

Complément au délire de la modélisation dans l'enseignement Les lois exponentielles

Jean-Pierre Ferrier, IREM de Lorraine, février 2005

L'importance de la loi exponentielle a été soulignée par Jacques Treiner. Il est important de savoir reconnaître une telle loi lorsqu'on la rencontre et de ne pas avoir à refaire les mêmes raisonnements à chaque occasion. On touche ici la redoutable efficacité des mathématiques : le travail sera fait une seule fois et il servira dans un grand nombre de situations. C'est cette raison d'économie qui permettait à Jacques-Louis Lions de dire que les mathématiques était la Science qui s'enseigne par excellence.

Cependant il faut voir que cette efficacité a un revers. Les mathématiques tendant par nature à la simplicité, il ne sera pas possible de les enseigner dans un contexte de découverte permanente. Mieux elles seront conçues et enseignées et moins il y aura de choses à dire autour. Cela signifie qu'enseigner les mathématiques doit se faire à un rythme tranquille, ponctué de petits exercices de cadrage, et que les bourgeonnements qu'on pourrait imaginer sont hors de propos.

On va mettre cela en lumière à propos des lois exponentielles. La première chose à faire est de supprimer ce pluriel. Il n'y a qu'une loi exponentielle. Bien sûr il y a des exponentielles croissantes et les exponentielles décroissantes. Cependant on ne va pas prétendre qu'il faut écrire des équations mathématiques pour distinguer une grandeur qui augmente indéfiniment d'une autre qui s'éteint progressivement. Pour simplifier on ne va considérer que des exponentielles décroissantes. Les exponentielles croissantes cessent en effet assez vite d'être réalistes pour modéliser les phénomènes.

Lorsqu'on a établi une équation telle que

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

pour décrire l'évolution d'une grandeur, la messe est dite. On a dans sa tête la courbe représentative de la fonction, on sait que le rapport $x(t + \Delta t)/x(t)$ ne dépend que de Δt , on connaît le temps caractéristique $\tau = 1/k$ et le temps de demie-vie $\tau \log 2$.

Dans le cas d'une équation telle que

$$\frac{dx}{dt} = l - kx$$

on sait que l/k représente la valeur limite de x , celle qui représente le *régime établi* et qu'on obtient en faisant $dx/dt = 0$ dans l'équation. La différence entre x et le régime établi est le *régime transitoire* qui est une exponentielle du type précédent.

Dans l'un est l'autre cas il n'y a rien à faire du côté des mathématiques. Il n'est même pas nécessaire d'écrire une équation. D'ailleurs la meilleure façon de résoudre l'équation homogène est encore d'écrire

$$\log x - \log x_0 = -k(t - t_0)$$

en intégrant les deux membres de l'équation à variables séparées $dx/x = -kdt$. Ici \log désigne le logarithme népérien bien sûr.

A ce sujet il faut noter que la fonction logarithme est bien plus importante que la fonction exponentielle pour les calculs en sciences expérimentales. Ce n'est pas pour rien qu'on a inventé les échelles logarithmiques. Les enseignants de mathématiques qui traitent la fonction exponentielle en classe terminale en début d'année n'empêchent pas leurs collègues de physique d'avoir à introduire la fonction logarithme. Avec la présentation d'il y a un demi-siècle, dans une version améliorée comme celle de Jean-Pierre Demailly ou de Georges Lion, la liaison avec la physique eût été meilleure.

Voyons, par exemple, ce que fait Bernard André de tel exercice numéro 21 donné par l'Inspection générale dans sa liste de décembre 2004. Un corps est placé dans une pièce à 20°C . Sa température, qui suit une loi exponentielle, passe de 70°C à 60°C après 5 minutes. Quelle sera-t-elle après 30 minutes? Réponse : la différence avec la température limite est multipliée par le facteur $40/50 = 4/5$ dans chaque tranche de 5 minutes. Au bout de 30 minutes, elle est multipliée par $(4/5)^6$, ce qui donne

$$50 \cdot (4/5)^6 = 2.4^6 / 5^4 = 8192 / 675 \simeq 13$$

et on obtient environ 33°C en calcul mental.

