est apparue pour discuter de l'étude d'une fonction en général. On introduira ainsi une fonction

$$y = f(x)\ .$$

Cependant le signe f restera longtemps peu utilisé; il résume le fait que y est une fonction de x. Si l'on note dy/dx la dérivée, il n'apparaît pas. Cet usage est toujours en vigueur en mécanique et en physique.

En fait la notation $f(x)$ présente une vraie difficulté pour les élèves. D'abord certains seront tentés d'y voir un produit. N'a-t-on pas appris que

$$f(x+1) = fx + f$$

en calcul algébrique?

La difficulté représentée par $f(x) = \cdots$ par comparaison avec $y = \cdots$ est peut-être du même ordre que celle que représente l'écriture

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

par comparaison avec l'écriture

$$x_1 + \cdots + x_n$$

qui se comprend plus directement.

Il serait intéressant de pouvoir disposer d'une analyse didactique de ces difficultés. A condition que ce soit une analyse non orientée, pas une recherche désespérée de conditions amenant à la compréhension de tel formalisme, laquelle serait un impératif incontournable de l'institution.

Maintenant la notation $f(x)$, qui permet de substituer à x une autre expression et de considérer aussi bien

$f(3)$

$f(2u+1)$

$f(2x+1)$

n'est pas aussi caractéristique qu'on voudrait parfois le croire des fonctions de l'analyse.

Si p est un polynôme en l'indéterminée X sur l'anneau commutatif unitaire A, on définit

$p(x)$

pour un élément x d'une algèbre unitaire sur A. En particulier

$p = p(X)$.

Le formalisme lié à la notation $f(x)$ pourrait être justifié par d'autres considérations que l'Analyse. Cependant il ne semble pas qu'il y ait l'occasion de l'utiliser en algèbre au lycée.

En fait, comme on l'a dit, la seule utilisation non savante de ce formalisme se trouve en algorithmique. De façon générale les langages informatiques, impératifs comme Pascal ou fonctionnels, exigent le respect de conventions précises dont le discours mathématique peut se passer. Dans une stratégie qui donnerait une vraie place à l'algorithmique et qui ne se contenterait pas d'une vague allusion à la démarche algorithmique, on trouverait sans doute une justification. En même temps l'algorithmique fournit d'autres illustrations de la notion de variable et de fonction.

La question de la pertinence de l'introduction de l'algorithmique est posé. Si l'on veut partir de ce qui est concret on se contentera d'un langage impératif. L'idée de procédure à paramètre y remplace celle de grandeur qui dépend d'une autre. Mais la transition est possible. Ecrire des programmes serait une autre façon de préparer au formalisme mathématique qu'on donne en annexe. Ce dernier maîtrisé, on passerait éventuellement à un langage fonctionnel.

La notation $y = \cdots$; une autre difficulté

On suppose que l'on doive considérer une fonction tirée d'un problème géométrique ou plus généralement physique. L'utilisation de la notation $f(x)$ est alors peu naturelle. On se trouve très souvent dans une situation symétrique où deux grandeurs dépendent l'une de l'autre. Quand le produit de deux longueurs ou que le produit pv est constant, qui dépend de quoi? Introduire des fonctions f et g pour écrire $p = f(v)$ et $v = g(p)$ ne facilite pas beaucoup la compréhension. Cela aboutit par exemple à obscurcir le fait que les dérivées dp/dv et dv/dp sont inverses l'une de l'autre.

L'inconvénient de la notation $f(x)$ ainsi relevé n'est pas, contrairement à ce qu'on a vu précédemment, un obstacle didactique. Il est de nature épistémologique. On le retrouve dans le discours scientifique. Voir l'annexe à ce propos.

En revanche la difficulté que nous allons soulever maintenant est d'ordre didactique. Elle concerne directement l'apprentissage de la notion de fonction. Il ne faudrait cependant pas que ce qu'on va dire suscite le développement d'une ingénierie pédagogique disproportionnée.

