DOCUMENT DE TRAVAIL – version 2.0

Réflexions sur la place du calcul dans l'enseignement élémentaire
(JPK + PL 02.01.07)

Par lettre du 14 décembre 2006, le ministre de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche s'est adressé à l'Académie des sciences pour que celle-ci lui fournisse une analyse, afin qu'il puisse « transmettre des orientations en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques à l'école primaire ». Il lui apparaît en effet « capital d'asseoir le développement intellectuel de l'enfant sur des performances en calcul… », ce qui « …suppose des préconisations immédiates, qui ne sont pas exclusives de réflexions à plus long terme sur des sujets importants qu'implique une telle démarche, par exemple le rôle de la mémoire dans les apprentissages… ».

En réponse à la saisine du ministre, le bureau de l'Académie a formé un petit groupe de travail, constitué de S. Dehaene, J.P. Demailly, J.P. Kahane, P. Léna, Y. Meyer, J.C. Yoccoz, afin de préparer le texte qui suit, soumis au Comité secret du mardi 9 janvier 2006. Le délai n'autorise que des observations assez générales, sans entrer dans le détail du socle commun ou de sa déclinaison dans les programmes.

L'Académie des sciences est fondée à intervenir sur cette question tant par les études menées par certains de ses membres que par la place du calcul dans toutes les activités scientifiques. Sa réflexion se place dans le cadre dessiné par le Socle commun des connaissances (décret du 11 juillet 2006). Bien que la saisine se centre sur l'école primaire, une continuité forte est à assurer entre école et collège. D'autre part, si les performances en calcul – dont il est question dans ce qui suit – sont essentielles à l'enfant, leur développement doit être recherché en harmonie avec celui de la géométrie, calcul et géométrie pouvant correspondre à différentes modalités d'intelligence chez l'enfant.

Rappelons ici le liminaire du socle commun, concernant les principaux éléments de mathématiques :

> *"Il est nécessaire de créer aussitôt que possible à l'école primaire des automatismes en calcul, en particulier la maîtrise des quatre opérations qui permet le calcul mental. Il est aussi indispensable d'apprendre à démontrer et à raisonner.*
>
> *Il faut aussi comprendre des concepts et des techniques (calcul, algorithme) et les mémoriser afin d'être en mesure de les utiliser".*

Déjà on se moque du peuple. A une question sur l'école, on répond « collège », à une question sur le calcul, on répond « géométrie ». Apprendre à démontrer et raisonner ? On croit rêver. Ou alors le verbe « démontrer » ne veut rien dire. Heureusement on peut raisonner, dès le primaire, sans avoir à démontrer, ce qu'on ne fait pratiquement plus en terminale S. Quelle différence entre un calcul et un algorithme ? Qu'y a-t-il derrière les concepts ? Encore heureux qu'on ait penser qu'il fallait mémoriser et utiliser.

Lien avec les autres matières. Le calcul a un lien étroit avec toutes les autres matières, le français – ce n'est pas un hasard si *compter* et *conter* sont homonymes –, les sciences d'observation et d'expérimentation (mesure, unités, incertitudes), l'histoire et la géographie (sources de données numériques à comparer et à traiter), le sport (performances) et de manière essentielle tout ce qui a trait aux grandeurs et aux mesures. Dans le passé, il a été recommandé à plusieurs reprises de disjoindre l'étude des nombres de celle des grandeurs :

c'est un appauvrissement, et il est bon que l'on s'autorise à écrire 1m+1m = 2m et non seulement 1+1 = 2. La mesure des grandeurs, et d'abord celle des longueurs et des surfaces, mène naturellement aux évaluations quantitatives et au calcul approché ; cela s'étend aux durées, aux températures, aux populations, et à tout ce qui concerne l'observation et l'expérimentation. Les divers modes de représentation des grandeurs (tableaux, graphiques) permettent de saisir aisément les relations que celles-ci ont entre elles.

Quelle soupe ! Mettre le sport --- qui a d'autres mérites heureusement --- à égalité avec les sciences sur le plan du calcul en dit long sur l'honnêteté intellectuelle du rédacteur. Qu'entend-on par l'étude des grandeurs ? Faut-il « s'autoriser » 1m + 1m = 2m ou faut-il s'en servir pour comprendre 1 + 1 = 2 ? Plutôt que de parler tout de suite des opérations, on préfère les tableaux et graphiques. Lamentable.

