Le bord du soleil (d'après un TPE).

On considère une photographie du soleil prise à un moment donné. Les contours du soleil ne constituent pas un vrai cercle. On va alors *modéliser* le bord en le découpant en quelques morceaux et en cherchant pour chacun une courbe polynomiale qui l'approche.

Commentaires. Cet exemple est caricatural. En quoi la recherche d'une formule pour le bord nous apprend-elle quelquechose sur le soleil?

Il présente malgré tout l'un des traits dominants qu'on trouve dans la modélisation des ingénieurs : c'est la *sous-détermination*. Il n'y a pas de raison de choisir des polynômes plutôt que des polynômes trigonométriques, ou d'imposer tel degré ou tel autre.

Alors que cette sous-détermination est acceptable pour le vrai modélisateur, elle apparaît ici dans toute sa gratuité. Cela montre bien que la vraie modélisation ne peut exister que comme réponse à une commande réelle. Encore une fois elle obéit à une logique de production. L'introduire dans un TPE ou dans un enseignement, sauf à en respecter rigoureusement l'esprit, ne peut conduire qu'à des déboires.

Il y a d'innombrables variantes. L'avion qui traverse un labyrinthe en empruntant une trajectoire polynomiale en est une.

Chercher des courbes avec des propriétés imposées n'est pas sans intérêt, bien au contraire. Mais ne parlons pas de modéliser! Il y a d'autres occasions moins délirantes pour s'y exercer. Sachant que ce ne sont pas les calculatrices qui rendront l'exercice utile, pour forger de bonnes images mentales.

L'ampoule (origine inconnue)

Quelle forme faut-il donner à une ampoule électrique pour maximiser son volume avec une quantité de verre donnée, une épaisseur et un diamètre de culot imposés?

Commentaires. On ne sera pas plus précis. Il est bien clair que la forme des ampoules électriques n'est pas dictée par une question de volume, mais des contraintes complexes d'échauffement et aussi des raisons variées, y compris esthétiques.

Le jean qui sèche (d'après Marc Legrand).

Un étendoir à linge est constitué d'un fil, non pesant, tendu entre deux poulies par deux masses identiques de part et d'autre. Un jean mouillé de 3kg est suspendu au milieu du fil. Ce dernier accuse une inclinaison d'environ 5 degrés, de chaque côté du jean, par rapport à l'horizontale. Quelles sont, à peu près, les masses utilisées?

Commentaires. Il faut un peu de physique au départ. Que dire d'un fil? Si on l'attache à un bout et que l'on tire, il résiste, mais seulement dans son alignement; il transmet une force, la *tension*, dans sa seule direction.

Avec le bilan des forces qui s'exercent sur une portion du fil, on constate que la tension est constante, en grandeur, le long du fil. La poulie ne fait qu'en changer la direction.

Aux extrémités, la tension équilibre le poids des masses. Au milieu, la résultante des deux tensions équilibre le poids du jean.

On a donc un problème d'addition vectorielle à résoudre. Comme le préconise Henri Poincaré, on tient là une occasion d'introduire les vecteurs, comme des forces, et leur addition, par la règle du parallélogramme.

Mais qui connait, aujourd'hui, la petite physique de cet exemple? Le rôle de la poulie n'est pas simple; la variation vectorielle de la tension s'explique par la pression du fil. Est-il cependant admissible qu'un professeur de mathématiques, voire un professeur d'école, ignore ce qu'est une tension?

Un côté plaisant de cette nouvelle mode modélisatrice est que les mêmes qui s'en font une spécialité se distinguent par leur inculture scientifique.

Le chapeau de Bart (grand classique).

Bart découpe un secteur dans un disque de carton et recolle les bords pour s'en faire un chapeau. Quel angle doit-il choisir, s'il doit ramener le plus d'eau possible de la rivière avec son chapeau?

Commentaire. Le contexte est ici strictement ludique. Il ne présente aucune contre-indication. Qui irait s'imaginer qu'on lui a exposé ainsi le dernier cri en matière de technologie?

L'avion vole-t-il? (IREM de Paris 7)

La mécanique du vol est l'étude des forces s'appliquant à un aéronef en vol. On peut considérer que les résultantes de toutes les forces réparties vont s'appliquer au centre de gravité de l'avion ...

En vol en palier rectiligne uniforme, on équilibre

- poids mg et portance R_z
- traction (ou poussée) T et traînée R_x.

