Relations barycentriques

Jean-Pierre Ferrier, IREM de Lorraine, mars 2004

Ce qui suit est une libre rédaction de la partie introductive de la conférence de Pierre-Henri Terracher à la commission interIREM du second cycle du 13 mars 2004. Il est possible qu'en cherchant à reprendre le sujet à son début, on ait reproduit un cheminement plus ancien. Cela ne serait pas grave car ce n'est en rien l'originalité qui est recherchée.

Plaçons-nous dans un espace affine E. Considérons y une somme vectorielle

$$\alpha_1 O\vec{A}_1 + \cdots + \alpha_n O\vec{A}_n$$

pour laquelle

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0 .$$

On vérifie facilement que sa valeur est inchangée si l'on remplace O par O'. En particulier, une relation telle que

$$\alpha_1 O\vec{A}_1 + \cdots + \alpha_n O\vec{A}_n = 0$$

ne dépend pas de O. On peut donc l'écrire simplement

$$\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n = 0 \tag{1}$$

en se rappelant qu'elle signifie deux choses :

- *d'abord la somme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ est nulle,*
- *ensuite, une origine étant choisie, la somme vectorielle correspondante est nulle.*

On considère maintenant des expressions telles que

$$\alpha_1 A_1 + . \cdots + \alpha_n A_n$$

sans restriction sur les α_i. On écrira l'**égalité barycentrique**

$$\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n = \beta_1 B_1 + \cdots + \beta_p A_p \tag{2}$$

entre des expressions du type considéré si

- *d'abord les sommes $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et $\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_p$ sont égales*
- *ensuite $\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n - \beta_1 B_1 - \cdots - \beta_p A_p = 0$;*

autrement dit., une origine étant choisie, l'égalité vectorielle correspondante est vérifiée.

Sous réserve de n'écrire que des égalités équilibrées, les règles communes vont s'appliquer et il n'est même pas nécessaire de les expliciter.

Ainsi peut-on permuter les termes d'une expression ou placer des parenthèses, pour remplacer une sous-expression par une expression qui lui est égale. En particulier on peut multiplier les deux membres d'une égalité par un même nombre; on peut ajouter membre à membre des égalités; dans une égalité on peut transférer un terme d'un membre à l'autre en changeant son signe.

Pour la démonstration on reviendrait à (1) ou on choisirait une origine.

Théorème. *Etant donnée une expression*

$$\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n$$

dans laquelle $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 0$, *il existe un unique point* G, *appelé barycentre, pour lequel*

$$\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n = \alpha G\ .$$

La démonstration est facile. On prend une origine O. Si G convient, alors

$$\alpha_1 \vec{OA_1} + \cdots + \alpha_n \vec{OA_n} = \alpha \vec{OG}$$

d'où l'unicité; définissant ainsi G, on a l'existence.

Variante.

Rien n'interdit de parler de système barycentrique et d'utiliser un formalisme sur deux niveaux au lieu de celui de la somme. De même peut-on parler d'équivalence plutôt que d'égalité. C'est même un peu plus correct car les expressions n'ont pas de sens (autre que formel) et seule l'égalité en a un. Mais on ne va pas faire comme pour l'équipollence des vecteurs.

Sous réserve de plus amples vérifications, il ne me semble pas que le choix d'un formalisme ou de l'autre change quoi que ce soit dans la résolution des exercices.

On objectera peut-être que les égalités barycentriques peuvent être confondues avec des égalités vectorielles et engendrer des difficultés. Il ne me semble pas que cela puisse être le cas si l'on a bien précisé la règle : si une égalité relie des points, alors la somme des coefficients doit être la même à gauche et à droite. Il faudrait expérimenter sérieusement et sans préjugé pour savoir.

En revanche le passage à des relations vectorielles est plus aisé avec les égalités barycentriques. Le fait que les coefficients soient en haut plutôt qu'en bas est plus conforme à leur vocation par ailleurs.

De même l'institutionnalisation est-elle sans doute plus facile. L'écriture de sommes affines est déjà dans les habitudes lorsque la somme est 1 ou 0. Il s'agit juste d'étendre les conditions pour une égalité.

Remarque.

La notation est une affaire de goût. Il y a aussi une nuance importante. Jamais on n'a supposé que la somme des coefficients devrait être non nulle de part et d'autre de l'égalité. S'imposer cette condition pour une expression, comme pour certaines sous-expressions, conduirait à examiner des tas de cas particuliers dans les applications. Il est un peu facile de glisser là-dessus. Les mathématiques ont horreur des exceptions.