Calcul approché. Le calcul approché a sa place à tous les niveaux de l'enseignement aux côtés du calcul exact. Il serait bon que les professeurs aient une idée de son traitement rigoureux, au moyen de l'analyse mathématique et des probabilités (par exemple, qu'ils sachent que le modèle mathématique d'une mesure n'est pas un nombre, mais une variable aléatoire), et il est nécessaire qu'ils en aient une pratique suffisante pour ne pas hésiter devant les arrondis qui permettent des évaluations rapides et un calcul mental efficace.

Le calcul approché se lie à celui des ordres de grandeurs, et ce dernier aux changements d'échelles qui ont pris une place croissante dans toutes les disciplines, et sont des éléments importants de la vie citoyenne. L'apprentissage des unités usuelles est l'occasion d'accéder à de très grands nombres. Il se relie à la notion de dimension sous sa forme la plus élémentaire – comparaison des longueurs et des surfaces à la manière le Socrate accouchant l'esclave de Ménon. Il est bon que le carré et le cube soient manipulés comme objets géométriques avant d'être introduits comme opérations sur les nombres.

Pourquoi faut-il séparer le calcul approché des autres formes de calcul ? Pourquoi faut-il d'ailleurs cloisonner le calcul ? Pourquoi fallait-il donc nous vendre ici la fluctuation des échantillons? Le vrai calcul approché, qui est lié aux ordres de grandeur, est ce que Kahane appelle le « calcul approché à la louche » et ce n'est pas celui qui est considéré ici.

Calcul exact. Le calcul exact commence par la pratique de la numération et des opérations élémentaires. Il prend des formes diverses dont l'articulation est l'objet de débats : calcul mental, calcul posé, calcul sur machines. Il dépend des nombres sur lesquels il porte, et nous n'allons pas en détailler tous les aspects. Il est bon néanmoins d'énoncer quelques évidences et quelques objectifs pédagogiques.

A/ <u>Calcul mental</u>. Le calcul mental est l'occasion de faire fonctionner différents registres de mémoire. Il doit être nourri par une bonne connaissance de la table de multiplication, de la parité, des puissances de dix et des puissances de deux (au collège), et s'exercer en permanence sur des questions simples venues d'ailleurs. La mémoire n'est active que si elle est entretenue.

B/ <u>Calcul posé</u>. Le calcul posé est indispensable, et il faut y penser comme la base sur laquelle des formes évoluées du calcul pourront le temps venu trouver leur place – par exemple, le calcul sur les polynômes au collège. Des choix sont à faire, puisque les manières de poser une opération ne sont pas les mêmes dans les différents pays. Il paraît prudent d'être très explicite, par exemple dans la pratique des retenues ou dans l'écriture des divisions.

Calcul sur machine. Les calculettes ont leur place dans l'existence des enfants et certainement dans beaucoup d'activités en classe. Il serait imprudent d'en faire le fondement de l'apprentissage du calcul. Mais l'articulation entre calcul sur machine, calcul posé et calcul mental est un sujet important, sur lequel la réflexion est engagée et doit se poursuivre.
(*D'après Gérard Berry*) Sans entrer dans une définition savante de l'information et de son traitement, il est possible d'en comprendre les bases de façon élémentaire, d'acquérir quelques schémas mentaux corrects (la numérisation du monde) et des attitudes justes, ce qui dépasse le simple usage des multiples objets informatiques de la vie courante. Ainsi l'algorithmique élémentaire des nombres, celle de la manipulation d'images, de couleurs, de textes et de sons, de la visualisation et de la transmission d'informations offrent la possibilité d'aborder la compréhension des principes et du bon usage des dispositifs informatiques,et de développer un regard adéquat sur le nouveau monde numérique.

Effectivement comprendre les bases de la numérisation serait un objectif, peut-être pas à l'école élémentaire quand même. Mais cela n'a STRICTEMENT RIEN A VOIR avec le calcul sur machine. Quant à manipuler des images, des couleurs, des textes et des sons, comment cela donnera-t-il accès aux fameuses bases ? Mettre cette question à côté du calcul sur machine est une escroquerie.

Mémoire et calcul. A rédiger.

Jeu et mathématiques. A traiter ? et à rédiger.

***

Nous ne nous proposons pas de détailler les objectifs à atteindre. Certains sont explicites dans ce qui précède – l'articulation avec des activités diverses, la continuité dans le travail, la mémorisation de données et de tables. Nous souhaitons plutôt insister sur la nécessité d'une grande ambition pour les professeurs et pour tous les enfants. Tous les enfants peuvent calculer comme tous les enfants peuvent nager. C'est affaire de volonté, de travail et de plaisir. Les enfants aiment jouer et les jeux sont une source naturelle de calculs, parfois naïfs, parfois subtils. Nous devons avoir l'ambition qu'ils aiment le calcul.

