Actes de l'Université d'été de Saint-Flour
Le calcul sous toutes ses formes
Conférence du 24 août 2005

L'hélice structurale et l'hélice du sens en didactique du calcul

par **Jean-Pierre Ferrier**
professeur à l'université Henri Poincaré
IREM de Lorraine
GRIP[1]

On présente, pour un sujet donné, le cursus des études mathématiques, de l'école élémentaire à l'université, comme suivant une hélice qui s'élève en même temps que le degré de structuralisme, hélice qui peut repasser au-dessus du point de départ. Elle se double d'une hélice du sens, dans laquelle les niveaux inférieurs éclairent les niveaux supérieurs. Toute stratégie pédagogique doit tenir compte de ces deux hélices.

On donne, en matière de calcul, des exemples de ce schéma, dont l'un à propos du calcul sur les nombres et l'autre à propos du calcul différentiel. Dans les deux cas on montre que les programmes ne respectent pas les principes de parcours énoncés et restent influencés par des transpositions didactiques horizontales qui empêchent que s'amorce dans de bonnes conditions la construction du sens chez l'élève.

Note préalable. Figurent quelques passages dans le texte qui ne seront pas compris par tous les collègues professeurs des écoles, des collèges ou des lycées. Ils contiennent des termes barbares dont chacun découvrira aussitôt le caractère. Il n'aurait pas été possible d'expliquer chacun des termes considérés sans déborder très largement du cadre de cette université d'été. Surtout se lancer dans des explications aurait été non seulement inutile mais nuisible. En effet, comme on le redira en détail, les considérations en question, si elles permettent de situer la stratégie d'enseignement de l'école au lycée dans une perspective plus vaste, n'auront aucune traduction possible quant au sens que l'élève est censé trouver dans ce qu'on lui enseigne, et ne devraient pas en avoir dans l'orientation de la démarche pédagogique de son professeur.

Si l'on a fait figurer ces passages, c'est précisément pour que chacun sache ce qu'il pourra ignorer en toute quiétude et sans le moindre complexe. De même qu'il devra ignorer tout ce qui ressemble de près ou de loin, et d'ailleurs en moins bien et en beaucoup plus pédant, aux considérations incriminées. Par ailleurs il convenait aussi que ceux qui ont la culture correspondante, ou qui auraient suffisamment de temps libre pour y investir, puissent vérifier que les assertions de l'auteur sont fondées, même si elles peuvent, voire doivent, être discutées et critiquées.

Avant de lire le contenu de ce texte, le lecteur aura peut-être lu le texte de la conférence, richement documentée, d'André Pressiat. Il pourra avoir parfois l'impression de deux discours contradictoires et devra dépasser cette impression pour

[1] Le GRIP (Groupe de réflexion sur l'enseignement de mathématiques) est une association; l'exposé intègre aussi un apport de l'IUFM de Lorraine.

en comprendre la complémentarité. Entre les deux discours il n'y a pas de véritable différence d'appréciation, ce qui serait malgré tout parfaitement légitime, mais une différence d'angle de vue.

Pour finir il ne faudra pas chercher dans ce texte de recette directe pour l'enseignement à quelque niveau que ce soit. L'intention de l'auteur n'est pas de donner des conseils pédagogiques précis, notamment pour l'enseignement élémentaire. Le texte, comme on l'a dit, est une mise en perspective, parfois critique, de l'enseignement d'aujourd'hui et de celui d'hier. On se situe donc en amont des choix qui ont pu être faits, présentant ce qui aurait pu être une réflexion préalable à ces choix si elle n'intervenait pas a posteriori.

Par ailleurs la présente conférence s'appuie sur les travaux du groupe “lycée” de l'IREM de Lorraine de ces dernières années, auquel ont participé Bernard André, Laure Dumoulin, Gérard Eguether, Christel Pravda-Starov. Elle est aussi inspirée par les débats tenus au sein de la commission interIREM du second cycle. Pour ce qui est le l'école et du collège, je me suis inspiré des travaux des groupes IREM, comme celui sur “l'oralisation” ou celui sur les “liaisons”, et de la réflexion tenue au sein du Groupe de réflexion interdisciplinaire sur les programmes (GRIP) ainsi que de discussions dans le cadre de l'IUFM de Lorraine avec quelques formateurs PE dont Walter Nurdin. Pour ce qui est du collège et au lycée, j'ai pu puiser aussi dans le travail des groupes de formateurs et de l'IPR.

1. Le structuralisme et les mathématiques.

Si l'on cherche au hasard du réseau une information sur le structuralisme, on y trouve qu'il provient d'un cours de linguistique générale délivré en 1916 par Ferdinand de Saussures, lequel “envisage d'étudier la langue comme un système dans lequel chacun des éléments n'est définissable que par les relations d'équivalence ou d'opposition qu'il entretient avec les autres”.

Les mathématiques sont éminemment structuralistes. Elles progressent par structurations successives. Cependant, même les nombres intuitifs, dont nous verrons qu'il correspondent au premier niveau de l'échelle, ne peuvent se comprendre sans être reliés les uns aux autres par des opérations : 8 c'est aussi $7 + 1$ ou 4×2 etc.

Monter dans le structuralisme en mathématiques se fait en s'intéressant de plus en plus aux structures pour elles-mêmes; donc plus aux seules opérations entre nombres entiers (qui sont au nombre de 5 comme nous le verrons) mais aux opérations dans l'absolu (qui se réduisent à 2).

2. L'hélice structurale.

Nous aurions pu prendre l'exemple de la linguistique, qui est plus profond que ce que les quelques lignes indiquées en début pourraient laisser penser. Cependant, pour un public d'enseignants de mathématiques, il nous a semblé préférable de s'en tenir à leur discipline. Nous commençons par un exemple qui est pris en dehors de la question du calcul, celui de la géométrie [2]

[2] On pourrait aussi donner un exemple d'hélice en didactique des phénomènes aléatoires. Chaque hélice ne fait que décrire une petite partie de la matière enseignée, laquelle peut être vue comme un enchevêtrement d'hélices. Toute stratégie pédagogique se devrait de démêler un bout de cet enchevêtrement en première analyse.

PL1

Lorsqu'on parcourt le cursus que suit un élève à l'école élémentaire, au collège, au lycée, puis, devenu étudiant, à l'université, on s'aperçoit souvent que les questions abordées font un retour sur elles-mêmes. C'est ainsi qu'un élève de 1950 commence par étudier au collège la géométrie du triangle, avec les longueurs, les angles, les aires, pour découvrir en fin de lycée les transformations géométriques, et aborder à l'université les groupes, les homorphismes et les invariants.

Or, comme le souligne volontiers Daniel Perrin dans l'esprit des travaux de la CREM, les invariants polynomiaux du groupe spécial linéaire et de celui des isométries sont tous construits à partir de l'aire pour le premier et à partir des longueur et angle pour le second. Autrement dit l'élève de 1950 retrouvait en fin de parcours les sujets qu'il avait étudiés au début. Il a l'impression d'un parcours circulaire.

Dans la réalité ses études s'élèvent en permanence dans le structuralisme de sorte qu'elles parcourent une hélice. C'est l'*hélice structurale* qu'on trouvera sur la planche 1. Elles repassent au dessus des sujets qu'elles avaient abordés en début mais elles ont gagné plusieurs hauteurs en fin de compte.

Une première élévation consiste à remplacer la superposition d'un triangle sur un autre par un déplacement de tout le plan (ou de l'espace) en entraînant des points où il n'y a rien. Ce faisant on déplace tous les triangles à la fois, passant d'une figure géométrique à un ensemble de points.

Ensuite, et c'est sans doute le point le plus important dans le structuralisme, on ne s'intéresse plus aux transformations pour elles-mêmes mais aux relations qui existent entre elles. Autrement dit on se permet de les composer pour les considérer comme des éléments de certains groupes.

Partant de là, on ne considère plus les groupes indépendamment les uns des autres, mais avec les homomorphismes qui les relient entre eux. C'est une nouvelle étape dans la montée en structure, celle qui ajoute les flèches aux objets dans une catégorie. C'est ainsi qu'on aboutit aux invariants.

3. L'hélice du sens et les métiers.

Un des reproches qui est fait au structuralisme, dans des domaines autres que les mathématiques où il rencontre un certain succès, est de rien dire sur la genèse des concepts. Or cette dernière est source de sens.

Les mathématiques ne font pas exception. Si l'on veut travailler sur des notions mathématiques sans perdre du sens, il convient de les aborder en commençant par le plus bas niveau de structure.

En même temps que l'on s'élève dans le structuralisme, de nouvelles formes de sens vont s'ajouter. Ces formes sont notamment liées à la disposition d'outils ou de méthodes. Une nouvelle hélice se superpose ainsi à l'hélice structurale, qui est l'*hélice du sens*, que l'on trouvera aussi sur la planche 1 à propos de la géométrie.

Il y a au départ, au niveau du bas, le sens physique; celui de la physique des corps solides en géométrie, avec notamment comme outil les cas d'égalité.

Il y a au dessus le sens de l'algèbre, celui du "calcul qui pense"; avec l'outil des groupes de transformation en géométrie. On notera qu'il n'y a pas beaucoup d'outils au niveau des transformations elles-mêmes, si ce n'est des listes encombrantes de propriétés;

PL2

ces dernières constituent ces fameuses “boites à outils” qui sont un peu la négation des outils parce qu'elles n'en n'ont pas l'universalité.

Encore au dessus, on trouve un sens “catégoriel”, celui des grandes constructions qui rendent encore plus trivial ce qui était trivial; avec l'outil des morphismes et des foncteurs.

Lorsque l'hélice revient au dessus d'elle-même, on se trouve en présence de deux formes différentes de sens. Cependant il n'y a pas éclairage réciproque. Le sens du bas éclaire celui du haut. Celui du haut n'éclaire en rien celui du bas.

On trouve cette exigence de partir du concret pour aller vers l'abstrait chez les grands anciens, par exemple chez Henri Lebesgue qui rappelle que les savants “ont pu se mouvoir dans l'abstraction ... précisément parce qu'ils avaient un sens aigu de la réalité”, que “c'est ce sens qu'il faut éveiller chez les jeunes” et qu' “après seulement, le passage à l'abstrait peut être profitable”. On trouvera une citation plus complète sur la planche 2.

Le prix à payer pour les enseignants que nous sommes quand nous devons mettre du sens est donc d'avoir à mettre les mains dans le cambouis qui précède les présentations lisses et formelles, d'avoir à regarder du côté de la physique par exemple. Le petit paradis des mathématiques pour elles-mêmes, coupées de tout le reste, nous tient à cœur et c'est ce qui nous a fait choisir cette discipline. C'est aussi notre dernier privilège au moment où notre profession est soumise à des contraintes sans cesse plus pesantes dans un environnement parfois bien difficile. Je ne voudrais pas ajouter une nouvelle contrainte aux contraintes. Qu'on retienne surtout ceci de mon propos. Si l'on trouve un moyen simple pour expliquer les choses aux élèves, il n'y a aucune raison de s'en priver et de se croire obligé de suivre telle ou telle mode. Il nous faut juste un peu raison garder sur le rôle des mathématiques et ne pas nous croire à l'origine de l'univers. Quand j'ai entendu mon collègue dire que

$$120\text{hab}/\text{m}^2 \times 555\,000\text{m}^2 = 66\,000\,000\text{hab}$$

donnait une bonne approximation de la population de la France à partir de la densité de sa population, alors que l'on calcule la densité de la population après les recensements et non pas avant, j'ai pensé qu'il avait tendance, comme cela nous arrive à tous, à donner la primauté au modèle abstrait sur le monde réel.

