Mathématiques et physique: remarques

Jean-Pierre Ferrier, IREM de Lorraine, novembre 2004

Les remarques qui suivent sont des réactions à un exposé fort intéressant de Françoise de Labachelerie à la commission interIREM du second cycle du 5 novembre 2004.

1. Le chariot.

Dans le sujet de Bac 2004 pour la série S, il était question de forces de frottement "proportionnelles à la vitesse et de sens opposé".

En une ligne on condense quelques ambiguités.

La proportionnalité traduit deux choses : l'existence d'un coefficient indépendant de la vitesse, dont ici du temps, soit une dépendance fonctionnele linéaire; d'autre part elle peut aussi traduire la proportionnalité entre deux vecteurs donnés, donc en un temps donné.

Quant au sens, qu'on appelle direction partout dans le monde à l'exception de la noosphère mathématique, il traduit lui-même deux choses : la proportionnalité entre vecteurs donnés et la négativité du coefficient.

Il y aurait donc à la rigueur une redondance dans la façon de s'exprimer.

Il y a une façon très simple de s'en sortir sans frais; il suffit d'appeler $\vec{R}$ la résultante des forces de frottement (c'est bien d'y avoir pensé) et d'écrire l'égalité

$$\vec{R} = -k\vec{v}$$

entre vecteurs (libres).

Tant qu'à faire, on aurait pu placer $\vec{R}$ sur la figure. On ne l'a pas fait parce que $\vec{R}$ ne s'applique pas nécessairement au même point que $\vec{F}$. On ne sait pas où $\vec{F}$ s'applique. Si le rail était légèrement incliné et si $\vec{F}$ était la composante suivant le rail de la pesanteur, on appliquerait $\vec{F}$ au centre de gravité. Mais cela n'a pas d'importance parce que les forces glissent et que la réaction du rail sur les deux essieux équilibre non seulement la composante de la pesanteur orthogonale au rail mais aussi le couple éventuellement produit par $\vec{F}$ et $\vec{R}$; c'est pour cela que les voitures et les wagons ont (au moins) deux essieux en général.

Maintenant parler des vecteurs $\vec{R}$ et $\vec{v}$ colinéaires n'est pas très dangereux, mais à tout prendre mieux valait en rester à des vecteurs proportionnels et de direction opposée. En effet deux vecteurs sont "colinéaires" s'ils appartiennent à une même droite (vectorielle). Les adjectifs "colinéaire" et "aligné" sont synonymes, la différence entre les préfixes cum et ad n'étant pas significative ici; on emploie plutôt "aligné" pour des points (et des droites affines) mais c'est dans le contexte et non dans le choix des mots qu'il faut faire la différence. On peut aussi parler de vecteurs proportionnels en mathématiques pour traduire $y = \lambda x$; d'ailleurs la proportionnalité entre $\vec{R}$ et $\vec{v}$ est ici une proportionnalité entre fonctions du temps, lesquelles sont des vecteurs dans un espace vectoriel fonctionnel.

En quoi est-il (un peu) gênant d'utiliser l'adjectif “colinéaire” ici? Parce que cela suggère qu'il existe une droite vectorielle qui contiendrait des vitesses et des forces. Donc une force pourrait être une vitesse. C'est une hérésie. Le produit $k.\vec{v}$ n'est pas l'action du corps de base sur l'espace vectoriel qu'on enseigne en mathématiques. Le coefficient a en effet une dimension $(FL^{-1}T^{-1})$. Il appartient lui-même à une droite vectorielle sur le corps des nombres réels. En choisissant une base de cette droite, qu'on apelle unité, on peut faire l'identification. Certaines propriétés sont indépendantes de ce choix : on constaterait par exemple que le sens n'est pas affecté. On peut alors en parler sans présupposer un tel choix. Cependant dire qu'une vitesse est égale à une force reste interdit par égard justifié envers la physique.