On dispose d'une équation de substentation et d'une équation de propulsion dans lesquelles interviennent aussi la masse volumique de l'air, la vitesse, la surface de l'aile et des coefficients de portance et de traînée.

On déduit de cela $mg/T = R_z/R_x$. Ce rapport est la finesse, qu'on mesure en laissant l'avion descendre sans moteur.

En montée rectiligne uniforme, faisant un angle γ petit avec l'horizontale, on a

$\gamma = (T - Rx)/mg$

d'où la vitesse ascentionnelle

$V_z = V\gamma$.

Commentaires. Il y a des éléments très contestables. Seule la pesanteur s'applique au centre de gravité. Ensuite le rapport Rz/Rx n'a aucune raison d'être indépendant de la vitesse. Ce n'est pas explicite, mais le lien qui est fait avec la mesure empirique de la finesse le sous-entend.

Surtout les équations de substentation et de propulsion n'ont servi à rien ici. Heureusement d'ailleurs car on ne sait pas comment on les établit. Le formalisme vectoriel ne sert à rien non plus. C'est de l'habillage du vide.

Dans le cas d'une montée, la vitesse étant supposée la même, sans rien savoir a priori et se plaçant dans un repère lié à l'avion, on voit qu'il faut équilibrer la composante de la pesanteur $mg\gamma$ suivant l'axe de l'avion par un surcroît de poussée. C'est tout.

La belle conclusion $V_z = V\gamma$ vaut bien sûr dans tous les cas, en particulier pour la marche en montagne. Y a-t-il un avion dans le ciel?

Il y a certes une difficulté tout à fait réelle pour l'élève à jongler avec des formules qui contiennent beaucoup de variables. Cependant, sans la lucidité qui permet de trier ce qu'on utilise vraiment, il ne reste rien.

Le mouvement des planètes.

L'origine étant sur l'étoile, plaçons-nous dans le plan de l'étoile, et des position et vitesse de la planète à un moment, déclaré initial, donné. On prendra en l'hypothèse la loi de Newton; l'accélération est dirigée vers l'étoile, avec comme grandeur

$$a = \frac{k}{d^2}$$

où k est une constante et d la distance de la planèe à l'étoile.

On va utiliser un tableur pour étudier numériquement le phénomène. Partant de valeurs pour la position et la vitesse, on calcule les composantes de l'accélération

$$a = \frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad , \quad b = \frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

pour actualiser la vitesse par

$$x' := x' + a.dt \quad , \quad y' := y' + a.dt$$

et la position par

$$x := x + x'.dt \quad , \quad y := y + y'.dt \ .$$

On itère d'un clic grâce à la fonction de recopiage vers le bas.

Avec $k = 0,5$, avec $(1,0)$ comme position initiale et $(0,1)$ comme vitesse initiale, choisissant $dt = 0,1$ et copiant cent lignes, on obtient trois révolutions elliptiques. On voit assez bien le foyer en 0, mais la trajectoire n'est pas stable à cause des erreurs. Avec $dt = 0,01$ et un millier de lignes, c'est mieux.

On prendra garde aux unités sur les axes qui doivent être les mêmes.

Commentaires. Utiliser de vraies valeur n'est pas intéressant ici.

On se méfiera de l'utilisation prématurée des logiciels presse-bouton dont disposent les physiciens. Ils montrent les mouvements des planètes, mais on ne sait pas comment ils procèdent.

C'est accessible à un élève de première. On ne démontre rien évidemment.

La lune déforme deux fois plus la terre que le soleil ... (IREM de Paris 7)

On voit que le différentiel d'attraction entre la face et l'arrière est deux fois plus grand dans le cas de la lune.

Il s'agit de voir qu'il est en m/d^3.

Commentaires. Pourquoi émailler le calcul de maladresses qui démontrent qu'on n'a rien compris? Faisant intervenir la masse de la terre dans la formule, négligeant des termes sans parler d'erreur relative ... bref de l'à peu près comme, sous couvert de rigueur, l'enseignement des mathématiques en nourrit les élèves.

Les coccinelles (exemple proposé pour le prochain baccalauréat).

On sait tous qu'il y a des années à coccinelles et des années sans !

On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à partir d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par $f(x) = kx(1 - x)$ ...

Dans le modèle choisi, on admet que le nombre de coccinelles reste inférieur à un million.

On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ ... et on demande d'étudier l'évolution à long terme de la population.