Bonjour

J'ai profité des critiques de Michel Delord pour revoir ma copie. En même temps je pense que c'est la structure même du texte JPK-PL qu'il faut revoir. Comme Claude le Rigoleur, il me semble que si le texte final est mauvais, mieux vaut qu'il ne porte pas la signature de Jean-Pierre Demailly. J'ai mis rapidement quelques passages de sa version dans ce qui suit, juste pour voir. Il est évident qu'il faut tout reprendre à zéro.

Les nombres et la mesure.
****

Les nombres abstraits doit être enseignés, de façon intuitive, à partir de leurs homologues concrets, lesquels servent à dénombrer ou à mesurer ; les opérations sur les nombres intuitifs sont présentées en s'appuyant sur des collections ou grandeurs. Autrement dit « on compte trois pommes » ou mesure « trois mètres » pour accéder au nombre « trois » ; on dit « un verre et un verre font deux verres » ou « un mètre et un mètre font deux mètres » pour expliquer « un et un font deux » puis « 1 + 1 = 2 ». Comme le disait Lebesgue, la mesure fait le nombre.

Il ne s'agit ni « d'autoriser une écriture comme 1m + 1m = 2m », ni d'enseigner les opérateurs sur les grandeurs en parallèle ou en complément de celles sur les nombres abstraits telles que « 1 + 1 = 2 ». En revanche l'enseignement doit vivre avec les grandeurs comme longueur, surface, volume, masse, intervalle de temps, écart de température etc. En particulier aucun résultat portant sur une grandeur ne sera formulé sans mention de l'unité.

NB. Je ne sais pas ce qu'est un « nombre intuitif » ; pour moi c'était un nombre abstrait introduit intuitivement. Car il faut appeler un chat un chat. Le nombre « trois » est un nombre abstrait : on l'obtient en le détachant dans le groupe « trois pommes », action traduite précisément par le verbe latin abstrahere.

Par ailleurs la discussion sur les nombres concrets « avant » ou « en même temps » me semblait close ; j'ai tenu compte de l'avertissement pour lever l'ambiguïté.

En revanche je ne suis pas du tout d'accord pour laisser croire qu'on va enseigner les opérations sur les grandeurs, comme le propose Chevallard ; on présente les opérations en s'appuyant sur les grandeurs, on les utilise avec des grandeurs, mais on les enseigne sur les nombres abstraits. Par ailleurs je n'aime pas entendre parler d'une « modélisation de la réalité » ni, à ce stade, d'une « analyse dimensionnelle ».

Les opérations et leur sens.
****

Les quatre opérations doivent être enseignées dès le CP et l'on ne doit pas séparer le sens des opérations, qui s'acquiert par la résolution de problèmes simples pour commencer et de plus en plus complexes, du calcul lui-même, que l'on effectue avec de petits nombres au début et des nombres de plus en plus grands par la suite.

Le sens des différentes opérations ne peut en effet se former convenablement que lorsque celles-ci sont introduites simultanément, puisque l'élève peut alors comparer et opposer leurs différents usages. Nul n'ignore que le problème du partage des bonbons se pose dès l'école maternelle et il est donc presque contre nature de rejeter en fin de cycle primaire l'apprentissage de la division comme c'est le cas dans les programmes actuels.

De la même manière, il ne faut pas dissocier l'apprentissage de la numération de celui des opérations, ne serait-ce que parce que l'écriture des nombres entiers implique déjà au moins l'addition et la multiplication, et que celle des nombres décimaux implique de même la division.

L’unité du calcul.

****

Il n’y a qu’un seul calcul, celui qui permet d’accéder notamment à la compréhension intime des nombres. Il doit être enseigné sous la forme d’un calcul posé, lequel développe l’esprit de méthode. Il doit l’être aussi sous la forme du calcul mental, lequel n’est pas un calcul posé effectué dans sa tête mais un calcul primitif. Il met en œuvre une approche différente, donnant en général plus d’importance aux chiffres de poids fort. Surtout il laisse beaucoup de place à la liberté et à l’initiative. Mieux vaut ne pas fixer une limite trop rigide à ce calcul ; on peut y faire entrer 2^10 = 1000 par exemple.