La notation concurrente $y = \cdots$ présente l'inconvénient de renvoyer aux coordonnées (x, y) d'un point dans un repère. Confondre une fonction avec sa courbe représentative "dans un repère orthonormé" a pour résultat que $y = \cdots$ est l'équation d'une courbe dans un repère. Cela interdit d'utiliser d'autres lettres que x et y et donc de considérer plus d'une fonction à la fois. Comment écrire alors l'équation d'une asymptote?

En fait le blocage vient d'une confusion, celle entre une courbe géométrique et une représentation graphique de fonction.

Comme nous l'avons dit, produire une **représentation graphique**, est une activité hautement formatrice si l'on veut bien s'en charger sans appel à une assistance électronique. Cependant une telle représentation ne fait partie de l'univers mathématique. Nous verrons plus loin, au moment de poser la définition de référence, que la donnée d'une fonction de E dans F est précisément celle d'un *graphe* abstrait, partie du produit $E \times F$ ayant certaines propriétés. Dans le cas d'une fonction réelle de variable réelle, la représentation graphique est une représentation du graphe. Mais il ne faut pas confondre l'objet abstrait et le dessin.

En revanche une **courbe géométrique** fait partie de l'univers mathématique. Il faut se donner un repère pour obtenir une équation numérique, que ce soit une simple équation $y = \cdots$ ou des équations paramétriques $x = \cdots$, $y = \cdots$. On privilégiera les repères orthonormés, une unité de longueur ayant été choisie. Mais on pourra aussi avoir à considérer d'autres repères, comme pour l'hyperbole. Le changement de repère est géométrique: translations, rotations, affinités sont envisageables.

Noter qu'en principe il n'y a pas de norme dans le plan géométrique, sauf lorsqu'une unité a été choisie. Il va de soi que le choix de l'unité de longueur n'est pas lié aux axes. L'unité et les axes choisis — avec la même unité donc — les coordonnées x, y ont la dimension d'une longueur et sont assimilables à des nombres réels.

Dans le cas de la représentation d'une fonction, on se place dans le produit de deux droites vectorielles (voire affines), l'une correspondant à la variable et l'autre à la fonction. Il n'y a pas de raison pour que les dimensions de la variable et de la fonction soient les mêmes. On les assimilera à des nombres réels en choisissant une unité pour chacune.

Il n'y a plus rien de géométrique. Opérer une rotation ou une affinité sur la représentation n'aurait pas de sens. Comme il faut transcrire la représentation sur le papier ou à l'écran, il faut bien cependant quelques conventions. On choisira des axes perpendiculaires évidemment, sauf indication contraire. Rien n'interdit de réaliser un écran d'ordinateur en parallélogramme mais personne n'y a songé jusqu'ici. On indiquera où placer l'unité sur chaque axe, pour faciliter le travail des élèves, évitant des dessins minuscules ou géants. On pourra même indiquer les limites pour faciliter le centrage.

Celà étant, on doit pouvoir faire profiter la représentation graphique de l'image géométrique, même dans le cas où la fonction ne proviendrait pas de l'équation d'une courbe. Par exemple l'intégrale d'une fonction peut être définie comme une aire. Mais ce n'est pas toujours une aire géométrique. L'intégrale a la dimension produit de celles de la variable et de la fonction. C'est le produit LT d'une longueur par un temps en mécanique. Aussi parler de *courbe représentative* plutôt que de *représentation graphique* est certainement une bonne idée.

La dictinction que nous avons introduite ne doit pas être amplifiée dans l'enseignement, ni même soulevée probablement. En revanche il faudra habituer les élèves à travailler, dans les exercices, avec d'autres lettres que x et y, en prenant des exemples tirés d'un contexte expérimental. Il faudra les habituer aussi à mettre les unités physiques sur les axes et à travailler ainsi directement avec des grandeurs physiques, sans qu'il soit besoin de tout ramener à des nombres.