On notera au passage que cette façon de raisonner élimine complètement le délicat problème des dimensions physiques. On ne travaille qu'avec des rapports sans dimension. En degrés Fahrenheit et en heures le résultat eût été exactement le même. Paradoxalement cette solution, inspirée par la physique qui donne la limite, est mathématiquement plus pure.

Si l'on avait demandé la température au bout de 32 minutes, le calcul mental eût été un peu moins évident; il aurait fallu passer par 30 minutes et estimer pour les 2 minutes restantes une atténuation de $2/25$ par interpolation, d'où 31°C au lieu de 33°C . Maintenant il n'est pas scandaleux d'écrire

$$20 + 50 \cdot (4/5)^{6,4}$$

et de laisser le calcul à une machine.

Dans un exercice sur les lois exponentielles l'essentiel n'est pas la partie de calcul mathématique sur l'équation mais l'établissement de l'équation elle-même. Il est très important de savoir s'il est pertinent de parler de loi exponentielle ou non. Or, dans tous les exercices qui fleurissent actuellement en mathématiques, qu'ils viennent de l'IG, des manuels y compris des meilleurs ou des préparations au nouveau CAPES y compris celles de luxe, cette partie est sabotée.

C'est extrêmement grave. Saboter la partie qui relève de la Science est faire très exactement de l'anti-Science. Ce n'est pas mieux que la numérologie ou l'astrologie. C'est même pire parce qu'il n'est pas nécessaire d'être très cultivé pour savoir ce que valent les dernières, alors qu'il faut déjà un bon bagage pour apprécier le sabotage considéré.

En revanche ce n'est pas très étonnant. Lorsqu'il s'agit d'un problème issu de la physique, comme c'est le plus souvent le cas, l'établissement du modèle, que j'appelle mathématique parce qu'il utilise le langage mathématique et que Jacques Treiner appelle physique parce qu'il incombe au physicien, relève de la discipline d'où il vient.

Que faire alors en mathématiques? J'ai déjà dit qu'il fallait travailler sur un rythme tranquille et ponctuer son enseignement de petits exercices de cadrage. Il faut absolument faire dessiner à la main par les élèves des fonctions exponentielles en faisant commenter les propriétés sur le dessin. J'ai vu il y a environ un an une excellente émission d'une chaîne de télévision allemande où la fonction exponentielle était expliquée avec force croquis. Il est possible, sur du papier quadrillé, de faire des représentations graphiques très vraisemblables. On m'a rapporté qu'à la préparation au CAPES deux étudiants qui présentaient l'un l'exponentielle et l'autre le logarithme ne savaient pas en faire la représentation graphique. Par pitié, laissons les "prothèses électroniques" au vestiaire.

Maintenant comment donner des exercices présentant un minimum d'attrait. Il est toujours possible d'étudier des équations qui se ramènent à une loi exponentielle. Cependant cela obligera à élargir le programme, à considérer par exemple des équations du second ordre. Les exemples acceptables ne seront probablement pas légion, mais la mode de la modélisation a sans doute trop vite déformé cette porte.

Sinon on peut toujours évoquer un contexte expérimental. Là il faudra être honnête jusqu'au bout. Par exemple : on considère l'équation différentielle

$$x' = k(x_0 - x)$$

qui traduit l'évolution de la température x d'un corps placé dans une pièce à la température x_0 . On ne prétend pas établir l'équation mais au moins on fait l'effort de considérer des différences de température et de respecter les dimensions. Cela oblige à considérer des paramètres. Pourquoi pas? Travailler avec des paramètres fait partie de ce qu'on pourrait attendre de l'enseignement des mathématiques. On considérerait bien des familles de droites dans le temps!

A titre d'exercice, vous êtes invités à réécrire l'exercice du chariot du bac 2004 en version honnête.