4. Où apparaît la transposition didactique.

La transposition didactique d'Yves Chevallard opère du savoir savant vers le savoir enseigné. Voir la planche 3 qui reproduit la quatrième de couverture de son livre. Nous allons préciser un peu la façon dont nous comprenons l'un et l'autre de ces savoirs. En même temps nous résumerons sa pensée sous la forme qui suit due à Philippe Lombard.

> *Tout acte didactique définit un savoir enseigné et un savoir savant et opère une transposition du second vers le premier.*

Dans ce principe il faut comprendre qu'en mathématiques tout savoir est *enseigné*. Par exemple Bourbaki a été écrit comme support à l'enseignement de la Licence. A l'intérieur de ce vaste ensemble, on peut distinguer le *savoir savant*, appelé savoir pérenne par Rudolph Bkouche. La transposition opère d'un certain savoir savant vers

PL3

un certain savoir enseigné, lequel peut être construit ad hoc mais peut aussi être du savoir savant. Le choix du départ et de l'arrivée fait partie de l'acte didactique.

Il y a deux façons de mesurer la transposition, et cela explique les controverses. Ou bien on mesure le déplacement complet. Ou bien on ne mesure que le déplacement hors du savoir savant, lequel peut être nul ou presque. Nous verrons que ce dernier cas n'est pas si exceptionnel. Il peut concerner un enseignement de haut niveau, dans la ligne de l'école bourbachique, comme un enseignement très élémentaire, tel qu'en propose Guy Brousseau.

Ce dernier donne l'image suivante : la transposition est aussi nécessaire à l'enseignement que les frottements le sont au mouvement. Cependant mieux vaut réduire les frottements. Un choix judicieux dans le savoir savant permet de les réduire à presque rien. Il arrive que des stratégies pédagogiques très proches du savoir savant conduisent à des présentations plus simples que d'autres, pourtant construites spécialement pour la classe. Evidemment leur efficacité reste à valider par une expérimentation didactique. Encore faudrait-il convenir de confier à la didactique le soin d'expérimenter systématiquement des propositions concurrentes et variées plutôt que de chercher à lui faire justifier telle ou telle innovation.

La transposition que nous observerons en général opèrera horizontalement sur un même niveau de structuralisme. En aucun cas elle ne permettra donc de se placer au niveau adéquat pour initier une stratégie d'enseignement.

5. Le champ du calcul.

Parler du "calcul sous toutes ses formes" pourrait laisser penser qu'on cherche à distinguer à l'intérieur du calcul des aspects étrangers les uns aux autres, qu'on devrait donc traiter séparément. Exactement à l'inverse d'une telle démarche pointilliste, nous voudrions expliquer que le calcul est la forme unificatrice de la pratique des mathématiques. Bien sûr, ce faisant, nous convenons de donner au terme une acception large. On peut aussi bien, comme le fait Jean Dhombres, lier le calcul à ce qui se *dispose* différemment du texte ordinaire. Si cette dernière convention est certainement propre à éclairer les évolutions historiques des mathématiques, elle nous semble un peu imprudente dans un contexte où l'on s'occupe directement d'enseignement. Une des dérives que l'on constate aujourd'hui, aussi bien chez les étudiants à l'université que chez beaucoup de collègues, est la trop grande croyance dans le *formulisme*. On pense que les formules, et elles seules, permettent de résoudre les ambiguités, ce qui est doublement inexact; d'abord l'interprétation des formules dépend du contexte; ensuite le discours ordinaire peut être parfaitement précis si on le souhaite.

Deux erreurs sont communément commises quand on parle du calcul et du raisonnement. On réduit le calcul à sa partie la plus automatique, celle que l'on qualifie "d'exécution des algorithmes" et que les machines savent faire depuis très longtemps. En même temps on réduit le raisonnement à la pratique d'une logique formalisée, sans se rendre compte que les machines sont aussi très capables de la pratiquer, y compris lorsqu'il faut tâtonner pour trouver la bonne voie. Aussi est-il parfaitement ridicule, par exemple, d'imaginer que l'utilisation des machines laissera plus de temps pour la réflexion. L'utilisation des machines peut très bien supprimer toute l'activité mathématique, si l'on n'en impose pas par ailleurs la pratique.

Il y a une grande différence entre l'homme et la machine quand ils font des calculs. Le premier, en même temps qu'il met en œuvre des opérations quelque peu mécaniques, pense l'algorithme qu'il pourrait, avec un peu de technique, programmer dans la machine. La seconde effectue ce qu'un ingénieur, disposant de la technique en question, lui a demandé de faire. Je ne parle pas de l'élève, lequel ne demande rien mais recopie. S'il doit effectuer 7503×945 à la main, il doit déjà savoir qu'il s'agit d'une multiplication. Avec les interfaces modernes des machines il n'a rien à penser. Et loin de moi l'idée de critiquer des machines qui se mettent de plus en plus au service de l'homme, ce qui n'était pas vrai il y a quelques décennies.

En réalité mener un calcul est le modèle même de l'activité mathématique. Un calcul ne se mène pas au hasard. On se fixe en général un objectif qui donne du sens à la démarche. Il n'y a pas de différence fondamentale avec la conduite d'une démonstration de géométrie fondée sur l'application des cas d'égalité, laquelle apporte à chaque étape une petite propriété nouvelle. Quant à appliquer des transformations comme c'est aujourd'hui la mode, c'est tout transformer en vrai calcul.

Un calcul mental authentique, comme la multiplication de 19 par 6 en commençant par 20 fois 6, demande un raisonnement qui n'a rien à envier à ceux que l'on présente aujourd'hui au lycée.

Le calcul posé a aussi sa place. Les mathématiques n'existeraient pas sans méthodes. Savoir conduire proprement une méthode dans une situation donnée est une exigence incontournable pour avancer en mathématiques. Or le calcul posé est le premier exemple d'application d'une méthode. C'est comme l'étude des solutions d'une équation du second degré dépendant d'un paramètre qu'on pratiquait au lycée et qui est aujourd'hui discréditée. A complètement négliger les méthodes, notre enseignement des mathématiques ne permet plus de discerner chez les élèves les qualités qui pourraient les orienter vers l'informatique. Il faut ainsi savoir que la moitié des étudiants qui sortent d'une licence de cette discipline ne savent pas programmer.

Voici un petit exemple, pris à Michèle Artigue et qui figure dans la conférence introductive, où l'on trouve un calcul guidé par une méthode, notant bien sûr qu'il y a plusieurs façons de s'y prendre, notre seule prétention étant d'en présenter une de plus[3]. Il s'agit de décider de la convergence de la série de terme général

$$(-1)^n \frac{n \log n}{1+n^2} \ .$$

Un développement asymptotique très simple donne

$$(-1)^n \frac{\log n}{n} \; \frac{1}{1+1/n^2} = (-1)^n \frac{\log n}{n} + O(\frac{1}{n^2})$$

sachant que $\log n/n$ tend vers zéro. Dans le membre de droite le second terme converge absolument et le premier est le terme général d'une série alternée convergente; en effet la suite $\log n/n$ est décroissante pour $n \geq 3$ puisque

$$\left(\frac{\log x}{x}\right)' = \frac{1-\log x}{x^2} \leq 0$$

pour $x \geq e$. Ainsi la série est-elle (semi-)convergente.

[3] de plus que celle de la conférence de Michèle Artigue à Saint-Flour, mais qui a été depuis intégrée aux actes.

En fait, et c'est là-dessus que s'appuie Michèle Artigue, la série est alternée pour n assez grand, ce dont on peut se douter même sans calcul de dérivée. Avoir une idée a priori de la classe de fonctions à laquelle appartient la dérivée de $x \log x/(1+x^2)$ et sentir que cette dérivée aura une partie principale simple et donc un signe constant au voisinage de l'infini résulte d'une bonne expérience du calcul. Il s'agit ici de calcul exact. C'est précisément ce qu'on a perdu avec l'usage immodéré des calculatrices symboliques modernes.

Pour celui qui a acquis le "petit métier" que suppose la démonstration ci-dessus, son écriture ne diffère pas sensiblement de l'exécution d'un calcul posé. Faut-il réduire pour autant cette démonstration à l'exécution d'un algorithme? Si c'était le cas que resterait-il à faire en mathématiques?

Voici un autre petit exemple emprunté au même auteur et à sa conférence, pour lequel nous cherchons juste une solution géométrique. Sur les côtés d'un rectangle $ABCD$ on place en tournant des points M, N, P, Q tels que $AM = BN = CP = DQ = x$. Pour quelle valeur de x la surface du parallélogramme $MNPQ$ est-elle minimum? .

De la même façon qu'on mènerait un calcul, on transforme progressivement le problème pour rendre la situation de plus en plus accessible. Comme le propose Michèle Artigue, on commence par remplacer la surface considérée par celle des triangles complémentaires, qu'il s'agit de maximiser. En regroupant ces triangles de façon adéquate, nous préférons nous ramener à maximiser la surface d'un rectangle de côtés $AB - x + BC - x$ et x. Ou bien l'on considère un rectangle moitié de périmètre fixe ou bien l'on regarde directement l'effet du remplacement de x par $x + h$ pour $h > 0$ assez petit: suivant que $2x > AB + BC - x$ ou l'inverse la surfave augmente ou diminue. D'où le maximum pour $x = (AB + CD)/4$.

Bien sûr ce n'est pas parce qu'il existe toujours une solution plus ou moins naturelle qu'il ne faut pas favoriser la libre réflexion sur de tels exemples, dans l'esprit du "débat scientifique" de Marc Legrand. Mais cela ne dévalue pas les méthodes.

Dans les deux exemples que nous avons considérés, nous pouvons donc assimiler le raisonnement bien mené à un vrai calcul. C'est tout le contraire de la stratégie suivant laquelle on complète un calcul automatique par ce qu'on appelle un peu abusivement un raisonnement et qui n'est que la pioche dans un ensemble de ressources, dans un *répertoire* comme l'on dit. Même si c'est souvent comme cela que l'élève ou tout un chacun pratique, il n'est pas raisonnable d'en faire une stratégie d'enseignement. C'est un peu comme si la version latine s'appuyait principalement sur la recherche des phrases traduites du Gaffiot.