La notion de variable

On a dit qu'une fonction était une grandeur qui dépendait d'une autre. En mathématiques, où l'on ne travaille en général que sur des grandeurs sans dimension, on dirait aussi que c'est une variable qui dépend d'une autre. La première chose à faire, lorsqu'on parle d'une fonction qui n'est pas sortie d'un contexte, est donc de donner un nom à la variable, qu'on appelait variable libre et un autre à la fonction, qu'on appelait aussi variable liée.

On dira ainsi qu'on considère une *fonction* y de la *variable* x. Qu'est-ce qu'une variable? Mieux vaut ne pas chercher de définition. Rappelons-nous que nous sommes ici avant la charnière de la formalisation. On dégage des notions abstraites, mais très progressivement. Ainsi une variable peut prendre différentes valeurs à l'intérieur d'un intervalle donné.

Donc x est une valeur de l'intervalle considéré qui n'est pas déterminée, et y est la valeur correspondante, qu'on peut encore noter $y(x)$ pour mettre cette correspondance en évidence. Lorsqu'on donne à x une valeur particulière, faisant $x = 1$ par exemple, la valeur correspondante de la fonction est $y(1)$.

De cette façon on utilise concurremment différentes formulations possibles, choisies en fonction des besoins. La question de savoir quelle est celle qui servira à définir abstraitement les fonctions n'a pas à être posée.

Pour résoudre une équation différentielle telle que

$$y'' + y = b$$

où b est une fonction donnée, on commence par résoudre l'équation homogène sous la forme

$$y = A \cos x + B \sin x$$

puis on fait “varier les constantes” en respectant

$$A' \cos x + B' \sin x = 0 \; .$$

Ici on a introduit la variable x. Comment faire autrement sans introduire une lourdeur insupportable dans l'expression?

ANNEXE

Pour connaître les conventions(1) sur lesquelles s'appuient les mathématiciens, bien au-delà de nos frontières, il suffit d'ouvrir le fascicule de résultats(2) de théorie des ensembles du traité de Nicolas Bourbaki(3). On y trouve la référence(4) en la matière, laquelle doit être très scrupuleusement suivie chaque fois qu'on aura précisément besoin d'une référence.

Cela ne signifie pas que l'on doive en toute occasion s'exprimer de la façon indiquée. On verra que cela serait souvent mutilant. Cela signifie seulement que chaque fois qu'il y aura un doute, une ambiguïté quelconque, l'on doit être capable de préciser le discours dans la conformité à la référence.

La règle générale en mathématiques devrait être de permettre une expression souple, avec des variantes choisies pour leur pouvoir particulier d'évocation, fondée sur des notions précises, sans multiplication inutile pour ces dernières. Cela va bien sûr a contrario d'une mode assez répandue dans l'enseignement suivant laquelle on impose une expression rigide fondée sur des notions floues et foisonnantes.

La référence

Applications et fonctions. Les termes d'*application* et de *fonction* sont avant tout parfaitement *synonymes*. La donnée d'une application ou d'une fonction f est la donnée de trois ensembles — un triplet d'ensembles si l'on préfère — qui sont

- un ensemble E de **départ** ou de **définition**,
- un ensemble F d'**arrivée** ou de **valeurs**,
- une partie G de $E \times F$, appelée **graphe**, vérifiant la propriété :

pour tout élément x de E, il existe un unique élément y unique de F tel que (x, y) soit dans G.

---

(1) On se contente ici de décrire des habitudes du monde scientifique, sans la moindre prétention dogmatique ou connotation philosophique.

(2) Ce fascicule a été écrit avant la partie correspondante du traité. Plutôt que d'y exposer des résultats, il fixe, de façon naïve, le vocabulaire. Le traité lui-même part de la mathématique formelle et donne une présentation complète et cohérente.

(3) Il est de bon ton de critiquer Bourbaki aujourd'hui. Certes certains fascicules sont moins réussis que d'autres. D'autre part le système de renvois rend la lecture parfois pénible. Cependant dans l'ensemble, le traité est mieux pensé et écrit que la concurrence.

