

La démonstration à un pas

J.-P. Ferrier, mai 2004

Considérons la figure constituée d'un quadrilatère $ABCD$ dans laquelle on a marqué un angle droit en A et en D . On demande de montrer le parallélisme des côtés AB et DC . pour cela on dispose d'un boîte à outils (en mémoire) dans laquelle on trouve l'énoncé suivant:

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, elles sont parallèles entre elles.

C'est un exemple de "démonstration à un pas". On désigne par là un syllogisme pur. Or il est difficile, et même impossible tant qu'on n'a pas rencontré la logique formelle, de comprendre qu'il y a quelque chose dans le syllogisme. Ce qui compte, dans une démonstration exactement comme dans un calcul, c'est le nombre d'intermédiaires à écrire entre deux extrêmes qui sont proposés par l'énoncé. S'il n'y a aucun intermédiaire, il n'y a rien. Si l'on demande de montrer que

$$2(x + y) = 2x + 2y$$

il n'y a pas d'intermédiaire à glisser, donc rien à faire; tout est dans l'énoncé.

Dans notre exemple il n'y a rien du point de vue du raisonnement, mais trois difficultés malgré tout comme on le verra.

Supposons que l'on ait écrit les hypothèses plutôt que d'avoir dessiné une figure. On se serait exprimé ainsi.

Exercice. *On suppose que les côtés AB et DC sont perpendiculaires au côté AB . Montrer que les côtés AB et DC sont parallèles.*

On écrirait ainsi la solution.

Solution. Les côtés AB et DC sont perpendiculaires au côté AB . Donc les côtés AB et DC sont parallèles..

Pour obtenir la solution à partir de l'énoncé, il a suffit de supprimer "on suppose que" et de remplacer "montrer que" par donc. Un traitement de texte saurait faire. Il n'y a aucun raisonnement.

Evidemment on peut demander de justifier le "donc". La solution idéale consiste à insérer avant la phrase de la boîte à outils. Là se trouve une première difficulté. Comment un jeune élève qui peut à peine lire et reste très loin de comprendre la structure d'une phrase peut-il mémoriser une phrase aussi alambiquée?

Il y en une autre. La phrase de la boîte à outils concerne des droites. Or on s'occupe de "côtés". Il faut donc savoir que la perpendicularité ou le parallélisme des côtés est celui des droites qui les portent. Le changement de vocabulaire entre la phrase apprise et les mots de la démonstration est terriblement déstabilisant. Pour donner une version satisfaisante de la démonstration il faudrait faire la transition des côtés aux droites et des droites aux côtés. C'est difficile, pédant, lourdaud même. Peut-on envisager sérieusement une telle exigence?

Ces deux difficultés ne concernent que la version “étendue”. Il y a une troisième qui vaut dans tous les cas, c’est la traduction de la figure en hypothèses. On voit bien les deux angles droits. Il faut voir aussi que les côtés sont rectilignes. Pourquoi ne verrait-on pas en même temps le parallélisme demandé en conclusion? Le tri qu’il faut faire entre ce qu’on a le droit de tirer de la figure et ce qu’on n’a le droit d’y voir fait sans doute partie du contrat didactique. Mais il faut bien admettre que cela introduit une difficulté sans aucun rapport avec le raisonnement.

La démonstration de tout un chacun

Une démonstration, et notamment une démonstration de géométrie élémentaire, se présente comme un calcul, ou plus précisément un calcul justifié.

Dans les cas simples, on commence par reproduire les propriétés de l’énoncé. En appliquant à quelques unes d’entre elles un résultat connu on en déduit une nouvelle. On continue de la sorte en mettant en évidence des propriétés nouvelles jusqu’à obtenir celle qui est demandée. Ce schéma est particulièrement fréquent dans les démonstrations du collège qui utilisent les cas d’égalité des triangles. C’est déjà une raison pour remettre ces derniers à l’honneur.

Il y a donc une progression qui se déroule comme un calcul. Dans les deux cas les justifications sont présentes, explicites ou implicites suivant le cas. Lorsqu’on invoque un cas d’égalité on est dans l’explicite. Lorsqu’on utilise la distributivité on est dans l’implicite. Cependant le principe est le même. Dans un calcul algébrique simple l’usage est de ne pas expliciter, dans un calcul où l’on passe à la limite, l’usage est d’expliciter. C’est une question de conventions.

Eventuellement on pourra partir de la conclusion. On se ramènera à démontrer une autre propriété qui entraînera celle qui est demandée. Mais c’est aussi ce que l’on fait pour certains calculs où l’on part de la droite pour aboutir à la gauche.

On peut aussi être amené à introduire des éléments qui ne sont pas dans l’énoncé. En géométrie on introduira un point nouveau par exemple. Mais il faut parfois, dans un calcul aussi, donner un nom à une expression que l’on introduit.

Maintenant l’on dispose d’un outil puissant, qui est le *raisonnement par l’absurde*. Il consiste à ajouter aux hypothèses le contraire de la conclusion. Il inclut le raisonnement par contraposition, si bien qu’on fait rarement référence à ce dernier. En principe il n’y a aucun inconvénient à raisonner par l’absurde. Suivant qu’on n’aura pas besoin de l’hypothèse ou du contraire de la conclusion, on effectuera de fait un raisonnement par contraposition ou un raisonnement direct.

Lorsqu’il faut établir une inégalité, on peut raisonner par l’absurde en supposant l’inégalité contraire. Donc, même dans un calcul, le raisonnement par l’absurde a sa place.

La démonstration formelle

Il est inutile d'avoir entendu parler de mathématique formelle pour raisonner. Ce qu'on va dire ici n'ajoute strictement rien. Heureusement cela ne vient pas à l'encontre des habitudes, non plus.

Si l'on regarde la présentation donnée par Bourbaki d'une démonstration dans le chapitre sur la "mathématique formelle", on y trouve à peu près ce qui suit, mais évidemment de façon beaucoup plus rigoureuse.

Un *texte démonstratif* comporte

- 1° d'une part une construction auxiliaire de relations et de termes (dont on exige seulement le respect de la syntaxe); c'est là qu'on introduit ce de quoi on parle.
- 2° d'autre part une démonstration proprement dite, faite d'une suite de relations tirées de la construction précédente, dont chacune est
 - a_1) soit un axiome explicite; c'est là qu'on met l'énoncé.
 - a_2) soit un axiome implicite, obtenu par une substitution utilisant des termes ou relations de la construction. *
 - b) soit une relation R précédée par deux relations dont l'une est S et l'autre est $S \Rightarrow R$.

On remarquera qu'une démonstration est donc essentiellement linéaire, contrairement aux schémas démonstratifs qu'on propose parfois. Les syllogismes n'y sont pas directement visibles. En fait une démonstration formelle ressemble beaucoup à la démonstration de tout un chacun.

On ramène à ce cadre les méthodes : de réduction à l'absurde, de disjonction des cas, de l'hypothèse auxiliaire etc.

* Par exemple si A est une relation, alors $(A \text{ ou } \neg A) \Rightarrow A$ est un axiome; il y a quatre règles de ce genre.