Peut-on aller un peu plus loin? A titre personnel je ne serais pas contre, mais, vus les résultats de la pratique actuelle, il se peut que je sois amené un jour à brûler ce que j'ai adoré et à prôner que le cours de mathématiques soit consacré ... aux mathématiques scolaires. Donc, si l'on supprimait les TPE pour éviter la confusion, j'aimerais que le professeur de mathématiques puisse, de temps en temps, demander à ses élèves d'établir une équation différentielle dans un contexte géométrique, mécanique ou physique.

Dans le savoir-faire nécessaire à la pratique de ce petit métier il y a une partie commune à tous les contextes. Il faut savoir considérer un accroissement infinitésimal dt ou dx en le pensant comme un petit accroissement. J'ai expliqué cela précédemment. Evidemment cela va choquer beaucoup de collègues qui enseignent les mathématiques. Comment parler de ce qu'on a pas défini précisément? Comme on parlait de la racine carrée de -1 par exemple, alors qu'on n'avait pas inventé les ensembles et les structures.

Mais il y a aussi besoin d'un savoir-faire spécifique. Dans le cas de la mécanique ou de l'électricité, les physiciens devraient proposer quelques briques lego que les mathématiciens n'auraient plus qu'à assembler. Pour cela il faudra s'entendre sur la formulation. Ce n'est pas une mince affaire. A suivre.

Complément au délire de la modélisation dans l'enseignement Un petit métier

Jean-Pierre Ferrier, IREM de Lorraine, mars 2005

Nous allons reprendre en tentant de l'approfondir un échange entre Marc Rogalski et Jacques Treiner concernant la mise en équation. Comme point de départ nous allons considérer le **volume** d'un solide exprimé comme intégrale

$$V = \int_a^b S(z) dz$$

de la surface d'une section perpendiculaire à la direction z . Nous supposons le solide très régulier bien sûr.

Il y a deux façons d'aboutir à cette formule. Ou bien l'on dérive

$$V(z) = \int_a^z S(v) dv$$

et se ramène à établir

$$V'(z) = S(z)$$

c'est-à-dire

$$(1) \quad \Delta V = V(z + \Delta z) - V(z) = S(z) \cdot \Delta z + o(\Delta z)$$

ce que fait Marc Rogalski et qui satisfait tous les mathématiciens.

Ou bien l'on découpe en petites tranches que l'on empile, comme le suggère Jacques Treiner. Là on s'appuie sur un énoncé que l'on ne trouve peut-être nulle part mais dont la vérification est très simple :

dans un découpage d'une grandeur en parts positives, si l'on commet sur chaque part une erreur relative inférieure ou égale à ϵ , alors l'erreur relative sur la totalité est elle-même inférieure ou égale à ϵ .

Cet énoncé concerne les **erreurs relatives** et vaut indépendamment du nombre de parts, ce qui autorise dans prendre d'aussi petites que l'on veut de façon que l'erreur relative soit aussi petite qu'on le demandera. Pour le vérifier, on notera que si

$$(1 - \epsilon)a_i \leq a_i \leq (1 + \epsilon)a_i$$

alors

$$(1 - \epsilon) \sum a_i \leq \sum a_i \leq (1 + \epsilon) \sum a_i$$

tout simplement.

Bien sûr on objectera que si l'on découpe une sphère en tranches, cela ne marche pas près des pôles; mais près des pôles il n'y a pas beaucoup de volume non plus. En fait s'intéresser aux erreurs relatives dans une addition n'a de sens que si les parts sont de grandeur comparable. Mais c'est presque toujours le cas.

Dans ce cas la propriété de base serait

$$(2) \quad \Delta V = S(z).\Delta z + o(\Delta V)$$

ce qui est une forme implicite inconnue du calcul différentiel classique. En plus il convient de disposer d'un "o" uniforme, qui soit le même pour toutes les tranches, condition inutile dans l'approche par les dérivées. On va cependant voir que c'est de ce côté qu'il faut chercher le "sens" et non dans l'approche par la dérivée décrite par la formule (1).

Passons sur le fait que le théorème fondamental de l'Analyse, qui se ramène à montrer qu'une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante, n'est jamais démontré au lycée, ce qui rend l'approche par la dérivée tributaire d'un renvoi à plus tard.