Dans un langage pédant on dirait que $k.\vec{v}$ est dans le produit tensoriel (sur le corps des nombres réels) d'une droite vectorielle et de l'espace multidimensionnel des vitesses (libres). Ce dernier s'identifie à l'espace vectoriel des forces (libres) sous réserve de la cohérence des unités. Cela n'apporte sans doute pas beaucoup à la compréhension.

Par ailleurs que représente la variable t? En principe c'est un intervalle de temps; c'est la condition pour en faire un nombre réel, une fois une unité choisie. On pourrait dire que c'est le temps écoulé à compter de la mise en mouvement du chariot.

Quand on parle de date, on renvoie à un élément d'un espace affine. Ce n'est pas très grave car dt lui même est déjà vectoriel. Mais il faut choisir alors non seulement une unité, mais aussi et d'abord une origine des temps pour utiliser la notation $[0, +\infty[$.

Je ne reviens sur x et $x(t)$. Notons quand même que x n'est une distance parcourue, avec un signe a priori; c'est plus $\overline{OH}$ que OH.

Surtout être obligé de rappeler que v est la dérivée de x en dit long sur le réalisme de cette interdisciplinarité qu'on veut jette à la figure.

2. Le titrage acido-basique.

Sur le plan du langage, la seule phrase qui accroche pour moi est : ”on admet que la fonction g est dérivable et que la fonction g' admet un maximum”. Le second emploi du verbe admettre ne me choque pas. Le premier me gêne davantage. Je comprendrais “on constate expérimentalement que la pente passe par un maximum”. Sinon quel est le statut de cette assertation? Est-ce un théorème difficile qu'on ne veut pas démontrer? Certainement pas.

Sinon l'intégration de la chimie est très agréable. Je m'étends sur le sujet plus loin.

3. Publication du groupe.

J'ai à peine eu le temps de jeter un coup d'œil. Il m'a semblé qu'on mettait physique et mathématiques face à face. Si c'est le cas il faut ajouter une troisième colonne de commentaires et conclusions, ce qui n'a été fait ni à Strasbourg ni à Limoges.

J'attends d'en savoir plus pour faire des propositions.

Mathématiques et physique: propositions

Jean-Pierre Ferrier, IREM de Lorraine, décembre 2004

1. Le chariot.

Peut-être faudrait-il rédiger un sujet de devoir visant à expliquer la mise en équation.

La première question est celle du bilan des forces. On se place dans un plan vertical parallèle au rail sur lequel tout sera projeté.

Il y a le poids $\vec{P}$ appliqué au centre de gravité G, la force d'entraînement $\vec{F}$ appliquée en un point A, la résultante $\vec{R}$ des forces de frottement appliquée en un point B, les forces de réaction $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ du rail sur les essieux appliquées en des points C_1 et C_2 du rail.

Il s'agit de montrer que l'ensemble de ces forces concourt à un déplacement sur le rail dans la direction de $\vec{F}$. Autrement dit, en ajoutant la "force d'inertie" $-m\vec{\gamma}$ appliquée en G où le vecteur accélération $\vec{\gamma}$ est dirigé suivant $\vec{F}$, on doit trouver l'équilibre.

Pour cela on doit d'abord annuler la résultante des forces. Cela donne les relations

$$\vec{P} + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}$$

entre forces perpendiculaires au rail, et

$$\vec{F} + \vec{R} = m\vec{\gamma}$$

entre forces parallèles au rail.

On apprend en physique qu'il faut encore annuler le moment résultant. On le calculerait en G par exemple. De cette façon on peut déterminer complètement les forces $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$.

Voici une idée qui pourrait s'adapter plus facilement au cours de mathématiques. On connait deux règles.

1) Les forces peuvent glisser le long de leur support.