Commentaires. C'est le monde renversé. On a choisi le modèle avant de faire la moindre hypothèse. On n'explique évidemment pas le rôle du facteur $1 - x$.

Quel peut être le statut de ces "on admet". La locution a été si souvent employée pour parler d'un fait démontrable qu'on ne veut pas démontrer. Est-ce le cas ici? Non bien sûr.

On pouvait s'en sortir si l'on avait mis de côté la prétention modélisatrice. On aurait pu présenter une population fictive, par exemple celle des puces de dahu. Dans un tel cas on peut tout imposer. Ce n'est qu'un jeu, comme pour le chapeau de Bart.

. . . environ.

Il y a quelque chose d'indécent à supposer connues distances, masses ou constantes pour résoudre un micro-problème. D'où en tient-on les valeurs?

Faisant seulement l'*hypothèse* d'une attraction en $1/d^2$, ce qu'on en tire va-t-il la conforter?

On voit sans instrument que M/d^3 est du même ordre pour le soleil et la lune. L'effet sur les marées ne surprend donc pas.

En revanche d est bien plus grand pour le soleil, et donc aussi M/d^2. C'est autour de lui que la terre tourne.

La mouche du vinaigre (d'après J.-P. et F. Bertrandias)

On s'intéresse à l'évolution d'une population en faisant intervenir les limitations du milieu nutritif ou les interactions dues à la proximité d'un grand nombre d'invidus.

On va ainsi considèrer un taux de croissance $k = \Delta N/N\Delta t$ (pour Δt petit) qui va dépendre de N.

Supposons que le milieu ne puisse pas nourrir plus de N^* individus. On doit avoir $k = 0$ si $N = N^*$, alors que $k > 0$ si $N < N^*$.

Un choix simple est $k(N) = \gamma(N^* - N)$. Il définit la loi logistique, qui traduira assez bien les évolutions d'une population de mouches dans une bouteille.

Commentaires. On a expliqué auparavant le rôle du taux de croissance et notamment la proportionnalité à Δt pour Δt petit, laquelle correspond à la notion de pente ou de dérivée.

On ne prétend pas faire intervenir des facteurs biologiques complexes. On part juste de l'hypothèse que la population ne peut plus croître à partir d'une certaine valeur et on cherche si cela pourrait se traduire dans un modèle simple.

L'essentiel est qu'il y ait des hypothèses et que le modèle cherche à les traduire. C'est tout simple, mais c'est toute la différence avec les modèles plaqués ou débiles.

Les oiseaux migrateurs (pris dans un cours de DEUG, puisé dans un textbook américain)

On cherche à modéliser l'effectif d'une population d'oiseaux. Au temps t elle est $y(t)$, l'unité étant l'année. Un certain 21 mars, origine des temps, la population est de 500.

Les naissances et morts produisent un "taux de croissance" de $3\sin(2\pi t)$.

Les migrations produisent un "taux de variation" de $2000\sin(2\pi t)$.

On demande 1) de commenter cela 2) de trouver l'hémisphère, 3) d'établir l'équation $y' = 2\sin(2\pi t)y + 2000\sin(2\pi t)$, 4) de donner enfin l'effectif maximum.

Commentaires. On a corrigé quelques parenthésages dans les formules. Il reste que l'expression est incorrecte, peut-être à cause de la traduction. En effet "taux de croissance" et "taux de variation" sont synonymes. Dans le premier cas il s'agissait bien du *taux* dy/ydt; dans le seconde de la *pente* dy/dt.

Surtout l'exercice relève de l'historiette ridicule. On ne cherche pas à modéliser, on balance un modèle. L'aurait-on choisi sans connaître l'hémisphère? Pourquoi ne pas demander s'il s'agit d'hirondelles, de criquets ou de baleines?

Les naissances ont lieu dans une période annuelle précise. La mortalité doit dépendre de la météo. Le choix de la fonction sinus est gratuit ... et inadapté. Les migrations sont supposées indépendantes de la population. Est-ce tenable? De plus la migration se fait sans doute d'un coup ou presque. Le sinus est tout aussi inadapté.

Cet exercive a été très peu apprécié aussi bien par les étudiants que par les collègues. D'abord les uns et les autres ont été perturbé par la confusion entre taux et pente. Ensuite ils ont eu beaucoup de mal à discerner la valeur ajoutée par "l'historiette" des oiseaux migrateurs à un exercice somme toute très scolaire.

Deux populations en compétition.