Il y a beaucoup plus grave. L'approche par les erreurs relatives tombe sous le sens. Si j'ai des tranches en feuilles de papier d'une épaisseur de $0,1mm$ et de surface autour de $1dm^2$, je conçois bien que l'inclinaison de la coupe va produire sur la surface une incertitude dont l'ordre de grandeur est $0,005$, facteur qui fait passer du dm au dixième de mm en tenant compte du rapport entre périmètre et diamètre.

En revanche que signifierait une incertitude sur ΔV petite par rapport à Δz ? Dans notre exemple, petite par rapport à $0,1mm$? Evidemment rien du tout parce que ce n'est pas homogène. La formule (2) porte du sens parce qu'elle est physiquement correcte; la formule (1) n'en porte pas parce qu'elle est physiquement incorrecte. Bien sûr on pourrait considérer que l'on a mis une dimension dans le "o" pour respecter l'homogénéité. Mais que signifie petit devant Δz ; comment un volume pourrait-il être petit devant une longueur?

Dans notre exemple l'incertitude porte sur la surface. A ce compte-là il vaudrait mieux écrire

$$\Delta V = (S(z) + o(1)).\Delta z$$

où $o(1)$ tend vers 0 avec Δz .

Si l'on veut écrire une formule telle que (1) qui soit à la fois homogène et porteuse de sens, il faut considérer une **erreur rapportée** à une surface de référence S_0 . On écrira alors

$$(1bis) \quad \Delta V = S(z).\Delta z + o(S_0\Delta z)$$

à la place de (1). Cela pourrait marcher, mais au prix d'un effort conceptuel qui n'est quand même pas négligeable.

Examinons maintenant le **cas d'école**, qu'on rencontre dans les manuels de première. On considère une fonction $y = f(x)$ qui représente une courbe géométrique dans le plan rapporté à un repère. Admettons que la courbe admette en un point une tangente de pente m *non nulle*. La distance entre le point sur la courbe et celui sur la tangente est donnée, au signe près, par

$$\Delta y - my$$

et on visualise le fait que cette différence est petite devant Δy . Il en résulte qu'elle sera aussi petite devant Δx mais cela ne se voit pas.

Pour comparer avec Δx on procède autrement. On se ramène, par différence, au cas où $m = 0$. Alors il apparaît que Δy est petit devant Δx , avec un triangle rectangle qui s'aplatit. Pourquoi ce triangle veut-il bien s'aplatir? Parce qu'une pente tend vers 0, autrement dit parce qu'on a une tangente ou encore une limite.

Il y a ainsi deux façons de voir les choses, qui ne coïncident pas exactement.

1) Ou bien l'on pense la proportionnalité $dy = kdx$, ce qu'on interprète en disant que l'erreur relative qu'on commettrait en remplaçant dx par Δx et dy par Δy est d'autant plus petite que chacun des accroissements est petits. Cette vision fait jouer à Δx et Δy des rôles symétriques. Elle n'est pertinente que si $k \neq 0$. C'est bien normal : une proportionalité ne porte pas de sens si le coefficient est nul.

2) Ou bien l'on vise le formalisme correct du calcul différentiel. Alors il faut d'abord penser limite, c'est-à-dire $o(1)$ et prendre

$$o(h) = h.o(1)$$

comme une définition, sans chercher à y trouver du sens.

Si l'on veut traiter des problèmes issus de la physique au sens large en s'appuyant sur l'intuition, on fera le choix numéro 1. Mais on ne cherchera alors surtout pas à expliciter. On n'écrira donc pas une formule telle que (1) ou (2). On écrira simplement

$$dV = Sdz$$

pour résumer tout ce qu'on vient de dire, et qui est : dans une telle formule l'erreur relative (ou rapportée) est d'autant plus petite que dz est petit.