2) On peut remplacer deux forces parallèles (ici $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$) de résultante non nulle par leur résultante (ici $\vec{E}$) placée au barycentre (ici C) de leurs points d'applications (ici C_1 et C_2) affectés des coefficients donnés par la magnitude de ces forces, affectée d'un signe déterminé par leur direction (la même ici).

Pour simplifier la discussion on va supposer que G se projette entre C_1 et C_2, que B est au-dessus de G et que $A = G$; le chariot n'est pas trop plein, il est soumis à la résistance de l'air qui le prend vers le haut; enfin la force d'entraînement est produite par une légère inclinaison du rail, le poids du chariot se décomposant en $\vec{F}$ parallèlement au rail et $\vec{P}$ perpendiculairement.

On place des axes Gx et Gy en G, le premier parallèle au rail et le second perpendiculaire. Sont données les abscisses $-c_1$ et c_2 des essieux et l'ordonnée b de B. La première opération consiste à calculer l'abscisse c du barycentre C.

Soit $\mathcal{E}$ la droite supportant $\vec{E}$ et soit $\mathcal{R}$ celle supportant $\vec{R}$. Ces droites se coupent en D. Faisons glisser $\mathcal{E}$ et $\mathcal{R}$ pour amener leur origine en D. Leur résultante sera appliquée en D également. On traduit la nullité du moment en G par le fait que la droite support de cette résultante passe par G. D'où une nouvelle relation entre $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$.

Maintenant on peut aussi discuter. Il convient que la réaction du rail s'exerce vers le haut. On devra conclure que les forces de frottement, qui ont tendance à faire cabrer le chariot, ne doivent pas être trop grandes.

Est-ce adaptable à la classe? Il faut voir.

Titrage acidobasique.

1°) D'abord on peut discuter de la méthode des tangentes dans un cadre strictement mathématique et général, comme méthode pour déterminer un point d'inflexion. On prendrait trois exemples du style des suivants.

1) La fonction x^3 ou encore les fonctions $\sinh x$ et $\tanh x$; l'origine est un vrai centre de symétrie.

2) Une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ dont l'allure fait penser à une inflexion. L'exemple la fonction x^3 à gauche et $x^3/4$ à droite est bien adapté. On peut faire tout calculer et on constate que la distance à 0 de la tangente à droite est double de celle à gauche. En effet, pour $y = ax^3$, la tangente de pente α coupe l'axe des x au point d'abscisse $x - (ax^3/3ax^2) = 2x/3$ où $3ax^2 = \alpha$; la distance cherchée est $2.3^{-3/2}.\sqrt{\alpha/a}$.

3) Une fonction ayant un vrai point d'inflexion, de classe $\mathcal{C}^3$, mieux analytique ou même algébrique comme $x^3 + x^4 + x^5/3$. On fait opérer une dilatation en posant $x = kX$ et $y = k^3X$. Noter que $y = kY$ montre la tangente et $y = kY^2$ montre la parabole osculatrice. Ici on obtient $Y = X^3$ comme fonction surosculatrice à la limite quand $k \to 0$.

Ainsi dans l'exemple 3) plus on dilate, plus la symétrie apparaît. Dans l'exemple 2) la dilatation ne change rien au contraire.

2°) On s'intéresse maintenant à la fonction qui donne la valeur t du pH en fonction du quotient V_B/V_A. On se place dans le cas de solutions d'acide chlorhydrique et de soude de concentration égale (en moles par litre) à 10^{-2}. Le point d'équivalence correspondra à $V_B = V_A$ et à un pH de 7.

Ce n'est pas vraiment un point d'inflexion que l'on détermine, mais beaucoup plus simplement un centre de symétrie approché. En fait, même si la différence est infime, le point d'équivalence n'est pas exactement au point d'inflexion.

On va travailler en pratique sur la fonction réciproque. Cela ne changerait pas le point d'inflexion; on le montre par le calcul de la dérivée seconde de la fonction réciproque qui donne $-f''/f'2$, ou géométriquement car une inflexion correspond à une droite osculatrice. Surtout cela ne change rien à la symétrie.