(4) C'est une référence en matière de conventions. Y adhérer n'a pas plus de valeur que chercher la bonne orthographe ou respecter le code de la route. Cependant il faut bien savoir que les conventions indiquées sont partagées par le monde scientifique aujourd'hui et qu'elles ont des chances de le rester quelque temps.

Pour un élément x dans E l'unique élément y de F ainsi caractérisé est classiquement noté $f(x)$.

On parlera d'une application f de E dans F, ou d'une fonction f définie sur E et à valeurs dans G, ou plus simplement d'une application ou fonction $f : E \to F$.

Retenons que les ensembles de départ et d'arrivée font tous deux partie de la donnée, et que pour tout x dans l'ensemble de départ il existe un unique y dans l'ensemble d'arrivée tel que $y = f(x)$. En particulier une fonction sera bien sûr "partout définie". On notera surtout qu'il ne faut pas oublier l'ensemble d'arrivée. Sinon il n'est pas possible de parler d'application surjective de même que, si l'on oublie l'ensemble de départ, il n'est pas possible de parler d'application injective.

On ne confondra pas l'ensemble des valeurs avec l'*ensemble des valeurs prises*, qui est aussi appelé l'*image*.

Etant données des applications ou fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to G$, on définit leur **composée** $h : E \to G$, notée $g \circ f$ et caractérisée par $h(x) = g(f(x))$. Il est impératif que l'ensemble d'arrivée de f et l'ensemble de départ de g *coïncident*. Une inclusion ne suffit pas. Penser qu'une composée de surjections ou de bijections doit être une sujection ou une bijection.

Etant donnés un ensemble E et une partie F de E, l'application de F dans E qui associe à un élément x de F ce même élément dans E, est appelée **application canonique**, ou injection canonique, de F dans E. Lorsque $F = E$, on parle de l'application identique de E.

N.B. L'adjectif *canonique*([5]) signifie qu'on renvoie à une règle. En l'occurence c'est celle qu'on vient de donner en expliquant quelle image on choisissait pour un élément x de F. Ce n'est pas n'importe quelle injection; c'est celle qu'on a codifié quelquepart.

Si $f : E \to F$ est une bijection, on définit l'application *réciproque* ou *inverse* $g : F \to E$ de f, notée f^{-1} et caractérisée par le fait que $g \circ f$ est l'application identique de E et $f \circ g$ celle de F.

Etant donnée une application $f : E \to F$, on définit encore son extension aux ensembles de parties. Si A est une partie de E, son image $f(A)$ est l'ensemble des éléments y de F de la forme $f(x)$.

Etant donnée une partie B de F, son image réciproque ou inverse $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des éléments x de E tels que $f(x)$ soit dans B. Ainsi, pour x dans E la relation $x \in f^{-1}(B)$ est-elle équivalente à $f(x) \in B$. L'existence d'images réciproques n'a besoin d'aucune propriété; il n'est pas nécessaire que f soit bijective, mais, si elle l'est c'est l'image directe de l'application réciproque.

L'ensemble des applications de E dans F est noté usuellement $\mathcal{F}(E, F)$.

([5]) On utilise aussi l'épithète *naturel*. Ce dernier est lié au langage des catégories.

On utilise de préférence le terme de fonction dans des situations plus spécifiques. On parle par exemple de *fonction numérique* lorsque l'ensemble des valeurs est la droite réelle ou complexe, ou éventuellement une partie des précédentes. Une *fonction réelle de variable réelle* est le plus souvent une application d'un intervalle de $\mathbf{R}$ dans un autre, ce dernier étant couramment $\mathbf{R}$.

Quand on parle d'une application de E *sur* F, on entend que f est surjective. En anglais on dit *onto* au lieu de *to*. Cependant cette convention a un inconvénient; la nuance peut échapper à un lecteur inattentif.

Famille. Au lieu de parler d'une application de E dans F, on peut aussi parler d'une *famille* d'éléments de F **indexée** par E. Cependant, quand on parle de famille, on utilise plutôt des notations particulières. On note ainsi

f_x de préférence à $f(x)$

et

$(f_x)_{x\in E}$ concurremment avec f.

