Transpositions didactiques à l'université

par J.-P. Ferrier, IREM de Lorraine

1. Introduction.

La théorie de la transposition didactique a été introduite par Yves Chevallard [5] pour expliquer l'inéluctable transformation que subit le "savoir savant" devenant "savoir enseigné". Bien que cette théorie ait une portée générale, elle se réfère, typiquement et pour simplifier, à un savoir savant de type universitaire et à un savoir enseigné au collège ou au lycée.

Dans la controverse portant sur l'exemple de la distance, on lui a opposé un savoir enseigné étendu à tout ce qui est enseignable, c'est-à-dire à l'ensemble de la production scientifique (1) , et un savoir savant très vaste, comprenant tout le "savoir pérenne". Cependant ce dernier savoir repose sur une définition d'ordre épistémologique ; il n'a pas sa place dans un discours didactique au sens strict.

Il est permis de penser qu'il y a une part d'arbitraire dans la définition du savoir savant comme dans celle du savoir enseigné. En fait rester dans un cadre didactique exige de se référer à des savoirs de nature plus ou moins institutionnelle. Le choix des institutions reste ouvert. On peut considérer que tout acte d'enseignement définit un savoir savant et un savoir enseigné, et que l'on pourra étudier la transposition didactique qui opère de l'un vers l'autre. Cela nous semble de nature à protéger la transposition didactique de certaines controverses négatives qu'elle a pu appeler.

Nous choisissons ici *Bourbaki* comme référence en matière de savoir savant et l'*enseignement universitaire* courant pour définir le savoir enseigné. Par Bourbaki on entend plus généralement une tradition qui s'y réfère, comprenant les ouvrages des grands maîtres français et étrangers, sans se tenir au contenu exact du "traité". Quant à l'enseignement universitaire, on pense moins aux ouvrages de référence ou aux universités de prestige qu'à ce qui fait le pain quotidien des universités de base, dans un contexte situationniste au sens de Guy Brousseau. Cela étant on passera sans prévenir de la première année de DEUG à la maîtrise, car les phénomènes observés y sont de même nature.

Nous nous plaçons donc dans un cadre strictement didactique, dans la ligne de Guy Brousseau, d'Yves Chevallard et de Michèle Artigue, à l'exclusion de toute référence épistémologique. Ainsi l'inéluctable "trahison" que va subir le savoir savant dans le processus de transposition sera à prendre dans un

(1) A l'intérieur de la production scientifique, les mathématiques, comme le disait Jacques-Lions, sont la discipline qui s'enseigne par excellence : on enseigne ce qui est général par principe d'économie. Par exemple le traité de Bourbaki a été conçu comme un ouvrage d'enseignement

sens technique, sans allusion à l'origine logique, à la valeur ou à la portée des concepts.

Nous allons chercher à déterminer quelques constantes dans le processus de transposition, en mettant en avant plus spécialement trois d'entre elles, qui sont, semble-t-il, spécifiques à l'enseignement considéré.

1. Un chaînon manquant.

Il est assez naturel qu'un universitaire répugne à imaginer que son propre enseignement puisse être l'objet d'une transposition didactique, alors qu'il n'aura aucune réticence à penser que le phénomène s'applique pleinement dans les degrés qui précèdent l'université : l'école, le collège ou le lycée. Pourtant si l'on prend l'image de Guy Brousseau, pour qui la transposition est aussi nécessaire à l'enseignement que les frottements sont nécessaires au mouvement, il n'y a pas lieu de faire une exception. Et cela même si l'universitaire en question se flatte d'être à l'abri de toute intention pédagogique au point d'en croire son discours "dépollué".

Il est vrai que l'on cherche en mécanique à réduire les frottements et qu'une stratégie pédagogique peut choisir de limiter le phénomène de transposition. Bourbaki en est un exemple. Si l'on excepte quelques options, comme par exemple celle de publier un "fascicule de résultats" de théorie des ensembles avant les fascicules correspondants, on ne trouve pas toujours le savoir en amont dont Bourbaki serait la transposition ([2]) . Il reste que cet exemple est marginal, comme la lecture de Bourbaki est assez marginale aujourd'hui.