A fortiori se restreindre au cas où la somme des coefficients est égale à 1, comme c'est le cas pour un usage strict, compliquerait la propriété d'additivité des barycentres. En revanche nous retrouvons naturellement cette condition si l'on veut qu'une somme soit égale à un point.

Cas particuliers.

On identifie $1.A$ au point A. Ainsi, avec une somme des coefficients égale à 1, on obtient le barycentre.

On a vu que $B - A = 1.B - 1.A$ était le vecteur $\vec{AB}$. Plus généralement $\alpha.B - \alpha.A$ est le vecteur $\alpha\vec{AB}$.

On peut mettre des vecteurs dans les égalités barycentriques, sachant qu'ils n'interviennent pas dans la pondération. Par exemple

$$\frac{A+B}{2} + \vec{t} = \frac{A+\vec{t}}{2} + \frac{B+\vec{t}}{2}$$

exprime le fait qu'une translation conserve les milieux.

Interprétation physique.

On a choisi l'écriture avec des sommes pour une simple raison de commodité typographique. Ici l'utilisation du formalisme des systèmes barycentriques serait plutôt mieux adaptée . D'ailleurs on va utiliser les termes de ce dernier et parler d'équivalence plutôt que d'égalité.

Le substantif barycentre (qui est mal formé) vient de l'adjectif grec “barus” qui signifie lourd, pesant. C'est le centre du poids. L'adjectif latin est “gravis”. Le barycentre est le centre de gravité.

On se place dans un plan affine qu'on imagine comme une plaque non pesante placée horizontalement. Le système barycentrique est la donnée de points A_i du plan affectés de poids α_i de signe quelconque. Si le coefficient est positif on attache en A_i une fil au bout du quel pend une masse; s'il est négatif on fait un renvoi par une poulie pour tirer la plaque vers le haut. Naturellement on peut mettre des ressorts ou plutôt des dynamomètres au lieu des fils et des masses. On remarquera que le choix de l'unité est sans importance, comme il est équivalent de raisonner sur les poids ou les masses, à condition bien sûr de prendre la même convention partout.

Ce faisant on pourra faire des expériences. On constatera qu'un système barycentrique est équivalent à zéro si et seulement si le plan reste en équilibre. Bien sûr il faudra introduire quelques petits frottements pour cela.

1. Cas d'un seul point.

La relation

$$\alpha A \sim 0$$

n'a lieu que pour $\alpha = O$.

Avec un seul poids non nul il n'y a jamais équilibre.

2. Cas de deux points.

La relation

$$\alpha A + \beta B \sim 0$$

exige d'abord $\beta = -\alpha$ puis, prenant l'origine en A, la nullité du vecteur αAB; autrement dit $\alpha = 0$ ou $A = B$.

Deux poids non nuls opposés en des points distincts ne s'équilibrent pas. On a ce qu'on appelle un couple, dont la magnitude est $|\alpha|AB$.

D'une autre façon, on ne peut équilibrer un poids non nul que par le poids opposé placé au même point.

3. Cas de trois points.

La relation

$$\alpha A + \beta B + \gamma C \sim 0$$

exige d'abord $c = -(a + b)$ puis, prenant l'origine en C, la relation

$$\alpha \vec{CA} + \beta \vec{CB} = 0$$

qui implique d'abord l'alignement de C avec A, B. Le reste est à discuter en fonction des signes de α et β.

Si α et β sont positifs et non tous deux nuls, le point C doit être placé entre A et B de façon que

$$\alpha CA = \beta CB$$

ce qui revient à équilibrer algébriquement les deux couples $\alpha A - \alpha C$ et $\beta B - \beta C$ dont la somme est précisément le système considéré.

Les autres cas se discutent de façon analogue.

Une application importante concerne le barycentre de deux points A, B affectés des coefficients α et β. Si $\alpha + \beta$ est non nul, on cherche γG de façon que $-\gamma G$ équilibre le système. On cherche ainsi à placer un poids unique qui équilibre les deux poids donnés.

On peut réaliser concrètement la recherche de G en plaçant des poids α, β sur une réglette et en cherchant le point support qui donne l'équilibre. En effet la réaction du support va s'ajouter aux deux poids donnés et fournir l'équilibre cherché.

On retiendra que, pour des poids de même signe, le centre de gravité est entre les poids, plus près du plus grand en valeur absolue. Pour des poids de signe opposé, il est à l'extérieur, du côté du plus grand en valeur absolue.

4. Cas général.

On a vu que si la somme des coefficients était non nulle, le système était équivalent à un poids unique (la somme des poids) placé au centre de gravité.

Si la somme est nulle le système est équivalent à un couple.