Par exemple, une suite s d'éléments de E *est* une application de $\mathbf{N}$ dans E. On a

$s(n) = s_n$

et

$s = (s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ou $(s_n)_{n\geq 0}$.

Au lieu de $\mathcal{F}(E, F)$, on utilise plutôt la notation F^E, qui est celle d'un produit d'exemplaires de F.

Autres synonymes. Une application $f : E \to F$ *surjective* s'appelle encore une **représentation paramétrique** de F au moyen de E. L'ensemble E est alors appelé **ensemble des paramètres**.

Toujours dans le cas *surjectif*, on parle encore de transformation de E en F.

Application ou fonction restreinte, induite. Considérons une application $f : E \to F$. On définit de nouvelles applications, qui prendront la même valeur que f en chaque élément x concerné.

Par exemple, on peut modifier l'ensemble d'arrivée F en le remplaçant par un ensemble F' contenant l'image de f. Lorsque F' contient F, c'est la composée avec l'injection canonique de F dans F'. Lorsque F' est inclus dans F, c'est un cas particulier de fonction induite dont on parlera plus loin. Souvent cela ne mérite pas d'introduire une notation nouvelle. On dira qu'on considère maintenant f comme à valeurs dans F' par exemple.

On peut modifier E en le remplaçant par une partie E' de E. On parle de *restriction* ou d'application *restreinte* à E'. Ce faisant on ne touche pas à l'ensemble d'arrivée.

On peut encore modifier E et F en les remplaçant par des parties E' et F' des précédents, la partie F' contenant l'image de E'. On parle alors d'application $E' \to F'$ *induite* par f. Il ne faut pas la confondre avec la restriction.

L'usage[6]

Evocation. Les termes d'application et de fonction, synonymes comme on l'a vu, n'ont pas du tout le même pouvoir évocateur.

Une application est une carte. En anglais, on dit *mapping*, du verbe *to map* qui signifie *dresser une carte*, lui-même dérivé du substantif *map*. On applique un rectangle en caoutchouc sur une portion de sphère par exemple.

La définition de référence est assez bien adaptée à l'idée d'application, qui est statique. La symétrie par rapport à une droite est une application du plan dans lui-même. Le point M dont on prend le symétrique est plus quelconque que variable.

Une fonction est au contraire une *variable* qui dépend d'une autre, qui est précisément *fonction* d'une autre. La position d'un mobile est une fonction du temps. La surface d'un parallélogramme qu'on déplie est une fonction de l'angle. La pression d'un gaz dans une pompe est, à température supposée fixe, une fonction du volume qui l'occupe ...

La définition de référence est moins adaptée. Elle ne renvoie pas l'image dynamique qui se cache ici derrière le concept.

Cela ne signifie pas que l'usage traduise fidèlement ces deux aspects. D'ailleurs certaines situations relèvent des deux. On n'est pas obligé de déplier un parallélogramme, ni de mettre le gaz dans une pompe. En fait l'emploi d'un mot plutôt que d'un autre est une affaire d'usage, et chaque spécialité a les siens.

Dans la suite on parlera plus souvent de fonctions, en pensant avant tout à des exemples élémentaires, tels que des fonctions réelles de variables réelles, pour lesquels l'usage en vigueur dans l'enseignement incline à ce choix. D'ailleurs Bourbaki lui-même définit d'abord les fonctions avant d'introduire le terme synonyme d'application.

Fonctions générales. Supposons ici que nous ayons à considérer une fonction indéterminée, par exemple candidate à être la solution d'une équation différentielle.

Dans un contexte géométrique ou physique, en prenant la mécanique à titre d'exemple, on envisagera une variable t et une fonction x de t. Une exposition vivante impose de contrevenir aux règles de référence. On se permettra de noter, par abus de langage, de la même façon la fonction x et sa valeur pour un t indéterminé.