Reprenons plutôt la controverse autour de la notion de distance. Il est normal de faire remarquer à Yves Chevallard, comme le font Philippe Lombard et Rudolph Bkouche, que la considération d'une distance en géométrie a été très antérieure aux travaux de Fréchet sur les espaces fonctionnels. Pourtant, définissant ici le savoir savant comme le savoir estudiantin et le savoir enseigné comme celui qu'on destine au collège, il ne fait pas de doute que l'introduction des distances dans tous les cours de topologie générale, introduction motivée par les travaux de Fréchet, a été le point de départ d'une transposition vers l'enseignement du collège. Cependant si l'on y regarde de plus près le savoir estudiantin en question est déjà le fruit d'une transposition.

En effet le savoir savant, à l'époque de Fréchet mais encore aujourd'hui, s'intéresse d'abord à la convergence des fonctions. Il se trouve que certains types de convergence peuvent se décrire à l'aide d'une fonction distance. Mais d'abord, il y a d'un côté les cas, très fréquents, où la convergence découle de la notion plus puissante de norme et les cas, fréquents aussi, où une distance

([2]) Pour cette raison on peut envisager de parler de *positionnement didactique*, couvrant ainsi les cas de transposition, de détransposition et d'autres cas marginaux plus difficiles à classer.

est insuffisante. Ensuite la possibilité d'utiliser une distance avec l'inégalité triangulaire exacte tient du miracle; au début on avait choisi une propriété plus faible, dont on s'est aperçu ensuite qu'elle n'étendait pas la catégorie des espaces concernés. A l'inverse le savoir savant ne manque pas de vraies distances avec la géométrie riemannienne. Ici la transposition a consisté à se restreindre à l'Analyse, occultant d'une part les problèmes à l'origine de l'introduction des distances et d'autre part la cascade des catégories qui entourent celle des espaces métriques.

Autrement dit, non seulement Yves Chevallard a bien raison de voir une transposition didactique à propos des distances, mais il a même deux fois raison plutôt qu'une. Et, pour finir, deux trahisons peuvent aboutir à une forme de fidélité.

Avant de nous intéresser aux transpositions spécifiques du niveau universitaire, qui sans doute celles qui ont été les moins étudiées jusqu'ici, considérons d'abord des transpositions universelles, qui existent à tous les niveaux, dans leur déclinaison pour le niveau universitaire.

Types universels.

3. Le choix des définitions.

Une attitude très répandue, commune aux concepteurs de programmes et aux rédacteurs de polycopiés, consiste à choisir entre des définitions équivalentes pour un même concept celle qui coûtera le moins de relations à établir, celle qui permettra le mieux la négociation du contrat.

Dans le savoir savant pris dans le sens le plus large possible, on dispose a priori d'une vision d'ensemble des applications d'une notion telles qu'elles existent à un moment donné de l'avancée de la Science. Il est naturel de choisir pour une définition la propriété qui semble la plus centrale dans le dispositif, ce qui revient à minimiser le parcours à accomplir pour atteindre les autres propriétés.

En revanche la définition d'un savoir enseigné va restreindre souvent considérablement le domaine. Minimiser le parcours en transposant peut conduire alors à une "trahison" de ce que l'on a envie d'appeler le savoir tout court, et qui est en fait un savoir savant non nécessairement spécialisé.

Le phénomène n'est pas spécifique à l'université. Quand on définit aujourd'hui en seconde deux triangles *semblables* ou "de même forme" comme ayant deux angles égaux, on réduit les parcours. Il n'y a plus qu'à faire le lien avec la proportionnalité des côtés. Cependant il y a bien "trahison", par rapport à un autre savoir qui a été longtemps enseigné, suivant lequel la similtiude était une égalité à agrandissement ou réduction près ([3]) . Ce savoir savant

---

([3]) Autrement dit deux triangles sont semblables si l'un est égal à un homothétique de l'autre.

là pouvait adhérer à des connaissances pratiques et technologiques. En effet, alors que le savoir enseigné a tendance à amplifier la séparation disciplinaire, phénomène qu'on constate particulièrement ces dernières décennies, le savoir savant n'a pas de raison de s'imposer cette contrainte.