6. L'hélice structurale pour les nombres.

On verra sur la planche 4 un schéma de cette hélice structurale. A la base on trouve les *nombres concrets*, ceux qui servent à compter ou à mesurer, comme lorsqu'on mesure 3 mètres ou pèse 5 kilogrammes.

Les *nombres intuitifs* viennent tout de suite avec les nombres concrets. Le nombre 3 est ce qui compte à la fois 3 mètres, 3 pommes et 3 chaises.

A partir des nombres concrets on peut définir les opérations : addition, soustraction, multiplication et division. Par exemple on ajoute 3 mètres et 2 mètres en les mettant bout à bout pour trouver 5 mètres.

PL4

Ces opérations se traduisent immédiatement pour les nombres intuitifs. C'est ainsi que les tables de multiplication se limitent à ces derniers; on n'y fait pas figurer de dimension.

On notera qu'il n'est pas question ici de loi de composition et que la soustraction n'est pas une addition à trou ni la division une multiplication à trou. Il y a d'autre part une cinquième opération, celle qui fait passer du nombre intuitif 1 à une *unité* et qui transforme ainsi tout nombre intuitif en nombre concret. Dans la langue savante (et quand les nombres entiers relatifs ont été acquis) on dit que l'anneau unitaire est un module sur lui-même.

On monte d'un cran dans le structuralisme en définissant les *lois de composition*, précisément le *groupe* additif puis l'*anneau* des nombres entiers relatifs. On notera d'ailleurs qu'avant de chercher à atteindre les nombres négatifs, la notion de loi de composition n'a aucune raison d'être introduite.

On franchit un nouveau niveau de structure en ne considérant plus les groupes indépendamment les uns des autres et en introduisant les homomorphismes de groupes. Cela conduit aux actions de groupe, et notamment à la notion d'*espace vectoriel* sur un corps.

Encore un cran et on atteint les applications linéaires, puis bilinéaires, lesquels mènent, en considérant un foncteur défini sur la catégorie des espaces vectoriels, à la notion de *produit tensoriel* d'espaces vectoriels.

Maintenant on se retrouve sur l'hélice structurale au-dessus des nombres concrets qui nous ont servi de point de départ. Déjà les grandeurs physiques s'interprètent comme des droites vectorielles. Les grandeurs composées sont des produits tensoriels de telles droites. Nous reviendrons en détail plus loin sur cela.

7. L'hélice du sens pour les nombres.

On verra sur la planche 5 un schéma de cette hélice structurale. Si l'on veut donner du sens à la notion de nombre dans l'enseignement, il faut commencer bien sûr par parler des nombres concrets et juste après des nombres intuitifs. Comme dit Ferdinand Buisson, "en arithmétique on ne commence pas par lui [à l'élève] révéler les nombres abstraits, leurs rapports et leurs lois; c'est sur des objets concrets qu'on exerce d'abord son attention ...".

Ce sont les mêmes nombres concrets qui donnent un sens aux opérations, qui, comme nous l'avons dit, passent aussitôt après aux nombres intuitifs. Aussi est-il judicieux d'introduire très vite les quatre opérations, et de les faire pratiquer mentalement avant d'envisager, même de loin, des algorithmes de calcul. Le même Ferdinand Buisson dit bien que "le moment ne tarde pas où l'on peut lui faire faire de tête et par intuition des opérations qu'il ne pourra rigoureusement raisonner que plus tard." Voir la planche 3 pour une citation plus complète.

Le calcul dit *posé* vient un peu plus tard. Nous reviendrons sur ce calcul, en insistant sur le sens, à propos de la multiplication *per gelosia* proposée par Guy Brousseau.

Il arrive malgré tout un moment où l'on doit apprendre à travailler sur des nombres abstraits. C'est ce qui arrive lorsqu'on doit écrire une opération complexe, par exemple à l'occasion des règles de trois, ou lorsqu'on fait du calcul littéral. Nous reviendrons plus loin sur le sujet aussi.

PL5

Ce qu'on perd de sens physique en oubliant les dimensions est compensé par la possibilité d'appliquer des automatismes de calcul : passage d'un membre à l'autre dans une équation, simplification haut et bas dans une fraction etc. C'est alors l'algèbre qui "pense à notre place". Jean Dhombres a parfaitement expliqué cela avec les calculs menant aux équations de coniques présentés par Descartes.

Pour que cela s'applique aux calculs faits par l'élève, encore faut-il quelques conditions. Pour celui qui n'aurait pas acquis un "sens aigu" de la réalité des opérations, ces règles qui les gouvernent sont impossibles à maîtriser et se révèlent plus piégeuses qu'utiles. Il est par exemple significatif que certains enseignants de collège préconisent d'interdire la règle de changement de membre dans les équations, parce qu'elle serait responsable d'erreurs, et d'exiger d'en passer par l'application d'une même opération sur chaque membre. Mieux vaudrait traiter la raison profonde des erreurs, qui est ici la confusion entre addition et multiplication.

Aux niveaux supérieurs de l'hélice, on dispose d'une part de l'éclairage apporté par le bas avec les grandeurs physiques, simples ou composées, et du sens "catégoriel" qui est une extrapolation du "sens de l'algèbre" ordinaire. C'est un secours dans la mesure où l'on peut alors se passer de refaire indéfiniment les mêmes petits raisonnements, mais si on ne les a jamais faits en les comprenant en profondeur, si l'on n'a pas une collection d'images concrètes derrière les mots creux, c'est plus un handicap qu'autre chose.

8. Le sens : la multiplication per gelosia selon Brousseau.

Une façon alternative d'effectuer les multiplications posées a été avancée et expérimentée par Guy Brousseau; c'est la multiplication dite *per gelosia*. Elle permet de réduire les erreurs commises par les élèves et induit donc un gain de temps dans les apprentissages. Ce n'est pas cet aspect didactique que nous allons considérer. Nous cherchons seulement à expliquer en quoi le procédé est directement lié au sens des opérations.

La planche 6 montre un exemple de cette multiplication, celle de 7503 par 945. On a placé les deux nombres à multiplier sur les bords haut et droit d'un rectangle 4×3 de dimensions adaptées à ces nombres. La multiplication se fait en tableau ligne-colonne. Dans chaque cellule on inscrit le produit de deux chiffres, en disposant le résultat avec le chiffre des dizaines en haut à gauche et celui des unités en bas à droite. Pour finir on additionne suivant les diagonales nord-est à sud-ouest, en commençant par la droite et tenant compte des retenues. Le résultat se lit sur les bords gauche et bas du rectangle. Cette dernière étape n'est pas figurée.

La méthode présente un avantage indéniable sur le plan de l'ergonomie. On peut relire un calcul effectué à tout moment pour le vérifier. Tous les calculs intermédiaires sont en effet présents sur le tableau. En même temps la méthode soulage l'effort de mémorisation qui est exigé dans la multiplication posée classique et qui est l'une des causes des erreurs.

En conséquence cette multiplication peut être proposée à des élèves qui ne maîtrisent pas complètement leur table de multiplication. Elle permet d'une part de consolider cet apprentissage et apporte d'autre part une motivation pour s'y atteler.

Pourquoi la méthode a-t-elle eu aussi peu de succès chez de tous ceux qui réfléchissent à l'avenir de notre système éducatif, au point de ne même pas avoir été considérée? Peut-être parce que, dans le monde d'illusions où nous vivons, relier la maîtrise

PL6

du calcul posé à la connaissance intime des nombres n'est pas un objectif. Le calcul posé n'est qu'un exercice de style pour nos pédagogues modernes et il leur paraît plus valorisant d'enseigner les méthodes classiques, dites expertes, que beaucoup prétendent connaître et souhaitent retrouver pour leurs enfants à l'école, même si elles sont très peu maîtrisées. Eventuellement on mettra l'accent sur les fameuses méthodes individuelles pour laisser croire que l'élève construit son propre savoir. Peu importe finalement si les unes et les autres sont totalement inefficaces puisqu'il existe des calculatrices ainsi qu'un tiers-monde pour les produire à bon marché.

Or la méthode proposée par Guy Brousseau est notamment intéressante parce liée au sens des opérations et la connaissance des nombres, peut-être plus encore que la méthode classique. Elle s'appuie simplement sur la cinquième opération, celle qui fait des nombres 1, 10, 100 des nombres concrets, qui sont l'unité, la dizaine, la centaine etc.

On notera que l'on travaille ici à un niveau de structure qui n'a rien en commun avec les lois de composition. Il n'est pas question de parler de commutativité de la multiplication. Cependant l'élève qui apprend ses tables a tôt fait d'intégrer, sans le savoir, cette propriété dans ses connaissances, ayant compris qu'à chaque nouvelle table il n'a plus qu'une partie de cette dernière à apprendre. Il n'est pas question non plus de distributivité. On sait bien sûr que

> *pour multiplier une somme par un nombre on multiplie successivement chacun des ses termes,*

mais on se garde bien d'écrire une formule.

A ce propos il y a une étrangeté dans la mode. Aujourd'hui on ne formule plus rien. Evidemment ce n'est surprenant qu'en apparence. Rien n'a changé sinon qu'on n'ose plus autant donner dans l'abstrait. Mais comme on ne sait rien faire d'autre, on ne fait plus rien. On n'ose pas formuler tant qu'on n'a pas la possibilité de le faire suivant des normes qui sont toujours aussi pédantes. C'est ainsi qu'au début on ne parlera pas de *cercle* mais de *rond* parce qu'il faut attendre d'être capable de donner une définition abstraite pour parler du second.

En fait la méthode *per gelosia* a été proposée à l'époque des "mathématiques modernes", quand on nourrissait l'illusion, soulignée par Michel Delord, qu'on pouvait entièrement combler le fossé entre la pratique d'algorithmes élaborés de la perception de leur fonctionnement. Le paradoxe est qu'elle n'avait pas alors de nécessité évidente car les opérations étaient relativement bien installées. Guy Brousseau avait peut-être un peu d'avance. Aujourd'hui en effet elle s'inscrirait parfaitement dans une approche naturelle telle que nous la préconisons, avec une introduction précoce des quatre opérations en liaison avec la décomposition des nombres. De fait elle repose directement sur cette décomposition, ne requérant que l'algorithme de l'addition et la multiplication des tables. Elle est donc proche du calcul mental, tout en évitant la confusion car il n'est pas question de poser une telle méthode dans sa tête. Ce sont ces mêmes raisons qui font que la méthode n'a pas sa place dans la stratégie actuelle en matière d'enseignement du calcul, laquelle sépare les opérations entre elles et les séparent des nombres eux-mêmes.

Maintenant la méthode a quelques inconvénients pratiques, comme la place occupée et la nécessité de soigner les alignements. Par ailleurs on pourrait envisager des dispositions intermédiaires entre cette méthode et la méthode classique. Compte-tenu des difficultés inhérentes à tout changement, il n'est pas sûr qu'elle doive être retenue. Cependant il est évident qu'elle doit être considérée.