On pourra alors s'exprimer souvent ainsi, supposant les ensembles de départ et d'arrivée définis explicitement par ailleurs ou implicitement par le contexte : considérons une fonction $x = x(t)$ de la variable t.

---

[6] On a mis le terme au singulier. En effet il s'agit moins d'un usage pluriel, codifié en fonction d'un contexte par exemple, que d'un usage souple, dans lequel la référence a évidemment aussi sa place.

Il existe bien sûr une façon pédante d'expliquer qu'on ne contredit pas ainsi la référence. On définirait par exemple t comme l'application identique d'un intervalle I et on interprèterait $x(t)$ comme $x \circ t$. L'égalité $x = x \circ t$ n'est pas discutable. Cependant mieux vaut ne pas y penser. Cela introduirait une lourdeur paralysante, alors qu'on voulait précisément adopter un mode intuitif pour s'exprimer.

On pourra donc dire que $x = x(t)$ est une solution de l'équation différentielle

$$x'' + \omega^2 x = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

sur tel intervalle.

S'il y a une ambiguité on reviendra à la référence. On dira que x est la fonction définie par $x(t) = \cdots$ et cela suffit.

Lorsque les expressions sont compliquées, on écrira souvent x pour $x(t)$. Par exemple on présentera le calcul des variations comme la recherche des extrema d'une expression du type

$$I(x) = \int_a^b F(t, x, x')dt$$

parmi les fonctions $x = x(t)$ telles que ... Ici on n'a même pas écrit $F(t, x(t), x'(t))$.

Pour illustrer notre propos, ouvrons le livre de premier cycle d'Houzel, que l'on ne saurait prendre en défaut, à la page où il traite le mouvement des planètes. Il explique que l'équation (différentielle) du mouvement est donnée par

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{km}{r} = h$$

et qu'on trouve t en fonction de r avant de chercher r en fonction de t. C'est banal. Mais a-t-on réfléchi à la lourdeur qu'aurait engendrée une tentative de présenter les choses en respectant la formulation de référence?

Un tel effort a bien été entrepris dans le livre d'Henri Cartan de calcul différentiel pour présenter les équations différentielles. Le résultat n'est guère probant. Même les plus grands peuvent être mal inspirés à l'occasion.

Dans le même ordre d'idées, Van der Waerden, lequel avec Artin et Noether peut revendiquer une petite paternité dans Bourbaki, écrit dans son livre sur la Statistique mathématique, ce qui suit.

Si une suite de fonctions caractéristiques $\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots$ converge pour tout t vers une limite $\phi(t)$ ...

Il n'a pas peur d'utiliser la lettre t comme variable, puis comme valeur particulière de cette variable, dans la même phrase.

Fonctions particulières, premier usage. Pour introduire une fonction, les régles de référence demandent de respecter la façon de s'exprimer qui suit, à quelques nuances près.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ — ou mieux encore à valeurs réelles — définie par

$$f(x) = \frac{\pi}{3}x^3 .$$

A la rigueur, bien que cela soit moins soigné : on considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par ...

En revanche la notation $x \mapsto \ldots$, surtout si elle figurait sous l'indication $[0, +\infty[\ \to \ \mathbf{R}$, ferait franchement négligé(7). Sur ce point Bourbaki date. Il utilise, rarement et jamais en sous-impression heureusement, la flèche ordinaire pour $x \to f(x)$. Chevalley utilise aussi cette notation à la même période. Ensuite on a inventé la flèche tortillonnée, puis le symbole $\mapsto$. Aujourd'hui le discours soigné(8) n'utilise plus ces flèches.

On ne doit en effet jamais oublier qu'un texte mathématique doit pouvoir être lu(9) à haute voix et compris par des auditeurs qui ne voient pas le texte.

Fonctions particulières, second usage. Maintenant la lettre f n'est pas forcément la plus évocatrice. Si l'on pense au volume v d'un cône à base circulaire d'ouverture $\frac{\pi}{4}$ et de hauteur ou rayon de base x — pour ne pas utiliser h ou r — on écrirait

$$v = \frac{\pi}{3}x^3$$

et on aimerait confondre le volume v lui-même et la fonction ainsi définie.