Passons à l'université pour y constater des comportements pédagogiques analogues. Lorsqu'on veut revenir, dans les premières années, sur la définition du PGCD de deux nombres entiers a, $b \geq 1$, il arrive que l'on s'y prenne ainsi : le PGCD sera le générateur positif de l'idéal $\mathbf{Z}a + \mathbf{Z}b$ de $\mathbf{Z}$ engendré par a et b. Ce faisant, le théorème de Bézout n'est plus qu'une trivialité. Cependant l'on a opéré une transposition à partir d'un savoir savant pourtant très modeste qui comprendrait un savoir enseigné antérieur, celui dans lequel le terme PGCD est associé à sa signification primitive de "plus grand commun diviseur".

Lorsque, dans les nouveaux programmes des classes préparatoires, l'on introduit des fonctions intégrables qui sont supposées continues par morceaux, c'est le même genre de transposition qu'on opère.

Il en est encore de même lorsque quelques collègues parviennent à donner une définition de la connexité d'une partie d'un espace métrique qui fait économiser une petite propriété d'incidence par rapport à la définition naturelle. Le fait qu'ils considèrent une partie plutôt qu'un espace sera examiné plus loin. Pour le moment on retiendra seulement que la petite économie réalisée rend la définition incompatible avec l'étude de topologies provenant de l'Algèbre, comme la topologie de Zariski, les espaces irréductibles etc.

Ces transpositions là ont un caractère en commun. Le passage au niveau supérieur nécessitera systématiquement d'opérer une détransposition didactique au sens d'André Antibi et de Guy Brousseau.

Cela étant on n'a pas toujours conscience de l'ampleur de l'ingénierie pédagogique que ce type de transposition génère. Elle est favorisée par la liberté de l'enseignement universitaire, par la concurrence entre ce dernier et celui des classes préparatoires. C'est la raison pour laquelle elle est un peu moins fréquente au niveau des premier et second degrés.

4. La fuite en avant dans le formalisme.

L'abus du formalisme est un trait de la modernité dans l'enseignement. On le trouve déjà répandu dès le lycée.

Par ailleurs l'appel au formalisme peut caractériser une stratégie de contournement. Nous en verrons un exemple plus loin à propos de la borne supérieure.

Nous allons illustrer notre propos par un seul exemple, en nous appuyant sur l'étude très complète réalisée par Viviane Durand-Guerrier et Gilbert Arsac sur les "méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques", sur la "spécificité de l'Analyse" ainsi que les "implications didactiques" [[8]]. Les auteurs se placent à un niveau universitaire d'enseignement de l'Analyse en prenant comme référence des publications destinées à des chercheurs. En plaçant l'acte d'enseignement sous cet éclairage, ils concluent, à juste titre, que la notion de limite n'a pas subi un processus de transposition qui aurait complètement déformé son sens.

Nous allons montrer qu'en plaçant autrement l'éclairage sur cette même notion, on peut découvrir une transposition didactique, affectant au moins directement la façon de résoudre les problèmes à défaut d'en changer radicalement le champ. Nous inclurons dans notre savoir savant le savoir-faire "paramathématique" au sens de Chevallard qui est relatif à la démonstration. Ce dernier est simplement le fruit d'une longue pratique collective. Les auteurs font une partie du chemin. Ils ont noté que la majorité des mathématiciens ne sent pas le besoin d'une théorie sur le sujet et qu'historiquement les théories logiques sont bien postérieures à la pratique de la démonstration, laquelle remonte aux origines. Cependant, en cherchant à expliquer ce savoir-faire à travers l'analyse de passages accidentels de deux manuels ([4]) , passages qu'ils considèrent sans doute et à juste titre plus représentatifs de l'enseignement courant, ils restreignent le champ de ce savoir-faire et cela les conduit naturellement à minimiser la place de la transposition.