Pour finir, au risque de surprendre, disons que ce que propose Guy Brousseau fait partie du savoir savant, qu'il n'y a pas besoin d'aller chercher le produit de Cauchy des séries formelles pour l'en tirer. Certes on ne sait pas trop qui est habilité pour se prononcer sur un tel sujet. Cela ne peut que relever de prises de position collectives, émises au plus haut niveau ou par l'Histoire. Maintenant il n'est pas grave qu'il y ait un certain flou sur les limites du savoir savant, et qu'il y ait des désaccords ici ou là. Aussi pouvons-nous nous engager librement.

9. Transpositions : ERMEL.

C'est Yves Chevallard qui relève cette phrase du Bulletin officiel de l'éducation nationale de janvier 1979.

> *Les phrases telles que 8 pommes + 7 pommes = 15 pommes n'appartiennent pas au langage mathématique.*

Une telle affirmation péremptoire[4] se situe dans une ligne qui sera celle de la réflexion du groupe ERMEL, lequel se proposait de partir, dans notre hélice structurale, du palier des lois de composition. Il s'en est suivi toute une cohorte de transpositions didactiques destinées à rendre accessibles au débutant des notions qui avaient une connotation savante.

L'entreprise était sans espoir. Rien ne sert d'édulcorer à l'infini des notions abstraites si elles ne peuvent prendre de sens qu'introduites après des objets concrets.

Aujourd'hui on reconnaît volontiers que c'était une erreur. On peut quand même se demander si on le reconnaît vraiment, quand les nouveaux programmes disent en contrepoint ceci.

> *Il est légitime et correct d'écrire des égalités telles que*
>
> 1 m = 100 cm.

On parle déjà d'*écrire*, se référant aux mathématiques comme une *écriture*, ce qui nous renvoie malgré tout à ERMEL. Surtout que vient faire la *légitimité* dans cette affaire, si ce n'est pour nous donner un exemple de la *règlementation du savoir*? Donc le règlement a changé; c'est tout. Le règlement est le règlement; il ne faut pas pas chercher à le comprendre. Pour celui qui aurait un doute on lui précise que l'écriture n'est pas seulement légitime, mais *correcte*, ce qui nous renvoie à cette forme de règlement non écrit qu'est le "politiquement correct".

On peut se demander ce que serait une écriture légitime et incorrecte ou illégitime et correcte. Entre d'autres temps on se serait exprimé plus simplement. On aurait dit que c'était *exact*. De cela je ne pense pas que beaucoup de gens doutent. Est-ce qu'un mètre vaut 100 centimètres? Certainement. Cinquante centimètres? Non, c'est inexact.

Bien sûr la question reste encore de savoir si multiplier ce genre d'égalité est pédagogiquement judicieux. Là on peut discuter. Cependant on utilisera alors

[4] C'est la question de savoir s'il s'agit ou non de mathématiques qui n'a simplement pas à être posée, de même que celle de savoir si le calcul de l'école élémentaire fait ou non partie des mathématiques; rien de cela n'est pertinent.

d'autres termes. On dira que la pratique est suggérée, conseillée, recommandée ou éventuellement tout le contraire.

Il y a un élément qui fait douter de la sincérité, ou plutôt de la clairvoyance, de nos concepteurs de programmes de ces dernières années, après que l'on soit revenu des errements des “mathématiques modernes”. Le calcul mental revient en force dans les exigences affichées à l'école primaire. Cependant, dans un premier temps, il s'agissait d'un calcul mental posé. Comme on enseignait le calcul posé d'abord, on laissait l'élève poser le calcul dans sa tête pour l'effectuer.

De cela aussi on est revenu, mais pas complètement. Le simple fait de classer dans les *procédures expertes* le calcul posé et dans les *procédures individuelles* le vrai calcul mental place une hiérarchie qui n'est pas saine.

Par ailleurs ces deux formes de calcul souffrent d'un discrédit évident pour n'être considérées que deux parmi quatre, à égalité avec un calcul approché qui n'a pas de statut clair alors qu'il ne peut s'agir que d'une variante de calcul mental et un calcul instrumenté qui est à la formation de l'esprit ce que la ballade en voiture est à l'hygiène corporelle.

Pour être complet il faut reconnaître aux nouveaux programmes d'être un peu dans le vrai lorsqu'ils écrivent ceci.

> *Au cycle 3, la résolution de problèmes de mesure permet aux élèves de prendre conscience de l'insuffisance des entiers.*

Bien sûr on pourrait manifester beaucoup de regrets. D'abord la chose n'est évoquée qu'au cycle 3. Ensuite la jargonite est pesante avec sa “résolution de problèmes de mesure” et sa “prise de conscience”. Enfin parler de nombres entiers eût été préférable. Il reste que cela sous-entend peut-être qu'il faut mesurer et donc manipuler des nombres décimaux concrets avant d'introduire les nombres décimaux abstraits, ce qui serait positif évidemment.

10. Transpositions : l'Atlantide oubliée de Chevallard.

Une fois remarqué que l'hélice structurale revenait au-dessus d'elle-même, la tentation de corriger l'erreur de placement initial commise par ERMEL en investissant, après coup et massivement, dans le calcul avec unités a séduit plus d'un pédagogue. C'est ce que proposent les programmes tels qu'Yves Chevallard les cite et les commente dans son article sur l'Atlantide oubliée.

Sans remettre en cause le choix de commencer par les nombres abstraits, ils choisissent de plaquer les unités sur les nombres au moment même où chacun devrait avoir appris à largement s'en passer.

La motivation est pourtant fondée sur une remarque qui rejoint la position d'Henri Lebesgue ou celle de Ferdinand Buisson.

> *S'il a été possible aux mathématiques de s'émanciper de la notion de grandeur, c'est sans doute qu'elles avaient accumulé quantité d'expériences et de résultats dont il ne semble pas que l'enseignement de base puisse faire l'économie.*

Il s'agit bien d'une émancipation, qui ne peut intervenir qu'après et qui constitue d'ailleurs un progrès. Malheureusement ce qui est dit un peu plus loin contredit la première déclaration.

PL7

> *C'est dans des situations mettant en jeu des grandeurs que tous les élèves pourront réinvestir les connaissances acquises en mathématiques.*

Ici on a complètement changé l'ordre. Il s'agit maintenant de réinvestir des connaissances préalablement acquises, les opérations par exemple, au cours d'une nouvelle étape.

Dans les derniers programmes on peut lire ceci qui revient finalement exactement au même.

> *Au cycle 2, la question de savoir quelle longueur de ruban reste disponible après avoir découpé, devant les élèves, un ruban de* 37 cm *dans un ruban de* 50 cm*, permet de renforcer le sens de la différence de deux nombres.*

Introduire a posteriori les nombres concrets pour *renforcer* le sens des opérations est faire fausse route.

Là où les programmes proposent de travailler *avec* les grandeurs ou *à partir* d'elles, Yves chevallard considère qu'il faut travailler *sur* ces grandeurs. Le distinguo est bien subtil et nous éloigne des réalités. Il faut commencer, mais au tout début, par les nombres concrets. Dire qu'on travaille *sur* les grandeurs fait penser à l'acquisition d'une compétence supplémentaire, à un enrichissement du domaine de l'étude. C'est bien ce que proposent aussi les programmes.

Derrière ces précautions oratoires on trouve la volonté constante d'enfermer la mesure des grandeurs dans un ghetto. Nous en reparlerons.

11. La conversion d'unités.

Le travail sur les grandeurs proposé par Yves Chevallard et les programmes semble par ailleurs uniquement orienté vers la conversion d'unités. Certes l'utilisation de *nombres concrets* se révèle, dans cet exercice, infiniment plus efficace que les explications oiseuses qui les ont remplacés jusqu'ici dans l'enseignement français. On trouve dans le texte de Chevallard ou dans la conférence d'André Pressiat quantité d'exemples limpides et de comparaisons éloquentes.

Cependant on n'a pas inventé le système métrique pour passer son temps à convertir des yards en verstes. Cette insistance sur les conversions d'unités dans les nouveaux programmes est un signe de perversion.

Prenons un cas très simple : combien font 2 mètres en centimètres? Dans "centimètre" il y a le facteur 100. Mais, avec une unité plus petite il en faut plus. Donc je multiplie par 100.

$2\text{m} = 2 \times 100 \text{ cm} = 200\text{cm}.$

Maintenant combien font 2 décamètres en décimètres? Dans les deux cas il y a le facteur 10, d'un côté et de l'autre. Les facteurs ne se compensent pas; ils se multiplient. D'où un facteur 100 et il faut encore multiplier.

Cela n'interdit pas ce qui suit mais en limite la portée.

$2\text{dam} = 2 \times 10 \text{ m} = 2 \times 10 \times 10 \text{ dm} = 200\text{m}.$

Voici encore une question sur les conversions à résoudre de tête : combien font à peu près 110 yards en mètres? Je sais qu'un yard vaut 91 cm et qu'un mètre en vaut 100. Je prends 110 que je multiplie par une fraction à base de 91 et 100; pour augmenter ou diminuer? Pour diminuer bien sûr, donc je multiplie 110 par 91/100.

Il s'agit de retirer en gros 10%; c'est à peu près 100.

Dans ce dernier cas nous avons utilisé une règle de trois de la façon préconisée par Bernard andré. Nous en reparlerons.

Il y a surtout une question profonde que l'introduction tardive des nombres concrets prend le risque d'occulter, et qui m'a été révélée par Michel Delord. Il n'y a évidemment aucun problème si tout n'est que l'application de règles dans lesquelles il n'est pas envisagé de chercher du sens, règles qui sont justifiées par de savantes considérations totalement hors de portée des élèves et qui donneront l'image d'une Science faite de vérités révélées.

Quand on veut passer de 2m à 200cm, on écrit en fait

$2\mathrm{m} = 2 \times (1\mathrm{m}) = 2 \times (100\mathrm{cm}) = 200\mathrm{cm}.$

Or l'usage à l'école est d'écrire le multiplicateur à droite; de toute façon le diviseur doit impérativement y être. Il faut donc expliquer qu'on peut aussi le mettre à gauche.

Si l'on introduit de façon précoce le calcul sur les nombres concrets en y mettant du sens pour les élèves, on doit encore passer par la justification d'égalités telles que

$2\mathrm{m} \times 3\mathrm{m} = 6\mathrm{m}^2$

en montrant que c'est deux façons d'écrire la même surface. Ce n'est en effet ni une convention d'écriture, comme on l'a dit dans le passé récent, ni l'application d'une règle générale d'algèbre, comme on aurait tendance à le dire aujourd'hui. Cela se montre.

Ayant défini le m^2 comme la surface d'un carré de côté égal à 1m et le produit $2\mathrm{m} \times 3\mathrm{m}$ comme celle d'un rectangle de côtés 2m et 3m, on vérifie l'égalité ci-dessus, en s'appuyant sur un dessin à partir de propriétés intuitives des surfaces. C'est une vraie démonstration et qui fait partie du savoir savant. Il ne faut pas en avoir honte. Aucune considération abstraite ne peut la remplacer. Si le produit n'avait pas fait des m^2 mais autre chose, la construction du produit tensoriel n'en serait pas moins correcte. Mais il aurait fallu chercher un autre formalisme pour le produit des grandeurs.