En pratique, on s'autorisera au besoin le discours suivant, ensembles de départ et d'arrivée étant donnés par ailleurs ou supposés aller de soi : on considère la fonction

$$v = \frac{\pi}{3}x^3$$

qui exprime le volume v en fonction de la valeur commune x de la hauteur et du rayon de base.

La même écriture pourrait être employée pour une égalité, une relation, une équation ... Mais ici rien n'est ambigu puisqu'on a introduit une *fonction*.

---

(7) C'est une question esthétique d'abord. L'écriture sur deux niveaux produit un espacement local des lignes assez désagréable. En même temps il complique la typographie.

(8) On pense à l'écriture de la plupart des grands mathématiciens d'aujourd'hui. Sachant que pour beaucoup, quelqu'un comme Henri Poincaré reste un modèle.

(9) On peut toujours traduire oralement un amas de symboles sous la forme : soit f l'application de E dans F qui à x associe ... mais si l'on écrit comme ce qui précède, il suffit de lire.

Par conséquent, la façon ancienne de s'exprimer au lycée, où on parlait

de la fonction $y = ax^2 + bx + c$,

de la fonction homographique $y = \frac{ax+b}{cx+d}$,

reste valable. Plutôt que d'employer la notation $y(x)$, on préfèrera considérer des valeurs particulières x_1, x_2 de x et les valeurs correspondantes y_1, y_2 de y.

Récemment une émission culturelle de la télévision allemande présentait la fonction exponentielle. On y parlait de la fonction $y = e^x$ et on introduisait des valeurs particulières comme indiqué ci-dessus.

Très sérieusement, dans le livre d'algèbre de Van der Waerden, on peut lire

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \dots \\ &\dots \\ \sigma_n &= x_1 x_2 \cdots x_n . \end{aligned}$$

...
Man nemmt $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ die *elementarsymmetrischen Funktionnnen* von $x_1, \dots, x_n$.

Certes on est entre polynômes, mais justement $P = P(X)$ y est admis.

Même Dixmier, qui est pourtant d'une intransigeance extrême, écrit dans son cours de premier cycle ceci.

Soit

$$y = \frac{(2x-1)^2}{3(x^2+2)^2} \ .$$

$$\frac{y'}{y} = \cdots$$

montrant ainsi que seuls les imbéciles suivent aveuglément les règles.

Fonctions particulières, troisième usage. Par ailleurs, dans un contexte d'exemples mathématiques, il est tout à fait possible de parler simplement de la fonction

$$\frac{\pi}{3} x^3 \ .$$

Il faut bien entendu qu'il n'y ait pas de paramètres jetant la confusion. On aura compris qu'il s'agit de la fonction qui à x asocie $\frac{\pi}{3}x^3$.

Dans un tableau de dérivée, rien n'interdit donc d'écrire

$$(x^3)' = 3x^2$$

sachant que, de toute façon, c'est sous cette forme que les élèves mémoriseront la formule, à moins qu'ils n'aient rien mémorisé du tout.

Le traité de Bourbaki étant, presque dans son entier, une référence, il n'est pas étonnant qu'il suive les règles qu'il a lui-même prescrit. Cependant lorsqu'en marge du discours officiel, il veut donner un exemple pour aider le lecteur à comprendre, il peut lui arriver de s'exprimer plus simplement. C'est ainsi que dans l'admirable livre IV des fondements de l'Analyse qui traite des fonctions d'une variable réelle on peut trouver, sous la plume de Dieudonné lui-même, ce qui suit:

La fonction numérique $\frac{1}{x}$ (définie pour $x \neq 0$) est dérivable en tout point ...

La fonction numérique $|x|$, définie dans $\mathbf{R}$, admet au point $x = 0$ ...