La démonstration pratiquée par les mathématiciens a toujours été fondée sur le sens, c'est-à-dire sur le sentiment intime d'une progression vers un but qu'on s'est fixé. Il ne s'agit pas seulement de donner une coloration sémantique à des règles syntaxiques comme celles de Copi proposées par les auteurs, choix tout à fait légitime par ailleurs. Lorsque Jean Dhombres nous présente le rôle joué par Descartes dans le développement du calcul algébrique, il nous dit que "pour Descartes, le calcul pense". C'est donc beaucoup plus fort. Et d'ailleurs l'ignorer a conduit certains à préconiser d'épargner aux élèves l'effort du calcul pour mettre en avant le sens. Pensée et calcul ne sont pas seulement compatibles, ils sont indissociables. Et il est original qu'en voulant libérer la pensée du calcul on en vienne parfois à proposer un calcul sans pensée.

Voyons de près la dimension de transposition en prenant un problème. Les auteurs donnent l'exemple suivant : *dans un espace métrique E, soient A une partie fermée et B une partie compacte; si elles sont disjointes, alors* $d(A,B) > 0$. Un élève propose une démontration qui démarre comme suit.

1 $\forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A,\ \exists y \in B,\ 0 \leq d(x,y) \leq \frac{\epsilon}{2}$.

2 Comme $x \in A$, et A fermé $\Rightarrow\ x \in \overline{A} \Rightarrow \exists (x_n) \subset A,\ x_n \to x$.

etc.

([4]) Dans l'ouvrage de premier cycle de Christian Houzel, il s'agit d'un cas rare où l'auteur ne s'exprime pas suivant ses habitudes. Dans l'ouvrage d'Analyse de Gustave Choquet, on perçoit une adaptation à un auditoire qui varie suivant l'importance ou la difficulté du sujet et la transposition est ainsi plus ou moins marquée.

Passons sur la misère rédactionnelle qu'un Roger Godement aurait qualifié de "niveau zéro de l'écriture". Passons encore sur l'utilisation abusive du signe d'implication logique qui remplace ici "donc". Ces deux seuls points seraient déjà disqualifiants à l'aune du savoir savant que nous avons pris pour référence. Mais il y a pire.

Les auteurs nous informent que l'élève raisonne par l'absurde sans le dire. Cela suffit à interdire à la démonstration en question d'avoir du sens. La ligne **2** apporte une preuve définitive. Elle n'est pas logiquement fausse; mais elle ne porte aucun sens. Pourquoi introduire une suite inconnue, là où la suite constante x suffirait? Pourquoi introduire $\overline{A}$?

La suite de la démonstration fait apparaître quelquepart une erreur dans la manipulation des variables. Chaque collègue consulté a vu tout de suite que la démonstration était fausse parce qu'elle n'utilisait pas la compacité. Mais, chose extraordinaire, ces collègues ont accepté de lire cette démonstration. S'il n'y avait pas eu déformation du champ des problèmes par transposition didactique, ils n'auraient simplement pas dû.

Types spécifiques

5. Concepts de niveau deux.

Je dois à l'un de mes collègues, Yves Gaillard, la remarque qui suit. Ayant constaté que les étudiants peinaient pour comprendre la notion de borne supérieure, il s'est rendu compte que les notions de majorant, comme de plus petit élément étaient parfaitement acceptées. Ce ne sont donc pas les composants conduisant à la notion de borne supérieure qui posent problème en eux-mêmes mais leur empilement. Si l'on attribue un niveau à chaque composant, on a affaire à une notion de *niveau deux*. C'est là que se situe l'obstacle épistémique.

La réponse pédagogique à cet obstacle relève du *contournement*. Puisqu'on ne peut pas se référer à la définition première, on travaillera sur les propriétés formelles du symbole sup. Ainsi apprendra-t-on une règle comme

$$\sup_{(i,j)\in I\times J}(a_i+b_j)=\sup_{i\in I}a_i+\sup_{j\in J}b_j$$

ou toute autre de même nature. On voit pointer la "trahison" puisque, même si une règle de ce type a été formulée, la tradition bourbachique demanderait de pouvoir s'en passer ; on doit savoir expliquer que le membre de droite est un majorant des a_i+b_j, et donc de leur borne supérieure.