12. Transpositions : la grandeur avant la mesure

Travailler sur des grandeurs, notamment la longueur, avant de chercher à les mesurer fait partie de la mode de ces dernières années et les programmes insistent là-dessus.

En Sciences physiques, dès qu'on introduit une grandeur, on parle tout de suite de la façon de la mesurer et donc de l'unité et des unités. Qu'est-ce qu'une longueur? On se souvient qu'une longueur se mesure, entre autres, en mètres et l'on a dans sa tête l'image d'un mètre déplié.

Insister sur les grandeurs avant leur mesure est pédagogiquement absurde. Mettre dans un ghetto tout ce qui touche à la mesure est scientifiquement stupide.

A quoi servent les nombres? A mesurer les grandeurs. Qu'est-ce qu'une grandeur? Ce qui se laisse mesurer par un nombre. C'est la philosophie de la mesure des grandeurs d'Henri Lebesgue. Il y a une dualité entre nombres et grandeurs qui fait qu'aucun des deux concepts n'aurait de sens sans l'autre. Le principe de dualité est très important en mathématiques. Pour faire un peu de structuralisme, cette fois dans le sens de son inventeur, on peut dire que la relation de dualité entre nombres et grandeurs est plus importante que ces concepts considérés séparément.

Il n'est peut-être pas inutile de discuter du **vocabulaire** utilisé pour les grandeurs. Lorsqu'on veut traduire en mathématiques la dimension physique, nous verrons qu'il faut considérer une structure vectorielle sur le corps des nombres réels. Il n'y a donc plus que des vecteurs.

Une grandeur multidimensionnelle, pour ne plus dire vectorielle dans un excès de purisme à ne pas trop imiter, est définie par une direction, laquelle comprend un sens, et une magnitude, qui est une grandeur positive ou nulle. Il est important que la direction comprenne le sens. Considérer des directions de droite est une spécificité franco-française qui heurte l'usage commun. Mieux vaut ne pas confondre la direction Paris-Clermont et la direction Clermont-Paris quand on prend son billet de train. Par ailleurs il vaut mieux parler de la magnitude, qui est une grandeur, une longueur par exemple, que de la norme, qui est plutôt un nombre.

Une grandeur unidimensionnelle, pour ne plus dire scalaire dans un même excès de purisme, varie dans une droite, orientée ou non, ou une demi-droite, auquel cas on dit qu'elle est positive. On noterait qu'une demi-droite est toujours vectorielle, même si elle est prise dans une droite affine, voire projective; il faut entendre par là qu'elle dispose d'une structure vectorielle canonique.

Permettons-nous une digression sur les **mesures algébriques** en anticipant sur ce que nous expliquerons plus loin. Dans mesure algébrique il y a "mesure". On parlera alors de la mesure algébrique $\overline{AB}$ sur une droite affine dont la droite vectorielle sera munie d'une base, en particulier d'une orientation.

Cependant il n'est pas besoin de base, i.e. d'orientation et d'unité, pour considérer $\overline{AB}/\overline{AC} = k$. Dans ce cas il vaut mieux décider la mesure algébrique est un vecteur. L'écriture précédente n'est pas recommandée avec des vecteurs, mais justement on mettra des barres plutôt que des flèches, ou plutôt on fera des flèches en forme de barres, pour bien se souvenir qu'on est en dimension 1.

Maintenant si ABC et $A'B'C'$ sont des triangles homothétiques, ça va encore pour $\overline{A'B'}/\overline{AB} = \overline{A'C'}/\overline{AC}$. Mais pour $\overline{A'B'}/\overline{A'C'} = \overline{AB}/\overline{AC}$? C'est travailler dans un produit tensoriel comme nous le verrons. Il ne faut pas soulever le lièvre mais la géométrie est bien une science physique avec les difficultés à la clé.

13. Transpositions : mathématisations.

Ce retour tardif aux unités est en réalité le résultat d'une transposition didactique opérée à partir du niveau supérieur de l'hélice structurale des nombres. En effet les défenseurs actuels des unités ont besoin de s'appuyer sur des constructions abstraites pour justifier leurs orientations pédagogiques. Ils ne peuvent les trouver ici qu'au dernier niveau.

C'est pour cette raison qu'Yves Chevallard a écrit une suite à son Atlantide oubliée. Elle présente, en la reformulant, une construction due à Hassler Whitney, qui fournit un cadre abstrait cohérent aux nombres concrets. Pourquoi ce dernier a-t-il produit une telle construction? Ce n'est pas ce qui l'a fait connaître comme mathématicien. Il semblerait qu'il ait voulu prouver aux puristes qu'on pouvait formaliser des pratiques jugées alors extramathématiques par certains. L'intérêt est anecdotique.

Dès les années cinquante, on connaissait parfaitement, dans une présentation moderne qui n'a pas évolué depuis, le cadre adéquat pour traiter mathématiquement les grandeurs; il s'agit simplement des produits tensoriels. Ces derniers n'ont pas été introduits à cette fin mais ils couvrent tous les besoins de la physique sur le sujet. Evidemment l'exposé est un peu abstrait; il s'agit de représenter un foncteur ou, de façon à peine moins pédante, de résoudre un problème universel.

Les ouvrages souvent cités sur le sujet de Jean-Marie Souriau et de Rémi Goblot ne sont pas conformes à cette philosophie. Ils transposent, le premier un peu et le second beaucoup, et trahissent en proportion. La version aboutie est celle de Bourbaki mais la première édition contient une maladresse et la suivante est illisible car trop générale. On trouvera ladite version sous une forme optimale dans livre d'Algèbre linéaire de Serge Lang. Tout est élémentaire, mais c'est du savoir savant, à peine un peu transposé.

Maintenant je déconseillerai quand même la lecture de cet excellent livre. L'idéal est d'en rester à ce que chacun sait faire : multiplier des mètres par des mètres ou diviser des kilomètres par des secondes. C'est aussi du savoir savant, ou pérenne si l'on préfère.

14. Grandeurs (à une dimension) et droites vectorielles.

Une *grandeur*, comme une longueur, peut-être représentée en général par un point d'une *demi-droite* d'origine O. Se donner une longueur $\mathbf{u}$ non nulle, qui servira d'*unité*, revient à y choisir un point U, celui pour lequel $OU = \mathbf{u}$.

Alors, pour une longueur $\mathbf{l} = OM$ quelconque, il existe un nombre réel x et un seul pour lequel

$$OM = x.OU \quad \text{ou} \quad \mathbf{l} = x.\mathbf{u}$$

et ce nombre x est la *mesure* de ladite longueur lorsqu'on a pris $\mathbf{u} = OU$ comme unité.

On préfèrera travailler sur une *droite* vectorielle; choisir une demi-droite (vectorielle) revient à y choisir une *orientation*.

Une unité est alors très exactement une *base* de la droite vectorielle (choisie dans la bonne demi-droite).

Cela vaut pour la *longueur*, la *surface*, le *volume* géométriques, la *masse* etc. Il y a cependant quelques variantes.

Un (intervalle de) *temps* est représenté sur une droite vectorielle orientée complète. L'écoulement du temps n'est pas réversible, sinon le freinage ne se distinguerait pas de l'accélération.

En revanche une *distance parcourue* dans un sens ou dans l'autre, que l'on peut qualifier si l'on préfère de *translation*, est représentée sur une droite vectorielle non orientée.

Une *vitesse*, une *accélération* ou encore une *force* de même. Orienter la distance oriente en même temps vitesse, accélération et forces : on peut comparer les sens.

15. Produits tensoriels de droites vectorielles.

Nous allons donner une petite idée de ce qu'est un produit tensoriel, sachant que celui qui cherche seulement à enseigner les nombres concrets ou les grandeurs physiques a tout avantage à ne même pas s'en préoccuper. Cela n'apporte strictement rien quant au sens.

Etant donnés des espaces vectoriels E et F, on construit un espace $E \otimes F$ qui est appelé leur produit tensoriel et une application

$$E \times F \to E \otimes F$$

qui associe $x \otimes y$ dans $E \otimes F$ à chaque x dans E et chaque y dans F, de façon *bilinéaire*, c'est-à-dire *linéaire* dans chacun des arguments x et y.

Lorsqu'on dispose de bases (e_i) dans E et (f_j) dans F, alors une base du produit tensoriel est constituée des

$$e_i \otimes f_j \ .$$

Par exemple

$$\mathbf{R}^3 \otimes \mathbf{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^6$$

car $3 \times 2 = 6$.

Cependant, avec deux droites vectorielles on obtiendra une nouvelle droite vectorielle puisque $1 \times 1 = 1$!

C'est une caractérisation **intrinsèque** du produit tensoriel qui apporte du sens à la construction. On peut la résumer en disant que ce qui est

- *linéaire* sur E,
- *linéaire* sur F,

s'exprime

- *linéairement de façon unique* sur $E \otimes F$.

Cela étant, dans une situation comme celle d'un produit tensoriel de droites, cela ne recouvre guère que des banalités. La linéarité en dimension 1 est simplement une proportionnalité.

A titre d'exemple imaginons des champs rectangulaires, de côtés Nord-Sud pour les uns et Est-Ouest pour les autres, évitant de parler longueur/largeur. Ces côtés ont des longueurs respectives l_1 et l_2, valeurs supposées sans relation entre elles.

La surface de ces champs

$$s = l_1.l_2$$

est *proportionnelle* à l_1 et à l_2.

Maintenant si une grandeur g, par exemple la capacité de production de blé, est *proportionnelle* à l_1 et à l_2, elle vérifie

$$\frac{g}{l_1.l_2} = k$$

où k ne dépend ni de l_1 ni de l_2. Elle est alors *proportionnelle* à s par

$$g = ks$$

de façon unique.

On peut exprimer de façon pédante cela en disant que la droite S des surfaces est le carré tensoriel de la droite L des longueurs :

$$L \otimes L \xrightarrow{\sim} S \ .$$

Evidemment on sent bien que s'exprimer ainsi n'apporte pas grand chose de profond.

Un autre exemple serait la représentation

$$F \otimes L \xrightarrow{\sim} W$$

de la droite des énergies comme produit tensoriel de celle des forces et de celle des longueurs.

Sur le mode du produit tensoriel de deux espaces vectoriels, on définit les puissances tensorielles (entières ≥ 2) d'un espace vectoriel E. De plus $\otimes^0 E$ est le corps des scalaires et $\otimes^1 E = E$. On définit encore la puissance $\otimes^{-1} E$ par dualité. Par exemple le produit $\tau\phi$ d'une période τ et d'une fréquence ϕ est un nombre. Cela identifie le produit tensoriel $T \otimes \Phi$ des droites correspondantes avec le corps des scalaires. Alors l'espace Φ est l'inverse tensoriel de l'espace T.

16. Transpositions : le chariot fou.

Dans le fameux exercice du bac 2004, il est question d'un chariot soumis à des forces de frottement proportionnelles à la vitesse et de sens contraire.