On considère deux population x et y qui sont en compétition dans un même milieu. La première est mieux adaptée et peut trouver des ressources tant que la population totale reste inférieure à M, alors que la seconde n'en trouve plus dès que cette population atteint $m < M$. En revanche, la seconde se reproduit vite en l'absence de conditions de ressources, avec un facteur b quand la première doit se contenter d'un facteur $a < b$.

Un modèle simple pour l'évolution est donnée par le système différentiel

$$\begin{cases} x' = ax(M - x - y) \\ y' = by(m - x - y) \end{cases}$$

où a, b, m, M ont les propriétés indiquées.

Si l'on part de valeurs x et y petites, une étude élémentaire montre que la population y commence par se multiplier beaucoup plus rapidement que x. Cependant, quand t augmente, c'est y qui finit par prendre toute la place. Cela contredit l'idée simpliste que le modèle

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$

tendrait à imposer.

Commentaires. Le modèle considéré n'a pas la prétention d'être réaliste. C'est une adaptation de la loi logistique, dont le principal mérite est la simplicité. Surtout les conclusions concernent le très long terme. Le rôle du modèle est juste de détruire une idée fausse.

On en tirera deux remarques générales. On est vraiment parti d'hypothèses. Le choix du modèle n'est pas fait au hasard. Cependant les hypothèses sont insuffisantes pour forcer le choix. C'est pour cette raison qu'on parle ici de modèle. On réserve ce mot à un cadre mathématique qui n'a pas la moindre prétention de décrire la réalité.

L'œil y voit-il? (vaguement inspiré par un TPE de l'IREM de Paris 7)

On cherche à expliquer comment l'œil voit, ou, plus modestement, comment les images s'y forment.

Le premier modèle que l'on peut imaginer est celui d'une boîte percée d'un petit trou. On peut réaliser une expérience avec une telle boîte. Pour un objet très éclairé, comme une bougie, on constate qu'une image se forme, inversée, au fond de la boîte. On aura placé une pellicule photographique dans le fond par exemple.

Ce modèle suscite une critique. Pour que l'image soit nette, il faut que le trou soit très petit. Ne tenons pas compte du phénomène de diffraction. De façon très naïve, on fera remarquer que la moindre poussière empêchera l'œil de voir. Ce n'est pas un dispositif très efficace.

On peut alors penser à un autre modèle, celui d'une lentille. Il aura bien des mérites. D'abord la diffraction sera limitée et le risque de la poussière obstruant l'œil écarté. Ensuite on pourra expliquer le rôle du cristallin, parler de myopie ou d'hypermétropie. On pourra aussi expliquer le rôle de l'iris et parler de profondeur de champ. Enfin on dispose d'un modèle d'une certaine efficacité.

Commentaires. Avec la lentille, on décrit de façon sommaire l'objectif photographique muni d'une mise au point. Pourquoi ne pas se contenter de cela? Pourquoi voudrait-on ainsi modéliser l'œil?

Le problème est qu'un œil contient des humeurs. Cela doit être connu depuis la très haute antiquité. Ainsi le milieu de l'objet, l'air assimilé au vide, et celui de l'image, qui est l'humeur vitrée, ne sont identiques; leur indice diffère essentiellement.

Cela ne change pas fondamentalement les problèmes. Mais on ne peut pas prétendre faire acte scientifique en mettant en avant un modèle essentiellement faux. Il ne s'agit pas d'une approximation, d'un modèle asymptotique, ce qu'on accepterait évidemment. Pour preuve, que l'on cherche à rendre compte de la vision sous l'eau !

Le principe de Fermat et la réfraction.

On considère un dioptre plan séparant un milieu 1 d'un milieu 2 d'indice relatif n, rapport de la vitesse de la lumière dans 1 par rapport à celle dans 2. Dans un plan P perpendiculaire au dioptre, considérons dans le milieu 1 un rayon incident qui atteint le dioptre en un point I avec l'angle d'incidence i. Considérons aussi le rayon, dit réfracté, qui part de I dans le milieu 2 avec un angle r défini par

$$\sin i = n \sin r \ .$$

Il s'agit de montrer que si A est un point du rayon incident et B un point du rayon réfracté, le trajet AIB est celui dont la durée est la plus courte; c'est le principe de Fermat.