Suivant cette tradition, on s'attendrait à ce que l'étudiant décompose le concept en niveaux à chaque utilisation. Or, le contrat didactique sous-jacent en un tel cas, tel que considéré par Guy Brousseau [3], veut qu'une définition donnée soit utilisable sans avoir à être mise en pièces détachées ; l'exigence bourbachique brutale n'autorise aucun contrat négociable.

Dans un constructivisme à la Piaget où l'accès au concept comme objet passe nécessairement par un "processus" d'apprentissage, l'impossibilité de mettre en place ledit processus rend le concept inaccessible.

Plus précisément, on notera que le concept n'évoque rien de familier, contrairement à la notion de dérivée qui peut s'appuyer sur l'idée de vitesse, ou mieux encore de tangente. La seule idée familière, dans cette affaire, est celle de plus grand élément. Et c'est évidemment le piège. On doit donc s'en tenir strictement à un ensemble de pratiques. La stratégie de contournement s'impose si l'on se réfère à l'approche anthropologique d'Yves Chevallard [6]. La nécessité d'obtenir des résultats implique en effet la mise en place de "tâches routinières", comme l'utilisation de formules toutes faites du type indiqué.

Voici un autre exemple. On peut parler sans difficulté majeure d'une partie ouverte ou fermée dans un espace numérique. Tant qu'on touche à une partie d'un ensemble on reste au *niveau un*.

En revanche on passe au *niveau deux* quand on parle d'une partie de l'ensemble des parties. C'est ce qu'on fait couramment en parlant d'une tribu en théorie des probabilités. L'obstacle épistémique est évident. L'étudiant moyen n'a pas besoin d'être poussé longtemps pour affirmer qu'une sous-classe d'une tribu contenant la partie pleine contient toute la tribu.

La réponse pédagogique est ici aussi un contournement et elle donne lieu à son ensemble de tâches routinières. Beaucoup d'énoncés ne font pas directement référence au modèle. Ils ne nécessitent pas de garder à l'esprit une quelconque tribu d'évènements.

On peut se demander pourquoi, dans le cas des bornes supérieures ou des tribus, on ne mettrait pas en place une ingénierie didactique plus élaborée comme on l'a proposé dans le cas des limites ou des dérivées au lycée [1]. C'est probablement pour une question de coût, c'est-à-dire de temps disponible. Il est finalement plus efficace de jouer sur l'objet mathématique lui-même, que l'on redéfinit par un ensemble réduit de pratiques. C'est bien le fait d'une transposition didactique. La liberté universitaire en favorise l'apparition.

6. Concepts pluriels.

Nous allons considérer des exemples où la transposition didactique est encore plus évidente. Il ne s'agira plus de concepts empilés mais de *concepts pluriels*, ce qui reste plus ou moins dans la même logique quand même.

Dès le début de l'enseignement universitaire on introduit la notion d'espace vectoriel. Dans notre savoir savant, on y attache tout de suite la notion d'application linéaire. D'une part cela correspond au modèle général. D'autre part on présente la linéarité comme l'idée de base, indépendamment des structures : équation linéaire, équation différentielle linéaire, phénomène linéaire ... avec en contrepoint tout ce qui relève du non-linéaire.

Un savoir enseigné qui commence à se développer repousse beaucoup plus tard, d'un semestre à l'autre par exemple, les applications linéaires. C'est une façon de lisser l'obstacle didactique que représente la donnée plurielle d'une application $f : E \to F$, donnée nécessitant la présence de deux espaces avec deux structures et d'une application entre eux. Travailler d'abord dans un espace unique fait partie du contrat didactique. Cela impose la transposition.

Les choses deviennent encore plus claires avec la notion de sous-espace vectoriel. Un *sous-espace* est d'abord un monomorphisme ([5]) . Pratiquement on parlera de sous-espace vectoriel pour noter tout de suite que c'est un espace vectoriel et que l'injection canonique du petit espace dans le grand espace est linéaire. En même temps on notera que tous les espaces vectoriels rencontrés le sont comme sous-espaces d'un petit nombre d'espaces de base.