En revanche il n’existe pas de calcul approché à enseigner de façon autonome. D’une part le sens des ordres de grandeurs doit découler de la pratique d’un calcul approximatif, « à la louche », qui est le résultat d’un calcul mental dans le sens élargi où il faut le considérer. D’autre part le sens de la précision, des incertitudes, doit être cultivé par la pratique de mesures et l’adaptation de la précision du calcul à ces mêmes mesures.

Il n’existe pas non plus de calcul sur machine dans l’enceinte de l’école. L’introduction ultérieure à l’informatique tirera notamment profit de l’apprentissage exigeant de l’algorithme de la division. On peut aussi envisager des activités simples de codage de l’information dès l’école.

L’exigence en matière de calcul posé à l'école élémentaire doit inclure la maîtrise complète des algorithmes pour les quatre opérations arithmétiques, sans limitation théorique a priori sur la taille ou la nature des nombres mis en jeu, même si cette pratique devra être affermie au collège.

On ne doit pas oublier par ailleurs que le calcul mental est indispensable à la vie quotidienne et à celle du citoyen – dans le cadre d'une citoyenneté qui ne contente pas d'être assistée par l'autre ou par les boîtes noires de la technologie, et compte tenu du fait que l'esprit critique et l'autonomie se peuvent s'acquérir qu'avec la maîtrise des outils fondamentaux de la pensée.

Les deux calculs doivent être nourris par une connaissance parfaitement fluide des tables d'addition, de soustraction et de multiplication.

NB. Il est importent d’afficher l’unité du calcul quand certains prennent plaisir à distinguer calcul exact, expert ou non, approché, sur machine, sur les grandeurs, sur les ordres de grandeur etc.

Par ailleurs on ne peut pas donner de définition satisfaisante du calcul mental. Celle de M. Cabois ne veut rien dire. Maintenant penser 20 + 30 pour 24 + 31 est bien attacher son

attention aux chiffres de poids fort ; sinon comment trouve-t-on 20 et 30 ? Par l'oralisation ? J'en doute et si c'est le cas c'est insuffisant ; on doit pouvoir faire du calcul mental silencieux.
Sinon l'antériorité du calcul mental ne me gêne pas ; c'est son caractère primitif.

Cordialement

Jean-Pierre Ferrier

Cher Jean-Pierre Demailly

Tu viens de faire un travail considérable de collecte d'idées. Cependant il est bien difficile de formuler une remarque utilisable à propos d'un texte qui s'approche maintenant des dix pages. Il me semble que ce serait d'abord d'un manque de structuration qu'il souffrirait maintenant. Quelle peut être par exemple la place de la psychologie cognitive ? Sans doute ne doit-elle pas être un « fondement » pour l'arithmétique mais plutôt préciser des « conditions » de son apprentissage.

Cela étant, un passage comme « - donner à l'enfant un socle solide d'automatismes dans le domaine du calcul - tout en maintenant constamment ces calculs en liaison avec leur sens quantitatif » est à la fois bienvenu et indépendant de considérations cognitives. Ces dernières sont là pour dire que le sens quantitatif préexiste chez l'enfant et peut être exploité. Par ailleurs une remarque comme « l'objectif d'automatisation du calcul ne doit pas être mise en avant au détriment de la compréhension » en est également indépendante, mais peut donner lieu à bien des dérives de la part des pédagogues.

Le passage sur le calcul approché fait le mélange entre le calcul « à la louche » dont parle Dehaene, le calcul « à précision donnée » des physiciens et numériciens et l'approximation d'un nombre réel, laquelle est d'ailleurs exacte. En fait ce n'était pas une entrée pertinente.

De même le calcul sur machine n'en était pas une. Cela donne d'ailleurs l'occasion de parler d'autre chose et pas toujours de façon très judicieuse. Que peuvent apporter « la saisie et l'enregistrement de textes, de messages et de données » à la compréhension des principes généraux des technologies numériques ? Les compléments (de Véronique je suppose) disent utilement le contraire, à savoir que les bases sont apportées par « le calcul et l'initiation au raisonnement à l'école élémentaire », mais ils ne sont pas au format du reste du texte. Quant à « l'usage de programmes de modélisation » pour étudier « les phénomènes physiques ou naturels difficiles », c'est une vraie catastrophe, égale à celle des logiciels de géométrie dynamique.

Je te prie de m’excuser de ne pas être plus constructif. En fait la première chose que vous devriez faire, si le temps imparti vous le permet, serait de discuter d’un plan.

Amicalement

Jean-Pierre Ferrier