Pour cela considérons un point I' de la droite D trace du dioptre dans P. Supposons par exemple que $AI' > AI$ et $BI' < BI$. Soient H' l'intersection de AI' avec la perpendiculaire à AI en I et H l'intersection de BI avec la perpendiculaire à BI par I'. Comme $H'I' = II' \sin i$ et $HI = II' \sin r$, les trajets $H'I'$ et HI ont même durée. Il reste à comparer, dans les triangles rectangles AIH' et BHI', les hypoténuses à des côtés de l'angle droit. C'est évident.

On traite de même le cas $AI' < AI$ et $BI' > BI$. Le cas $AI' > AI$ et $BI' > BI$ est sans intérêt. Enfin le cas où I' ne serait pas dans le plan P est facile.

Commentaires. C'est du niveau du collège. On n'a pas motivé la condition entre sinus. Les physiciens introduisent des rayons parallèles et le front d'onde.

Sinon on peut introduire la condition en considérant un I' très proche de I. Les hypothénuses et les côtés sont égaux au second ordre. Il faut donc que les trajets $H'I'$ et HI soient égaux au premier ordre.

Pour A et B donnés, l'existence d'un trajet joignant A à B est une question de valeurs intermédiaires.

On peut aussi traiter le problème par le calcul différentiel, mais cela relèverait de la terminale. Encore faudrait-il savoir jongler avec des fonctions composées.

Le freinage (document du programme de première S)

Supposons que lors d'un freinage, la décélération d'une voiture soit constante en fonction du temps et que la distance parcourue par la voiture à partir de l'instant de freinage s'exprime alors par une expression de la forme

$$d = -kt^2 + v_0 t \ .$$

Ainsi, pour une voiture roulant à une certaine vitesse et s'arrêtant en 5*s sur une distance de* 100*m, on a obtenu :*

$$d = -4(t-5)^2 + 100 \ .$$

A partir de là, on peut se poser quelques questions.

- à quelle vitesse roulait la voiture juste avant le début du freinage?

- quelle distance aurait parcouru ce même véhicule dans le même laps de temps 5*s si elle n'avait pas freiné?*

- à quelle vitesse arrive-t-elle sur obstacle situé à 50*m du début du freinage? à* 80*m?*

Commentaires. Le thème n'était pas sans intérêt. Cependant on l'a choisi ici pour une activité *préliminaire* à l'étude de la notion de dérivée.

Par conséquent on a shunté tout ce qui aurait pu être intéressant : la décélération est une dérivée seconde; si elle est supposée égale à k, alors d'abord $v = -kt + v_0$; d'où $v_0 = kt_1$ si la voiture s'arrête en t_1; puis $d = \ldots$ avec $k/2$ de préférence ... ou mieux $v_0^2 = 2kd_1$ si elle s'arrête après avoir parcouru d_1 ... et $v_0 = 2d_1/t_1$ simplement.

Si l'on doit tout admettre, on ne voit plus l'objet de l'activité. De plus la première question est pertinente, mais pas vraiment les autres. On aurait pu conserver le thème de la reconstitution d'un accident évité ou non. Demander v_0 pour une vitesse d'impact donnée par exemple.

Par ailleurs on notera l'inhomogénéité des formules. A quoi sert-il qu'on insiste sur les dimensions en physique si l'on doit tout détruire dans le cours de mathématiques? Et quel bel exemple d'interdisciplinarité !

L'équilibre de la chaînette.

Considérons un fil souple pesant, de masse linéique constante μ, de longueur l attaché en deux points. On repère le plan vertical passant par ces points par des axes Oxy où Ox est horizontal et Oy vertical orienté vers le haut. L'unité sur ces axes est l'unité de longueur. Il s'agit de trouver une équation $y = y(x)$ de la figure d'équilibre, couramment appelée *chaînette*.

D'abord on remarque que la composante horizontale de la tension est une constante T. En effet, si l'on place une séparation au point x, sur la partie de gauche du fil s'exercent des tensions en a et en x en plus de la pesanteur verticale. En projection horizontale la tension en x est donc la même (en valeur absolue) qu'en a.

Ensuite, sur la partie du fil en x et $x + dx$ s'exercent des tensions en x et en $x + dx$ en plus de la pesanteur $-\mu ds$. En projection verticale il vient

$$-Ty'(x) + Ty'(x + dx) = \mu\sqrt{1 + y'(x)2}dx$$

d'où l'équation différentielle

$$\frac{y''}{\sqrt{1 + y'2}} = \frac{\mu}{T} \ .$$

On intègre l'équation en posant $y' = \sinh z$, ce qui donne

$$z' = \frac{\mu}{T} \quad \text{ou} \quad z' = \frac{\mu}{T}(x - x_0)$$

et alors

$$y - y_0 = \frac{T}{\mu}\cosh(\frac{\mu}{T}(x - x_0)) \ .$$

Commentaires. Ce qui précède est, avec un peu d'aide, accessible en terminale.