Evidemment les responsables de la confection du sujet n'ont pas jugé utile d'en dire davantage puisque ce genre d'introduction physique n'est là que pour bluffer la population en laissant croire que l'interdisciplinarité est au cœur de l'épreuve. Il leur a suffit de recopier une phrase dans un ouvrage de physique ou de mécanique sans autre forme de procès. Aucune équation n'est écrite; pourquoi le faire si l'on ne cherche rien à en tirer?

Il est parfaitement sain qu'un groupe IREM, comme le groupe maths-physique de Besançon, se soit posé la question suivante : comment passer de cette hypothèse à l'équation qui est parachutée dans l'énoncé? Et d'abord comment exprimer cette hypothèse sous une forme compréhensible à partir du cours de mathématiques?

Nous considèrerons donc la résultante $\vec{f}$ des forces de frottement et la vitesse $\vec{v}$, en un instant donné, comme deux vecteurs libres. Comment faut-il exprimer la relation qui les lie?

Le qualificatif *proportionnel* de l'énoncé perturbe la plupart des enseignants de mathématiques. Il préfèreraient en la circonstance parler de vecteurs *colinéaires*.

Malheureusement parler de vecteurs colinéaires heurte de front la physique. Deux vecteurs sont colinéaires s'ils appartiennent à une même droite (vectorielle); l'adjectif est construit sur le même mode qu'*aligné* dont il est synonyme. Or jamais une force et une vitesse ne peuvent se trouver sur une même droite.

Par ailleurs force et vitesse sont ici des fonctions (du temps). Ce sont des vecteurs d'un espace de dimension infinie, qui sont proportionnels. Finalement le choix de l'énoncé n'était pas si mauvais.

Pour éviter toute contestation, pourquoi ne pas tout simplement écrire

$$\vec{f} = -k\,\vec{v}$$

où le coefficient k, qui est constant, a bien sûr une dimension?

En fait on a une égalité dans un *produit tensoriel*

$$M\vec{L}T^{-2} = MT^{-1} \otimes \vec{L}T^{-1} \ ,$$

ce qu'on n'est pas obligé de dire bien entendu. Noter que la comparaison des *sens* est ici parfaitement licite puisque la masse est positive et le temps orienté. Noter aussi qu'il ne s'agit pas seulement de droites vectorielles.

Dans sa conférence André Pressiat a fait état d'une autre transposition didactique à propos des grandeurs physiques, celle de Klaus Jänich. Elle est notamment motivée par la considération de grandeurs multidimensionnelles. Prenons l'exemple des vecteurs géométriques de l'espace. Dans une décomposition comme

$$\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

il se trouve que les physiciens préfèrent mettre la dimension physique (celle d'une longueur) dans les coordonnées x, y, z et non pas dans les vecteurs de base.

Cela signifie qu'ils identifient l'espace, que nous avons déjà noté $\vec{L}$, des vecteurs géométriques avec le produit tensoriel

$$L \otimes E^3$$

de la droite orientée L des longueurs géométriques et d'un modèle de l'espace euclidien abstrait à trois dimensions. Pour ce dernier on peut choisir l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire donné par $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Il s'agit d'un objet mathématique abstrait, qui ne renvoie pas à Euclide.

Attention quand même ! Cette identification n'est pas une convention d'écriture ou la conséquence de considérations abstraites. C'est une *loi physique* en condensé. On y dit que l'espace physique est convenablement décrit, à notre échelle humaine, par le modèle abstrait de la géométrie euclidienne.

Ce qu'on a dit pour les vecteurs géométriques vaut pour les autres grandeurs physiques multimensionnelles. On a chaque fois un produit tensoriel entre une droite orientée et E^3. Chaque fois il s'agit de lois physiques, ce que le formalisme ne doit pas occulter.

On notera que les physiciens choisissent de mettre la dimension physique dans une droite orientée pour y récupérer la *magnitude*. En effet un tenseur non nul peut toujours s'écrire

$$l \otimes \vec{x}$$

où l est dans la demi-droite positive et où $\vec{x}$ est de norme 1. La magnitude sera donnée alors par l.

Cela corrige un peu ce que nous avons dit à propos des droites vectorielles. Au risque de compliquer un peu, plutôt que de représenter les distances parcourues, vitesses, accélérations ou forces sur une droite non orientée, ils préfèreront sans doute tout orienter d'abord et considérer ensuite des produits tensoriels

$$L \otimes E^1 \ , \ V \otimes E^1 \ , \ F \otimes E^1$$

où la droite euclidienne abstraite E^1 n'est pas orientée.

Une conséquence de la préférence manifestée par les physiciens est de renvoyer toute la géométrie à celle de l'espace abstrait E^3. Autrement dit cela justifie le fait de décider que les longueurs sont des nombres, de considérer par exemple un triangle de côtés 3, 4 et 5. C'est d'ailleurs ce que l'on fait en mathématiques à partir d'un certain niveau, et certainement à l'université.

Il ne faudrait cependant pas que ce qui vient d'être dit se mette à polluer l'enseignement de la géométrie de l'école élémentaire et du collège. Il faut garder à l'esprit que la géométrie est, comme le dit Rudolph Bkouche, la première Science physique. Autrement dit il faut l'enseigner au départ comme de la physique. D'ailleurs toutes les conférences historiques de cette université d'été ont été là pour montrer la voie. Il n'y a par exemple qu'à regarder comment les anciens distinguent longueur, surface et *raison* d'une longueur ou d'une surface à une autre. La modernité réside seulement dans le droit de travailler aussi directement sur les nombres eux-mêmes.

A cette occasion on retrouve le fil directeur de notre discours. Les nombres concrets, avec leur dimension physique, d'abord. Les nombres abstraits ensuite seulement.

17. L'hélice structurale pour la résolution de problèmes.

Nous n'allons pas détailler, faute de temps, la présentation de l'hélice structurale pour la résolution de problèmes. Il y aurait là un important travail à faire, qui rejoindrait à la fois ce que nous avons dit à propos des nombres et que nous dirons à propos du calcul différentiel. Une partie du sujet a donné lieu à un atelier dans le cadre de cette université. Nous ne revenons pas là-dessus.

Au niveau du bas, on trouve la résolution directe, celle que l'on pratiquait à l'école élémentaire et que l'on y pratique encore plus ou moins. On s'appuie évidemment sur les nombres concrets.

Un peu plus haut on trouve la règle de trois, malheureusement supplantée de nos jours par diverses considérations fumeuses comme les tableaux de proportionnalité.

On franchit un niveau important avec l'algébrisation. En même temps c'est là qu'on doit s'émanciper radicalement de l'écriture des unités, lesquelles seraient embarrassantes dans les calculs. On choisit donc à l'avance des unités cohérentes et l'on s'y tient tout au long de la résolution.

Ce faisant on s'interdit de travailler avec des grandeurs physiques. Si l'on veut récupérer cette possibilité, il faut introduire des paramètres de façon à écrire des formules homogènes.

Il y a une vraie difficulté quand on veut mêler calcul algébrique et grandeurs physiques. On s'en aperçoit avec les exercices sur les équations différentielles proposées en mathématiques à propos de modélisation. Faute de se permettre des paramètres, on ne se sort pas du guêpier.

18. Le sens et la règle de trois.

Nous allons juste donner quelques petits exemples illustrant l'hélice du sens pour montrer qu'il n'est pas toujours nécessaire de s'élever beaucoup pour résoudre les petits problèmes.

PL8

Au niveau le plus bas on s'appuie aussi sur quelques règles simples qu'il s'agit d'enchaîner. Le discours fait état de ces règles, ce qui donne des solutions alignant des lignes du type suivant.

prix de vente = prix d'achat + bénéfice
157 F + 16 F = 173 F

C'est la partie gauche du cahier, celle consacrée au sens; dans la partie droite on place les opérations.

Une stratégie un peu plus élaborée, qui permet de résoudre des problèmes dont la solution est moins téléphonée par l'énoncé, est fournie par les échiquiers. L'atelier de Michèle Muniglia y est consacré et nous ne revenons pas sur le sujet, sauf pour dire que l'utilisation des unités y est un élément essentiel, donnant du sens aux opérations.

Nous allons terminer par quelques exemples simples.

Voici une *question* : si une vache de 600 kg fournit 18 litres de lait, combien fournira une vache de 800 kg? Bien sûr il n'est pas sûr que la production de lait soit proportionnelle au poids de la vache, mais ce n'est qu'un exercice.

Voici la *réponse* suggérée par Bernard André et que l'on fait de tête en dehors des contraintes scolaires : je cherche des litres; je prends 18 que je multiplie par une fraction à base de 600 et 800; pour augmenter ou diminuer? Pour augmenter bien sûr, donc je multiplie 18 litres par 800/600 = 4/3.

On notera que cette solution fait parfaitement respecter les dimensions.

Voici une version moins ridicule : si 37 hectares produisent 2500 quintaux de blé, combien en produisent 42 hectares?

Et voici la réponse : je cherche des quintaux; je prends 2500 que je multiplie par une fraction à base de 37 et 42; pour augmenter ou diminuer? Pour augmenter bien sûr, donc je multiplie 2500 litres par 42/37, ce qui fait

$$2500 \times \frac{42}{37} = \cdots$$

Voici maintenant un *exercice* pour la classe de Terminale, le numéro 11 d'une liste de sujets *zéro* proposés par l'Inspection générale en vue du baccalauréat 2005 et publiés en décembre 2004 par la DESco. C'est bien sûr un sujet innovant, destiné à mettre en valeur les thèmes à la mode des nouveaux programmes, dans l'esprit interdisciplinaire qui est censé les caractériser.

Dans une pièce à température constante de $20°$ *C, à l'instant initial, noté* 0*, la température* $\theta(0)$ *d'un liquide est égale à* $70°$ *C.*
Cinq minutes plus tard, elle est de $60°$ *C.*
On admet que la température θ *du liquide est une fonction dérivable du temps* t*, exprimé en minutes, et que* $\theta'(t)$ *est proportionnel à la différence entre la température* $\theta(t)$ *et celle de la pièce …*
Quelle est la température du liquide 30 *minutes après l'instant initial?*

Voici la *solution* proposée par Bernard André. En degrés C :

$$20 + 50 \times \left(\frac{4}{5}\right)^6 = 20 + \frac{8192}{675} \simeq 33 \ .$$

PL9

Expliquons-nous. L'élève de Terminale a appris, surtout dans le cours de physique, que l'hypothèse signifiait que la température suivait une décroissance exponentielle. La valeur limite est 20° C. La différence avec cette valeur, en degrés C, passe de 50 à 40 en 5 minutes. Elle est ainsi multipliée par 4/5 dans cet intervalle. Ce sera pareil pour chaque intervalle de 5 minutes, ce qui donne le facteur $(4/5)^6$ au bout de 30 minutes. D'où le calcul ci-dessus.