La transposition va reléguer au second plan le fait qu'un sous-espace vectoriel porte une structure et camoufler l'application linéaire. On préfèrera vivre avec la donnée appauvrie d'un grand espace muni d'opérations et d'une partie de ce dernier possédant un certain nombre de propriétés ; cela suffit pour parler de sous-espace engendré ou de partie génératrice. Si l'on doit introduire un espace vectoriel, plutôt que de le présenter comme un sous-espace, on préfèrera y définir directement les opérations.

La même transposition se rencontre encore plus fréquemment en Analyse. En topologie générale, le savoir savant impose que l'on parle d'applications continues aussitôt après avoir introduit les structures appropriées, métriques ou topologiques. Or il est courant de voir la continuité reléguée dans l'un des derniers chapitres. La raison est la même que celle indiquée pour les applications linéaires.

C'est encore plus frappant pour ce qui concerne les sous-espaces. Le fait de considérer un sous-espace d'un espace métrique comme un espace métrique à part entière, donc de considérer la structure induite, est de plus en plus souvent évacué de l'enseignement dispensé, et ce jusqu'en maîtrise. On définira les parties compactes ou connexes avant de parler d'espace compact ou connexe. On camouflera le caractère intrinsèque de ces propriétés autant qu'on le pourra.

Voici un exemple, construit ad hoc et extrême, mais inspiré d'un cours réel et déjà ancien. *Soit A un espace topologique. Soit B une partie de A et soit f une application de B dans* $\mathbf{R}$. *On suppose f continue en tout point d'une partie C de B. On se donne enfin une partie compacte D de C. Alors f est bornée sur D.*

Cet exemple nous revèle pleinement la stratégie. Le contrat didactique implique le refus absolu de mettre en place d'autres données que celles considérées

([5]) En langage pédant on dit que c'est un morphisme au-dessus d'une inclusion ensembliste; autrement dit c'est une application linéaire f pour laquelle on a $f(x) = x$.

par l'énoncé. Si l'on préfère, les indispensables tâches routinières s'imposent pour coller exactement à la réalité des exercices.

La dualité fournit aussi un exemple où l'on voit opérer la transposition. La notion d'espace dual finit par être admise à un certain niveau du savoir enseigné. C'est un espace d'applications linéaires et donc une donnée déjà complexe ; cependant elle se construit progressivement. On considère d'abord E, puis son dual E'. En revanche la donnée d'une dualité, comme celle définie par l'intégrale $\int fg$ entre L^p et L^q, où q est l'exposant conjugué de p (6) , est écartée alors qu'elle peut sembler infiniment plus basique que les considérations qui la remplacent. En effet, la donnée simultanée d'un espace E, d'un espace F et d'une forme bilinéaire est résolument *plurielle*. C'est encore un obstacle évident.

7. Concepts dynamiques.

A fortiori les constructions plus élaborées qui font partie du savoir savant sont-elles exclues du savoir enseigné: espace quotient, complété, conjugaison, isomorphisme etc.

Toutes ces constructions ont un point commun. Elles ont pour effet de changer l'objet sur lequel on travaille. Passer au quotient revient à rendre vraiment nul tout ce qui n'est pas porteur de l'information à laquelle on s'intéresse. Prendre le complété permet de prendre des limites qui n'auraient pas pu exister sans cela. Conjuguer par l'action d'un groupe, ou faire opérer un isomorphisme permet de se ramener à une situation particulière plus commode. Toutes ces opérations sont *dynamiques*.

On préfèrera travailler *in situ*, sans jamais changer l'espace de travail. Cela peut donner lieu à un corps complet de doctrine, où l'on adapte les méthodes à ces exigences.

On peut rattacher à cela le traitement d'un problème de géométrie projective où l'on se permet d'envoyer des points à l'infini. On notera que travailler sur des concepts dynamiques n'implique pas de changement de cadre, au sens de Régine Douady [7]. Ce n'est pas comme appliquer les outils du calcul algébrique en prenant une base.

Maintenant on peut se demander si les difficultés ne viennent pas précisément d'une certaine paresse quant aux changements possibles de cadre. Les quotients, les conjugaisons sont ainsi trop rarement illustrés par la Géométrie, dans les cas déjà rares où l'on en parle sérieusement.