On pourrait écrire l'équation sous une forme intrinsèque, plus élégante, mais ce ne serait pas dans l'esprit du lycée.

Suivant une approche variationnelle, on minimiserait $\int_a^b yds$ avec $\int_a^b ds = l$, et écrirait l'équation d'Euler-Lagrange correspondante. Mais ce serait plus savant.

La languette.

Une lame d'acier a ses extrémités fixées avec une direction imposée. Quelle est l'équation de la courbe qu'elle forme?

Cherchons l'équation sous la forme $\phi = \phi(s)$, où s est la longueur d'arc et ϕ l'angle de la tangente.

Suivant une approche variationnelle, on part de l'énergie donnée par

$$\int_0^l \frac{k}{2}\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 ds$$

et des conditions

$$\int_0^l \cos\phi \; ds = A \quad , \quad \int_0^l \sin\phi \; ds = B \; .$$

On en tire l'équation d'Euler-Lagrange

$$k\frac{d^2\phi}{ds^2} = C\sin(\phi - \phi_0)$$

ou une intégrale première.

Directement, on considère que la partie gauche transmet à la partie droite un couple $kd\phi/ds$ et une force et inversement (en opposant couple et force). On applique des contraintes semblables aux extrémités. On écrit l'équilibre du bout de lame entre s et $s + ds$. Les forces qui interviennent ont une valeur constante $\vec{F}$ (ou $-\vec{F}$). De plus

$$k\frac{d\phi}{ds}(s+ds) - k\frac{d\phi}{ds}(s) = F\sin(\phi - \phi_0) \; ds$$

et on retrouve notre équation.

Commentaire. C'est difficile, avec plus ou moins de mathématiques ou de physique, la difficulté étant surtout de dégager les notions sur lesquelles on va pouvoir raisonner.

La réfraction.

Une surface plane sépare un milieu (1) d'un milieu (2). On se place dans un plan perpendiculaire et dans un repère où $x = 0$ réalise la séparation.

La vitesse de la lumière est v_1 dans le premier et v_2 dans le second. Un rayon lumineux relie un point A d'ordonnée h_1 du premier au point B d'ordonnée $-h_2$ du second. On note i_1 et i_2 les angles d'incidence et de réfraction.

Comment exprimer le fait que la durée du trajet est minimum?

La durée est donnée par

$$\frac{h_1}{v_1}.\frac{1}{\cos i_1} + \frac{h_2}{v_2}.\frac{1}{\cos i_2}$$

où

$$h_1 \tan i_1 + h_2 \tan i_2 = d \ .$$

Il s'agit d'annuler la différentielle, écrivant

$$-\frac{h_1}{v_1}.\frac{\sin i_1}{\cos^2 i_1}di_1 - \frac{h_2}{v_2}.\frac{\sin i_1}{\cos^2 i_2}di_2 = 0$$

en sachant que

$$h_1\frac{1}{\cos^2 i_1}di_1 + h_2\frac{1}{\cos^2 r}di_2 = 0 \ .$$

La compatibilité exige aussitôt

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}$$

ce qui est la relation bien connue.

Plus "élémentairement", considérons un rayon incident AI et un autre AI' proche. Soit $I'H$ une hauteur du triangle AII'. On a

$$AI' - AH = (II')^2/(AH + AI') \ .$$

Par suite la différence de longueur entre AI et AI' est, au premier ordre, représentée par $IK = II' \sin i_1$.

On traduit le fait que I minimise la durée totale en équilibrant les variation de durée incidente et réfléchie; d'où la relation.

Commentaire. C'est un peu difficile.

Encore la chaînette

Suivant une approche variationnelle, on part de l'énergie mécanique donnée par

$$\int_a^b -\mu y ds = \int_a^b -\mu y \sqrt{1+y'2} dx$$

où a,b sont les abscisses des extrémités, avec la condition

$$\int_a^b \sqrt{1+y'2} dx = l \ .$$

On en tire l'équation d'Euler-Lagrange dont une intégrale première est

$$\frac{y-\lambda}{\sqrt{1+y'2}} = C \ .$$