Une lecture attentive du petit énoncé ci-dessus nous éclaire sur l'embarras de collègues mathématiciens, soumis depuis des décennies au dogme du purisme, vis-à-vis de la mesure des grandeurs. Pourquoi dit-on que l'instant initial est *noté* 0? On aurait pu le noter de bien des manières, par exemple t_0. Jusqu'ici le nombre 0 n'avait pas vocation à noter quoi que ce soit sinon lui-même. Pourquoi ne pas avoir simplement dit que l'instant initial était choisi comme *origine* des temps? Peut-être les élèves n'auraient-ils pas compris?

De même, l'origine étant choisie, le temps est *exprimé* en minutes, ce qui est loisible et en fait un nombre. Pourquoi la température n'est-elle pas alors exprimée en degrés Celsius? Pourquoi une telle dissymétrie?

Quand on sait l'importance qui est donnée à l'interdisciplinarité, on s'étonne encore de lire *on admet*, sans précision, ce qui pourrait aussi bien laisser penser qu'il s'agit de la conséquence d'un théorème. Ici c'est la conséquence d'une loi physique, pour laquelle on suppose les conditions d'application remplies. Ne peut-on l'indiquer?

19. L'hélice structurale en calcul différentiel.

Au niveau du bas, on trouve le principe de linéarité des petits accroissements, aussi appelé principe de superposition des petits mouvements, cher aux physiciens. C'est aussi l'idée qu'un petit bout de courbe géométrique, de cercle par exemple, ressemble à une droite.

On franchit un niveau de structure avec la notion de dérivée telle qu'on la trouve dans l'enseignement de mathématiques du lycée depuis quelques décennies. La dérivée est la limite d'un quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

quand Δx tend vers zéro par valeurs non nulles.

On franchit encore un niveau avec le formalisme des formes différentielles. Ainsi

$$\mathrm{d}y = k\mathrm{d}x$$

où $k = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Ainsi retrouve-t-on la linéarité considérée au premier niveau.

Glissons une remarque à propos de la terminologie pour $\Delta y/\Delta x$ ou dy/dx. Ce sont toujours des *pentes* quelle que soient les dimensions des variables x et y. Même dans le cas de longueurs, ce n'est pas nécessairement la tangente de l'angle. On noterait que la pente d'une route se mesure en prenant pour x la distance *sur la route* et pour y l'altitude; une pente de 100% correspond à la verticale.

En revanche $\Delta y/y\Delta x$ ou dy/ydx sont des *taux*. Aussi faut-il éviter de parler de taux de variation pour le quotient de dérivation, qui n'est pas un taux mais une pente.

PL10

20. Le sens : le principe des petits accroissements.

Quand le physicien écrit

$$\Delta y = k.\Delta x$$

il sous-entend que Δx est *petit*, comme Δy par voie de conséquence. Ici la petitesse dépend du contexte et elle n'est pas toujours facile à apprécier. Dans le cas d'un noyau qui se désintègre et dont la demi-vie est de 4 jours, un Δt d'une minute est petit. Dans d'autres cas il ne le sera pas du tout.

Bien sûr la relation n'est pas tout à fait exacte. Le physicien sous-entend que l'erreur commise sur Δy est petite, mais il s'agit là d'une erreur *relative*. Le contexte n'intervient pas; seule la précision cherchée a priori compte.

On notera que cela n'a plus de sens si $k = 0$. C'est normal. La proportionalité de 0 avec autre chose n'a pas de sens.

Il semblerait que l'on ne parle plus beaucoup d'incertitude absolue et relative dans l'enseignement. Si c'est vraiment le cas, c'est bien dommage.

21. Le sens : la dérivée géométrique.

La dérivée est d'abord une pente, si l'on préfère une pente limite. Le contexte originel est géométrique et la variable x et la fonction y sont l'abscisse et l'ordonnée dans un repère.

On se ramène évidemment au cas d'une pente (limite) nulle, pour laquelle on exprime que le quotient (dans lequel Δx et Δy ne sont plus petits)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

tend vers 0 avec Δx, ce qui correspond exactement au symbole $o(1)$ de Landau. Ainsi écrit-on

$$\Delta y = o(1)\Delta x = o(\Delta x)\ .$$

Dans le cas général on écrit évidemment

$$\Delta y = k\Delta x + o(\Delta x)\ .$$

Non seulement on a inclus le cas $k = 0$, mais on s'y est ramené. En revanche on a dû supposer x et y du même type, pour que $\Delta y/\Delta x$ soit sans dimension.

22. Le sens : dérivées et grandeurs.

Si maintenant x et y sont des grandeurs, la seconde dépendant de la première, on ne peut plus écrire

$$\Delta y = k\Delta x + o(\Delta x)\ .$$

En effet Δx et Δy n'ont pas le même dimension en général. Il faut tensoriser le $o(1)$ par un u fixe de dimension $Y.X^{-1}$, ce qui donne

$$\Delta y = k\Delta x + o_u(\Delta x)$$

PL11

où

$$o_u(1) = o(1) \otimes u = o(u) \ .$$

Tout cela est un peu lourd, mais on peut rendre la chose très intuitive dans un exemple, alors que la transposition du formalisme mathématique usuel ne revêt aucun sens.

Imaginons qu'on s'intéresse au volume $V(z)$ jusqu'à la cote z d'un solide dont la section à la cote z a la surface $S(z)$. On veut montrer que

$$dV = Sdz \ .$$

Prenons un solide dont les dimensions sont de l'ordre du décimètre, que nous prenons comme référence en matière de longueur. Imaginons le solide comme un empilement de découpages dans des feuilles de papier, ce qui revient à prendre un Δz égal à $0,1$ mm. Quelle erreur commet-on si l'on assimile le volume de la découpe à un petit cylindre, autrement dit en supposant la coupe perpendiculaire à la feuille?

Peut-on dire que ΔV est petit devant Δz? Cela n'aurait aucun sens. En revanche, si $u = 1$ dm^2, dire que ΔV est petit devant $u\Delta z$ a un sens. Cela revient à dire que la surface "douteuse", celle du "cheveu" qui représente la différence entre z et $z + \Delta z$, est petite devant u. Ou encore que l'épaisseur de ce cheveu est petite devant 1 dm. Pour une inclinaison moyenne et un contour pas trop tordu, c'est parce que $0,1$ mm est petit devant 1 dm tout simplement.

23. Transpositions : le volume jusqu'à z.

Revenons sur notre exemple du calcul d'un volume jusqu'à z. Dans le document d'accompagnement du programme de la section S, on considère cette question à propos du problème de la pile de pont. Il s'agit évidemment de justifier la relation

$$\mathrm{d}V = S\mathrm{d}z$$

qu'on préfère d'ailleurs écrire

$$V'(z) = S(z)$$

en réservant aux physiciens la première formulation.

Dans ces documents on tire ladite relation de la formule

$$V(z) = \int_a^z S(u)\mathrm{d}u \ .$$

Mais voilà! Comment obtient-on cette dernière formule? Si l'on est très savant il y a bien sûr le théorème de Fubini pour cela. Mais quelle démonstration donne-t-on de ce dernier dans le cas élémentaire de fonctions continues? On part des dérivées tout simplement.

Pour un *cône de révolution* d'axe Oz, qui s'évase par exemple vers le haut, Daniel Perrin propose d'écrire

$$S(z) \leq \frac{V(z+h) - V(z)}{h} \leq S(z+h)$$

PL12

pour $h > 0$. Il n'y a plus qu'à passer à la limite sous l'hypothèse que la fonction croissante S est continue.

Dans un tel cas on a encadré le volume entre z et $z + h$ entre ceux de deux cylindres de hauteur h, l'un de section $S(z)$ et l'autre de section $S(z+h)$, traduisant une propriété de croissance du volume qui tombe sous le sens. Certains se croient obligés de développer toute une axiomatique à cette occasion. L'ennui est que chaque exercice va donner lieu à sa petite axiomatique : pour les volumes, les moments d'inertie etc. S'il faut autant de théories que d'exemples à traiter, on est loin de l'universalité à laquelle prétendent les mathématiques.

Il y a cependant plus gênant encore. Rares sont les applications pour lesquelles la justification mathématique peut s'opérer aussi simplement. Dans un cas plus *général* qu'un cône de révolution, il faut s'y prendre autrement pour trouver le volume jusqu'à z. C'est là que Marc Rogalski suggère d'apprendre aux élèves à écrire une relation du type

$$\Delta V = S(z)\Delta z + o(\Delta z)$$

plutôt que

$$\Delta V \simeq S(z)\Delta z$$

comme des collègues physiciens peuvent faire. En effet, dans la dernière formule, il est juste suggéré que l'erreur est infiniment petite, ce qui n'exprime que la continuité et ne caractérise pas la dérivée. Or il faut que l'erreur soit infiniment petite *devant* Δz, ce qui est plus fort.

Malheureusement ce n'est pas parce que l'écriture est mathématiquement correcte que l'on est sauvé. Si l'on n'a pas l'intuition physique, rien ne permet d'arriver à la bonne formule.

24. Transpositions : la surface jusqu'à z.

Maintenant comment ferions-nous pour calculer une surface jusqu'à z, en prenant, pour simplifier, le cas d'une surface de révolution définie par une fonction

$$r = r(z) \ ?$$

La question est posée par Marc Rogalski à l'occasion de la modélisation d'un écoulement dans un tube poreux de section variable.

Il s'agit de trouver une relation du type

$$\mathrm{d}S = \ ? \ \mathrm{d}z$$

où le point d'interrogation est bien sûr à remplacer par la bonne réponse.

Une expérience faite par Marc Rogalski auprès de collègues enseignant la physique a donné

$$\Delta S \simeq 2\pi r(z)\Delta z$$

comme réponse unanime. Il y voit l'effet d'une notation ambigüe. Est-ce sûr? Il y aurait fort à parier que les collègues enseignant les mathématiques auraient répondu

$$\Delta S = 2\pi r(z)\Delta z + o(\Delta z)$$

PL13

ce qui est tout aussi inexact, à moins que, paralysés par le souci de la correction formelle, ils n'aient rien répondu du tout. En tout cas, sous l'une ou l'autre forme, on a assimilé localement la surface à un cylindre. Cela marchait pour le volume; cela ne convient malheureusement plus pour la surface. Et il ne s'agit pas de pinailler sur ce qui correct, légitime etc. Il s'agit de séparer une réponse exacte d'une autre qui ne l'est pas.

Il aurait par exemple fallu assimiler localement la surface à une zône de cône, ce qui aurait donné la relation

$$\mathrm{dS} = 2\pi r\sqrt{1+r'^2}\mathrm{dz}$$

qui est, cette fois-ci, exacte.

Comment expliquer un tel calcul? Le plus simple est de chercher la surface élémentaire qui correspond à $\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}z$. C'est celle d'un rectangle infinitésimal dont les côtés sont $r\mathrm{d}\theta$ d'une part et $\mathrm{d}l$ d'autre part.

Or

$$(\mathrm{d}l)^2 = (\mathrm{d}r)^2 + (r'\mathrm{d}r)^2$$

par Pythagore. Il n'y a plus qu'à sommer en θ. QED.