La fonction $x^{1/n}$, réciproque de x^n a pour dérivée $\frac{1}{n}x^{1/n-1}$ en tout point $x > 0$.

La fonction $x^r = (x^{1/q})^p$ admet pour dérivée rx^{r-1} en tout point $x > 0$.

Au point $x = 0$, la fonction $x^{1/3}$ ...

Tout cela en s'arrêtant au milieu de la page 13. Noter surtout le dernier exemple, où x prend la valeur 0 juste avant de devenir la variable. Cela montre à quel point le purisme notationnel est une manifestation de la transposition didactique, laquelle, comme on le sait, trahit le savoir savant.

Le même Dixmier ne fait pas exception quant il écrit dans son cours de premier cycle

... Comme $2e^{-r^2}r$ est la dérivée de $-e^{-r^2}$, ...

cherchant d'abord à se faire comprendre.

Dans une situation intermédiaire en particulier et général, on trouve au hasard des pages du livre d'Hermann Weyl sur les groupes classiques le discours suivant.

Every invariant of a quadratic

$$\sum g_{ik}\xi_i\xi_k$$

in n variables is expressible in terms of the discrimant ...

On est certes dans un contexte plus algébrique, comme celui évoqué précédemment des fonctions symétriques des racines. Cependant on ne peut réduire la notion de fonction à l'analyse réelle ou complexe.

N.B. Une écriture est licite dès que son interprétation est claire. Une écriture est plus licite qu'une autre si ceux qui la comprennent sont plus nombreux, viennent d'horizons plus variés. Les conventions trop hexagonales, ou les néologismes de l'enseignement secondaire ne sont donc pas très licites.

Noter par ailleurs qu'il n'existe pas de formalisme non ambigu par lui-même. C'est le contexte immédiat qui donne le sens.

Par exemple, lorsque Lars Hörmander, dans son livre d'Analyse complexe, introduit un exemple par

The function $M(\zeta) = \cos(2\sqrt{\zeta_1\zeta_2})$ *is entire and of exponential type.*

il faut comprendre qu'il définit une fonction M de $\mathbf{C}^2$ dans $\mathbf{C}$ par

$$M(\zeta) = \cos(2\sqrt{\zeta_1\zeta_2})$$

où ζ_1, ζ_2 sont les coordonnées du point ζ de $\mathbf{C}^2$. En effet le type exponentiel renvoie à des variables complexes et à une fonction holomorphe définie sur un espace $\mathbf{C}^n$ tout entier; l'écriture du membre de droite indique que $n = 2$, le lien entre ζ, ζ_1 et ζ_2 étant évident.

En fait le vrai problème est que la racine carrée complexe $\sqrt{\zeta_1\zeta_2}$ n 'a pas de sens en elle-même et que c'est la parité du cosinus qui l'autorise. En toute rigueur comme on dit, il eût fallu écrire la somme de la série à droite. Ainsi un détenteur de la médaille Fields aurait pu encourir des reproches au lycée ou à l'université. Cela donne à réfléchir quant au bien-fondé de certaines exigences.

Injections, surjections, bijections. Soit f une application de E dans F. En pratique([10]), prouver que f est injective (resp. surjective, bijective) se fait en montrant que pour tout y dans F, l'équation

$$f(x) = y$$

en x, possède au plus une solution (resp. au moins une solution , une solution et une seule) dans E.

N.B. En mathématiques on ne définit pas ce qu'est une équation. On se contente de définir ce qu'on entend par *solution* d'une équation d'un type répertorié. Dans le cas qui nous occupe la réponse est évidente. Ce qu'on vient de dire couvre exactement la même chose que la définition d'une injection, surjection, bijection. Cependant il y a davantage de pouvoir évocateur dans le mot équation.

Noter que, pour une équation différentielle, il y a en général plusieurs notions de solution : solution sur I, solution au voisinage de t_0, solution maximale etc. Là aussi le langage est souple.

([10]) Par exemple pour une application d'une partie de $\mathbf{R}^2$ dans une autre donnée par ses équations.