D'abord V_B/V_A est donné en fonction de $h = [H_3O^+]$ par

$$\frac{-h^2 + 10^{-2}h + 10^{-14}}{h^2 + 10^{-2}h - 10^{-14}} = -1 + \frac{2.10^{-2}h}{h^2 + 10^{-2}h - 10^{-14}}$$

où l'on doit imposer les restrictions $h \geq 0$ et $V_B/V_A \geq 0$ pour traduire la situation étudiée.

Le dénominateur est un trinôme qui admet deux racines a_1 et a_2 dont la somme est (en valeur absolue) beaucoup plus grande que le produit. Donc l'une est à peu près la somme et on tire l'autre du produit : $a_1 \simeq -10^{-2}$ et $a_2 \simeq 10^{-12}$. Le numérateur admet aussi deux racines $b_1 \simeq 10^{-2}$ et $b_2 \simeq -10^{-12}$. Les restrictions qui précèdent conduisent à

$$a_2 < h \leq b_2$$

et la fonction de h étudiée admet une asymptote verticale en a_2.

Ensuite h est donné en fonction de t par

$$h = 10^{-t}$$

d'où en composant, en en posant $u = t - 7$, l'expression

$$-1 + \frac{2}{1 - 10^{-5}.(10^u - 10^{-u})} \ .$$

L'intervalle d'étude en u est donné par

$$-7 - \log_{10} b_2 = \alpha \leq u < \beta = -7 - \log_{10} a_2$$

où $\alpha \simeq -5$ et $\beta \simeq 7$. Le point d'équivalence correspond à $u = 0$.

On peut développer l'expression obtenue en

$$-1 + \frac{2}{1 - 10^{-5}.(10^u - 10^{-u})} = 1 + 2.10^{-5}(10^u - 10^{-u}) + 2.(10^{-5}(10^u - 10^{-u}))^2 + \cdots$$

pour u pas trop loin de 0. Clairement le second terme est impair et présente une symétrie en 0. Or le troisième introduit, par rapport au second, une erreur relative donnée par

$$r = 10^{-5}(10^u - 10^{-u})$$

laquelle est inférieure à 1% tant que $|u| \leq 3$, donc tant qu'on reste entre des pH de 4 à 11.

En toute rigueur il faudrait écrire le reste plutôt que le troisième; c'est le troisième terme divisé par $1 - r$. Cela ne change rien.

On voit que le choix d'un acide fort et d'une base forte a facilité l'approximation; avec une concentration de 10^{-4} au lieu de 10^{-2}, il ne restait plus que $|u| \leq 1$ pour la même précision.

Revenons sur le point d'inflexion. A une constante et un facteur près nous avons développé l'expression

$$\frac{1}{1 - a \sinh u} = 1 + a \sinh u + a^2 \sinh u + \cdots$$

pour u assez petit. Cela donne en particulier

$$1 = au + a^2u^2 + o(u^2)$$

quand $u \to 0$. On voit donc qu'il y a un terme de courbure en 0. Ce n'est pas le point d'inflexion.

3°) Il reste à comparer la précision des méthodes. Celle de la dérivée numérique est très grossière. En plus elle est très sensible aux aleas de la mesure, surtout si l'on ajoute de petites quantités. Si l'on en ajoute de plus grandes on limite la précision à la moitié de la quantité ajoutée près de l'équivalence.

Avec la méthode des tangentes, il faut que la droite milieu soit bien transversale à la courbe. Un angle d'au moins 30° est idéal.

Pour se convaincre de cette contrainte, on peut faire chercher l'intersection d'une droite épaisse suivant l'axe Ox symbolisée par deux droites parallèles $y = \pm\epsilon$ avec une autre faisant l'angle α symbolisée par deux droites parallèles distantes de ϵ. Quelle est, en abscisses, la taille de l'intersection?