Maintenant on peut aussi passer par une zône de cône ou de sphère.

L'exemple, proposé par Michèle Artigue, de la surface d'un cône circulaire dont le sommet se projette sur le cercle de base est un peu plus difficile. Si l'on cherche l'élément de surface, en prenant comme paramètres le demi-angle θ et la hauteur z, on est amené à calculer la surface d'un parallélogramme de base $2rd\theta$ dont la hauteur est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont dz et le déplacement infinitésimal $\sin^2\theta dz$ sur la base perpendiculairement à la tangente . Cela reste élémentaire en principe. Cependant il arrive un moment où il vaut mieux disposer de vrais outils pour attaquer les problèmes et c'est le cas dans cet exemple.

25. Transpositions : l'écriture $dy = f'(x)dx$.

Dans les programmes officiels de Terminale S, à propos de l'écriture différentielle $dy = f'(x)dx$, on peut lire le commentaire qui suit en colonne de droite.

> *On se contentera d'expliquer que l'écriture différentielle exprime symboliquement l'égalité*
>
> $$\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon(\Delta x)$$
>
> *où ϵ tend vers zéro avec Δx.*

La rédaction est assez étonnante; elle laisse normalement entendre que $\epsilon(\Delta x)$ tend vers zéro quand Δx tend vers zéro, alors que l'on attendait que $\epsilon(\Delta x)$ soit infiniment *petit* devant Δx. C'est justement la confusion signalée par Marc Rogalski dont nous avons parlé précédemment.

Est-ce un lapsus comme chacun en fait? Il semblerait que oui, la correction ayant été apportée depuis. Au moins cela montre, s'il en est encore besoin, que les élèves auront beaucoup de mal à saisir le sens exact de la propriété cherchée.

Notre critique n'est pas là. Elle est dans le fait qu'on ne confère à la notation différentielle qu'un rôle purement symbolique alors qu'en réalité c'est elle qui porte le sens. Là encore les exposés historiques de notre université nous l'illustrent magnifiquement. Qu'on regarde la façon dont Jean Bernouilli s'exprime par exemple !

On peut encore lire dans les mêmes programmes ce qu'ils attendent de cette notation différentielle.

> *La notation différentielle est ici un moyen mnémotechnique de retrouver la formule* [de dérivation d'une fonction composée].
>
> *A l'occasion des exercices, on rencontre des relations entre grandeurs de la forme $x = f(t)$, $y = g(x)$, $v = u(t)$ etc., où t représente un temps, x et y des longueurs, v une vitesse : dans ces conditions $f'(t)$ est une vitesse, $g'(x)$ un nombre et $u'(t)$ une accélération, ce que l'écriture différentielle met en valeur.*

Remarquons vite que la deuxième citation n'a pas peur de se placer dans le cadre de grandeurs physiques, ce qui est une bonne chose; ce serait encore mieux si les sujets du baccalauréat en tenaient compte.

Sinon c'est quand même encore une fois réduire la notation différentielle à bien peu : juste retrouver ou mettre en valeur. En même temps c'est l'entourer de beaucoup de mystère. Si l'on n'avait pas peur d'écrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

une dérivée,

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

une différentielle, et

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

la formule de dérivation d'une fonction composée, la notation différentielle se comprendrait toute seule.

26. Longueur, surface.

Comment calculer la mesure de volume d'une variété plongée, une longueur ou une surface par exemple? La réponse est que l'élément de volume se calcule dans l'espace tangent. On peut le justifier de diverses façons, par exemple en épaississant la courbe ou la surface pour lui donner du volume et en prenant une limite convenable quand l'épaisseur tend vers 0. Il reste que c'est un peu à prendre comme une définition, dont la légitimité résultera de ce qu'on peut en faire.

Qu'est-ce qui permet par exemple d'assimiler, de ce point de vue, une petite tranche d'une surface de révolution à une tranche de cône? C'est la coïncidence des plans tangents.

Dans le même ordre d'idées, on peut se demander pourquoi une surface régulière admet un plan tangent. Vue la façon dont on définit une surface régulière, cela n'a rien d'étonnant. C'est du côté des énoncés qui permettent de montrer qu'une surface est régulière qu'il faut chercher un contenu.

Définir le volume en dimension maximum, comme l'aire plane, ne cache aucune difficulté. On peut considérer sans grand inconvénient que toute partie admet un volume bien défini, éventuellement infini. Il faut en effet l'axiome du choix général pour produire un contre-exemple. La question est beaucoup moins simple pour une sous-variété. En dimension 1, pour une courbe tant soit peu régulière, on peut encore définir la longueur en passant à la limite sur celle de lignes brisées. En dimension 2, fût-ce pour une variété très régulière, on ne peut pas définir la surface en passant à la limite sans précaution sur celle de variétés triangulées.

Il n'y a donc pas d'autre façon que de se ramener au cas linéaire. Par construction le différentiable est modelé sur le linéaire. On retrouve ainsi, au niveau 2 des structures avec la notion de variété, la proportionnalité des petits accroissements de la Physique.

Un exemple typique de cette façon de voir est donné par Jean-Pierre Serre lorsqu'il veut caractériser localement les immersions et submersions en les ramenant par difféomorphisme local à des modèles linéaires simples.

Remarque technique. Dans la typographie de ce texte on a essayé de respecter pour le mieux, dans l'esprit, les consignes de présentation. Cependant on ne retrouvera pas exactement ce qui fait la signature de tel logiciel dominant du commerce. La composition a été réalisée avec TEX , le système de Donald Knuth dont il y existe des implémentations en logiciel libre. Ce dernier produit ce qui se rapproche le mieux de la composition traditionnelle des meilleurs ateliers de typographie scientifique. Dans sa version de base, *plain*, et avec ses polices natives, *computer modern*, qui sont assez proches de *Times* mais s'adaptent mieux aux formules mathématiques, il ne contient aucune référence géopolitique. Certes, il a fallu utiliser une machine et quelques accessoires logiciels venant de l'industrie, mais ces derniers ne laissent pas leur marque.

A l'exception du titre, le texte est en corps de 10 magnifié dans le facteur 1,2 pour le format A4, ce qui en fait l'équivalent d'un corps de 12. Ce faisant on s'inscrit dans la règle typographique qui veut qu'une ligne ne dépasse pas de façon significative les 80 caractères, condition d'un lecture confortable. L'interligne supplémentaire par défaut de 2 points conduit, après magnification, à un interligne total de 14,4 points. On a conservé un alinea de 15mm pour mettre en valeur l'insertion de citations. Le texte ne demandant pas de structuration complexe, on s'est limité à des sous-titres intercalaires numérotés, pour faciliter le repérage.

On reste dans l'esprit de ce qui est demandé et espère que le ministère s'accommodera de tout cela car il n'est pas à notre connaissance une succursale de telle entreprise quasi monopolistique bien connue.

Bibliographie.

André (Bernard). Le chariot fou, en ligne sur le site de l'IREM de Lorraine :
http://www.irem.uhp-nancy.fr/Cons/Chariot.htm

Artigue (Michèle). L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives, Repères IREM 54, pp 23-39, 2004

Bkouche (Rudolf). De la transposition didactique, Didactiques n°3-4, IREM de Lorraine, 1999

Brousseau (Guy). Le calcul humain des multiplications et divisions de nombres naturels, 2005

Brousseau (Guy). Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels? , Actes du 3ème congrès des sciences de l'éducation, Apport des disciplines fondamentales aux sciences de l'éducation, tome 1, pp 364-378, 1973

Buisson (Ferdinand). Intuition et méthode intuitive, Dictionnaire de pédagogie et d'instruction publique, 2ème partie, tome 2, pp 1374-1377, Hachette, 1887

Bulletin officiel de l'éducation nationale, janvier 1979

Chevallard (Yves). La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné, La pensée sauvage, réédition revue et augmentée, Grenoble 1991

Chevallard (Yves) et Bosch (Marianne). Les grandeurs en mathématiques au collège, Partie I : une Atlantide oubliée, Petit x 55, pp 5-32

Chevallard (Yves) et Bosch (Marianne). Les grandeurs en mathématiques au collège, Partie II : mathématisations, Petit x 59, pp 43-76

Delord (Michel). Michèle Artigue et l'âge du capitaine, en ligne :
http://michel.delord.free.fr/captain1-0.pdf

Delord (Michel). A propos des nombres concrets et abstraits : un témoignage historique sur l'école primaire française, 2004, en ligne :
http://michel.delord.free.fr/banff.pdf

Direction de l'enseignement scolaire. Grandeurs et mesure à l'école élémentaire, mathématiques, document d'accompagnement, Les nouveaux programmes de l'école primaire, en ligne sur le site :
eduscol.education.fr

Direction de l'enseignement scolaire. Documents d'accompagnement de 1ère S, en ligne sur le site :
eduscol.education.fr

Direction de l'enseignement scolaire. Baccalauréat série S, sujets zéros, en ligne sur le site :
eduscol.education.fr

Dhombres (Jean). Historique et problèmes de calcul, Actes de la commission interIREM du second cycle, 2004/2005

ERMEL, INRP

Ferrier (Jean-Pierre). L'infirmité des mathématiques enseignées vis-à-vis de la science, 2004, en ligne sur le site de l'IREM :
http://www.irem.uhp-nancy.fr/Cons/Infirm.htm

Goblot (Rémi). Agrégation de mathématiques, thèmes de géométrie, Masson, 1998

IREM de Besançon, groupe maths-physique, 2004

Journal officiel, programmes de terminale S, 4-8-2001

Lang (Serge). Linear Algebra, Springer

Lebesgue (Henri). La mesure des grandeurs, L'enseignement mathématique, Genève 1931

Lombard (Philippe). Du sens des opérations à l'algébrisation des problèmes concrets : quel niveau de culture se fixer pour la fin du collège et par quels chemins s'en rapprocher, conférence au séminaire inter-IREM de Roscoff, 2005

Muniglia (Michèle), Beaujan (Josette), Raulet (Isabelle). La lecture d'énoncés et le sens des opérations, publication de l'IREM de Lorraine, 2002.

Perrin (Daniel). Actes du colloque interIREM sur le second degré, Limoges, 2004

Perrin (Daniel). Actes de la commission interIREM du second cycle, 2004/2005

Poincaré (Henri). Les définitions en mathématiques, L'enseignement mathématique, 6, pp 255-293, 1904

Pressiat (André). Grandeurs et mesures : évolution des organisations mathématiques de référence et problèmes de transition, Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques, 2001

Rogalski (Marc). Mise en équation (version pour terminale S), atelier pour le DEUG, USTL, 1990

Serre (Jean-Pierre). Lie algebras and Lie groups, lectures given at Harvard university, 1964

Souriau (Jean-Marie). Calcul linéaire, PUF, 1954

Whitney (Hassler). The mathematics of physical quantities, part II : quantity structures and dimensional Analysis, American Mathematical Monthly, 1968

Notes de lecture