On va parler d'un **autre exemple**, pour lequel au lieu d'un volume on considère une surface, de révolution autour de l'axe z par exemple. Il s'agit cette fois d'exprimer ΔS en fonction du rayon $r(z)$ et de Δz . Pratiquement tout le monde se trompe. Seuls sont épargnés quelques anciens. On écrit que

$$\Delta S = 2\pi r(z)\Delta z$$

à peu près. Ici Marc Rogalski pense que la faute vient du fait que l'on travaille dans un cadre non rigoureux, sans le contrôle par le "o".

Voyons les choses autrement. Qu'est-ce qui permettrait de deviner la bonne relation? L'appel à une formule toute faite pour calculer une surface de révolution? Là c'est tricher. Comment mémoriser une telle formule? Tout bien retourné, nous ne voyons guère qu'une façon de faire le calcul. Notre élément de surface est assimilable à une tranche de cône. Ce faisant nous commettons deux petites erreurs relatives, d'une part en confondant le rayon en z et celui en $z + \Delta z$ et d'autre part en confondant les morceaux de méridiens avec des segments. Ces erreurs s'ajoutent comme des erreurs relatives sur les facteurs d'un produit. Attention cependant! Dans notre cône les segments sont "inclinés" et leur longueur est $\Delta l = \sqrt{1 + r'(z)^2} \cdot \Delta z$ par le théoème de Pythagore. Finalement

$$\Delta S = 2\pi r(z)\Delta l = 2\pi r(z)\sqrt{1 + r'(z)^2} \cdot \Delta z$$

à une petite erreur relative près.

Revenons sur

$$dy = kdx .$$

Apprendre à utiliser ce formalisme est vraiment un petit métier. Tous les modèles de la physique, de la mécanique, voire de la géométrie, ne sont pas des équations différentielles, mais beaucoup le sont. Il faut savoir considérer des dz , des dS , des dV , qui sont à la fois pensés comme infiniment petits pour l'exactitude de la formule et très petits pour l'intuition, laquelle est apportée éventuellement par un dessin. Sinon autant s'abstenir de présenter des mathématiques dans un contexte physique ou autre. Avant de chercher l'interdisciplinarité à tout prix, commençons donc par nous demander si les outils, le langage, les habitudes du cours de mathématiques sont bien compatibles avec les autres sciences.

Une question se pose. Faut-il avoir acquis ce genre de métier à la fin du lycée? Si l'on choisit de répondre oui, alors il faudra abandonner autre chose. Toute prétention au formalisme en analyse par exemple.

Si l'on choisit de répondre non, ce qui est peut-être raisonnable, il faudra abandonner toute, absolument toute prétention modélisatrice en mathématiques.

Complément au délire sur la modélisation Retour sur la méthode d'Euler

jean-Pierre Ferrier, IREM de Lorraine, mars 2005

On a déjà parlé de la “méthode d'Euler” en distinguant deux choses : d'une part la simulation d'une loi d'évolution et d'autre part la résolution approchée d'une loi exponentielle. On a également dit tout le mal qu'il fallait penser du second aspect pour le lycée; si les étudiants de quatrième année d'université comprennent par exemple le théorème de Cauchy-Arzelà, on est déjà très heureux.

A l'inverse la **simulation d'une loi d'évolution** n'a aucun besoin de la notion de dérivée ou de limite. Au contraire. Elle ne se présente bien qu'en l'absence de telles problématiques.

Par exemple une évolution qui suit la *loi exponentielle* est caractérisée par

$$\Delta f = -kf\Delta t$$

où $\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t)$ et où la variable t prend des valeurs multiples d'une valeur Δt fixée.

Il ne s'agit pas non plus d'utiliser le formalisme des suites. Ici on travaille avec une variable discrète, un temps discret par exemple, mais qui conserve une dimension physique.

Rien n'est plus facile que de suivre une telle évolution sur un tableur. On placera évidemment les grandeurs t et f chacune dans une colonne, sans s'occuper du numéro de ligne dont on sait qu'il est difficile de le faire partir à 1.

L'idéal serait de parler d'un tel sujet en classe de seconde, dans le temps réservé à l'initiation aux TICE, puisqu'il n'est pas possible pour le moment de reprendre possession du temps perdu à ces âneries.