De même l'enseignement universitaire laisse-t-il souvent trop peu de place à l'espace de Hilbert. On tient avec lui un exemple sur lequel on peut travailler

(6) La dualité est le pendant naturel du produit scalaire ou hermitien que l'on considère pour les espaces L^2. D'une certaine façon le savant moins transposé est, comme pour les distances, plus proche du savoir enseigné élémentaire.

dans trois cadres différents : 1) le cadre de l'Analyse, avec les séries ou intégrales de Fourier, 2) le cadre de l'Algèbre avec l'existence d'une base en un sens généralisé, 3) le cadre de la Géométrie enfin. Il est significatif que, dans l'espace de Hilbert, les démonstrations qui consistent à se placer dans un plan euclidien sont délaissées par les étudiants comme par les enseignants.

Les concepts dynamiques ont finalement la double propriété d'être un passage souvent obligé pour opérer des changements de cadre et de nécessiter de tels changements pour faciliter leur compréhension. Le sujet mériterait sans doute une étude sérieuse, dans le prolongement de la théorie sur les cadres.

8. Tentative de conclusion.

La difficulté ici est qu'on ne peut se fonder que sur des souvenirs ou des traces écrites pour témoigner de l'enseignement universitaire dispensé ici ou là. La grande liberté qui règne à ce niveau rendra difficile une véritable expérimentation. Pourtant les phénomènes qu'on y constate sont peut-être plus spectaculaires encore qu'ailleurs.

Il est en effet remarquable que la nécessaire négociation du contrat pédagogique conduise à redéfinir les objets mathématiques de façon aussi radicale, imposant à l'ensemble des pratiques qui en seront le fondement une réduction à ce point significative et définitive.

On a vu comment opérait cette redéfinition, à la base de la transposition didactique, en portant sur

- les concepts empilés,
- les concepts pluriels,
- et les concepts dynamiques.

Maintenant on peut aussi se poser la question du pourquoi. Il y a au moins deux façons de répondre.

La réponse anthropologique d'abord, qui est en réalité une absence de réponse. L'instauration de méthodes routinières n'est qu'un fait de comportement parmi d'autres.

Sinon on peut considérer l'intentionnalité. Les choix opérés en matière de stratégie pédagogique sont en partie motivés par un souci de simplicité. Cependant il arrive que ces choix amènent aussi à compliquer le discours. Il est certain qu'il y a encore derrière eux l'histoire personnelle de l'enseignant concerné. La façon dont il a appris lui-même un concept influence de façon indiscutable le cheminement qu'il choisit pour l'expliquer. La référence à l'histoire de la Science est moins claire. Peu d'enseignants y puisent leur inspiration ; de plus on lui fait souvent dire ce que l'on veut.

Quittons, pour finir, un moment le domaine de la didactique. A propos d'un concept comme celui d'un sous espace $F \subset E$, nous avons donné dans notre savoir savant une version déployée en un morphisme $F \to E$. De façon générale, l'explication "savante" se fera par des déploiements. L'histoire nous dira s'ils sont tous légitimes.

REFERENCES

[1] Artigue M. et al., 1997, L'intégration de calculatrices complexes à l'enseignement des mathématiques au lycée, *Cahier spécial DIDIREM n° 4*, IREM de Paris7.

[2] Brousseau G., 1986, Fondements et méthodes de la Didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2) 33-115.

[3] Brousseau G., 1990, Le contrat didactique: le milieu, *Recherches en Didactique des mathématiques*, 9(3) 309-336.

[4] Chevallard Y., Joshua M.A., 1982, Un exemple d'analyse de la transposition didactique — la notion de distance, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3(2) 157-239.

[5] Chevallard Y., 1991, La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné, *La pensée sauvage*, deuxième édition, Grenoble.

[6] Chevallard Y., 1992, Concepts fondamentaux de la didactique : perspective apportée par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques* 12(1) 73-112.

[7] Douady R., 1986, Jeux de cadres et dialectique outil / objet, *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2) 5-31.

[8] Durand-Guerrier V., Arsac G., 2003, Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'Analyse. Quelles implications didactiques?, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(3) 295-342.