Maintenant, si l'on peut réaliser de cette façon des simulations vraisemblables, la méthode a des limites. Par exemple il faudra prendre Δt assez petit mais pas trop pour tenir compte de la précision des calculs ou de la taille des fichiers.

L'introduction de la **dérivée** comme *pente limite* est un progrès considérable. C'est une grandeur exacte : tous les compromis concernant la petitesse de Δt sont évacués par le passage à l'infiniment petit. Cela ne signifie pas pour autant que la mesure physique soit possible, mais cela permet de travailler dans un univers non ambigu.

Quand on lit, dans le programme de première, qu'on illustrera la dérivée avec la “méthode d'Euler” appliquée à la résolution de

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

c'est-à-dire à la primitivation, on croit rêver. Où y-a-t'il l'idée d'une pente limite dans cette “méthode”?

D'ailleurs à quoi sert-il de chercher des primitives? Plus tard on s'en servira pour calculer des intégrales ou pour résoudre des équations différentielles. Mais en première? Sans doute veut-on faire de la "transposition didactique", cette "trahison du savoir" dont parle Chevallard. On met déjà une équation différentielle dans la définition de la dérivée.

Certes il peut arriver, par exemple dans un problème de point fixe, que l'on ait besoin de pratiquer la primitivation numérique. Mais ce n'est pas la façon la plus élémentaire d'aborder les équations différentielles.

Sinon la "méthode des rectangles", puisque c'est ainsi qu'on l'appelle, qui est introduite pour illustrer la "méthode d'Euler" de la classe de première est destinée d'abord au calcul d'intégrales. D'ailleurs le dessin que l'on présente pour l'intégration numérique par les rectangles n'est pas du tout celui que l'on propose pour la méthode d'Euler, où l'on fait apparaître, même pour $dy/dx = f(x)$, les éléments de contact.

Cette méthode des rectangles n'a pas non plus pour but d'illustrer la notion d'aire, mais elle conduit à une estimation par des encadrements et finalement à une définition abstraite de l'aire. C'est exactement le contraire de ce qu'on cherche à faire en première. A moins que définir la dérivée par l'intégrale ne soit la stratégie cachée de nos concepteurs de programmes, transposeurs de la théorie des distributions peut-être.

Revenons sur les différents **aspects** de la "méthode d'Euler". Le premier aspect est souvent utilisé par les physiciens pour donner une solution numérique d'une équation différentielle qu'on ne sait pas, ou pas encore, résoudre avec des fonctions connues. On obtient une succession de points ou une fonction affine par morceaux. C'est à peu près ce que l'on voit avec de la limaille de fer dans un champ magnétique pour prendre l'image de Robert Rolland. Dans ce cas on a fixé un pas, c'est-à-dire un petit accroissement pour la variable et on ne passe surtout pas à la limite.

Lorsqu'il s'agit de montrer un théorème d'existence d'une solution exacte en passant à la limite sur des solutions approchées, il y a encore deux méthodes.

Ou bien l'on donne au pas une suite de valeurs tendant vers 0 et l'on s'intéresse à la convergence des "solutions approchées", lesquelles ne sont bien sûr pas dérivables.

Ou bien l'on commence par se donner la valeur de x où l'on cherche une solution exacte partant de x_0 avec la valeur x_0 . On découpe alors l'intervalle $[x_0, x]$ en intervalles de plus en plus petits. Ce n'est pas une méthode de résolution numérique au sens propre. On ne cherche pas des "solutions approchées", mais des valeurs en un point. Peut-on encore parler de "méthode d'Euler"? L'esprit est bien différent.

Or c'est cette dernière stratégie qui est proposée pour construire la fonction exponentielle dans le document d'accompagnement des programmes. On prend la limite de

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

pour x fixé. Quel intérêt culturel cette stratégie peut-elle présenter? Aucun. Quand on mesure la difficulté technique, on se demande ce qui a pu la faire choisir pour le lycée. Sans doute est-ce l'analogie de facade. Comme pour un plan de leçon d'agrégation où l'on demande de lister toutes les occurrences d'un mot dans le programme.