Calcul algébrique et transcendant

Jean-Pierre Ferrier, avril 2005

Ce qui suit est encore un compte-rendu, celui de la réunion de la commission interIREM du second cycle des 1-2 avril 2004. En plus d'être orienté il est allusif; pour le comprendre il faut avoir pris connaissance des interventions des participants.

Calculs algébriques.

Le merveilleux exposé historique d'André Warusfel nous a, une fois de plus, montré que des mathématiques peuvent être anciennes, comme celles d'Euclide, et toujours pérennes.

Les constructions géométriques dont il a parlé pourraient être revisitées au lycée d'aujourd'hui pour le plus grand bonheur des élèves. Il ne s'agit pas d'injecter une part d'histoire des Sciences dans l'enseignement. Ni de multiplier les activités parallèles à l'enseignement des mathématiques, comme la fréquentation de "laboratoires" à la Kahane. Mais simplement de s'inspirer de ce qui a été fait ici où là pour en tirer des exercices apportant du "sens", à placer dans le déroulement du programme de base.

On se prend donc à chercher ce qu'il faudrait modifier ou supprimer pour faire de la place à ces mathématiques infiniment plus vivantes que tous les sujets artificiels que l'on trouve dans l'enseignement d'aujourd'hui.

Il y a pas mal de conditions à remplir.

1) Chasser de l'apprentissage des nombres tout ce qui peut toucher à la théorie des ensembles ou aux structures algébriques, même lorsqu'il s'agit comme souvent de références camouflées au travers de manipulations.

2) Remettre de l'ordre dans l'enseignement de la géométrie de la 6ème à la 2nde pour retirer du collège toute trace de transformation et y replacer les cas d'égalité. Pour cela nul besoin d'invoquer les invariants des groupes de la géométrie.

3) Alléger l'enseignement de l'Analyse ou plutôt le dégonfler, car il serait vain de tenter alléger ce qui est parfaitement creux. On va revenir là-dessus à propos de l'exposé de Jean-Dhombres.

4) Mettre un bémol à la prétention modélisatrice. Si l'on ne peut pas calculer sur une petite figure géométrique, quel sens donnera-t-on à toutes ces tentatives de modélisation de phénomènes physiques qu'on prétend faire sans la physique?

Nombres complexes.

Les exposés des collègues animateurs IREM qui enseignent en lycée ont une authenticité particulière. Etant donnés les miracles réalisés avec les faibles marges accordées aujourd'hui, on se fait une petite idée de ce qui pourrait être fait dans un système moins contraint.

L'exposé de Muriel Alliot nous a ramené avec bonheur plusieurs décennies en arrière. L'addition des nombres complexes étant défini par les vecteurs, la multiplication l'est avec modules et arguments.

La nouveauté était de revisiter avec le plan les multiplications comportant des nombres négatifs. C'est assez conforme à l'histoire puisqu'il semble que la maîtrise des nombres négatifs date de la même époque que celle des nombres complexes.

On peut cependant se demander si autant de calculs fastidieux sur les arguments est bien nécessaire. Pour résoudre

$$x^2 = -4$$

on cherche x qui est à 1 ce que -4 est à x, suivant le principe de la moyenne raison. Même si l'on ne connait pas les similitudes, dès qu'on pense au plan les triangles rectangles de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$ et $(0,0)$, $(0,2)$, $(-4,0)$ s'imposent.

L'utilisation des angles de demi-droites donne lieu à de curieuses précautions. On écrit des égalités sans précision en général mais

$$0 = 2\pi \bmod 2\pi$$

pour ne pas perturber les élèves. Or $0 = 2\pi$ signifie sans l'ombre d'un doute qu'on calcule modulo quelque chose. Les relations moins perturbantes ne sont-elles pas les plus dangereuses?

Fuites en avant.

On a eu droit à un moment de détente et de fraîcheur avec la présentation de l'anamorphose conique magnifiquement menée par Mathieu Blossier. Il est facile d'imaginer qu'un tel sujet, avec les références historiques, les relations à l'Art et toutes les récompenses visuelles qu'il offre, puisse passionner les élèves. Qu'apporte-t-il sur le plan mathématique ou scientifique?

Un exemple de transformation déformante? Certainement. Mais pour l'exploiter il faudrait s'intéresser aux fonctions de deux variables. Ce n'est pas possible au niveau considéré.

L'occasion de revisiter la réflexion de la lumière? En effet. Mais dans un contexte de symétrie de révolution un peu difficile.

L'explication de l'anamorphose repose en fait sur la géométrie projective en une variable : c'est une homographie suivant le rayon. Malheureusement le thème de la géométrie projective a été abandonné dans l'enseignement du lycée. D'ailleurs on ne l'enseigne pas à l'université non plus. Et l'étude des dioptres n'est plus à la mode en physique.

Voilà un beau sujet, hélas difficile, qu'il est impossible de relier à l'enseignement du lycée d'aujourd'hui.

L'exposé sur l'option "Sciences" présenté par Freddy Bonafé laisse un peu la même impression. Dans l'éventail des options offertes en classe de seconde, la présence d'une telle option s'imposait par souci d'équilibre. Moyennant quoi les enseignants soucieux de défendre leur établissement et leur discipline se devaient non seulement de contribuer à sa mise en place mais aussi de l'initier.

Malheureusement cette généralisation des options et de l'interdisciplinarité va dans le sens de la disparition des contenus disciplinaires traditionnels. Comme pour les TPE, mais de façon plus aigüe encore en seconde qu'en première ou en terminale, les mathématiques ont du mal à trouver leur compte. Parler des ellipses à l'occasion des planètes est a priori une bonne chose. Mais cela revient à réintroduire en seconde, sans le temps et les moyens pour le traiter sérieusement, un thème qu'on a retiré, sans doute à tort, du programme de terminale.

Pourquoi faut-il que la créativité pédagogique soit cantonnée à des activités somme toute marginales? Pourquoi le noyau des connaissances disciplinaires ne donne-t-il pas lieu à un investissement de même ampleur? Sans doute parce que les programmes sont trop détaillés et que les documents d'accompagnement ont pris toute la place sans s'approcher pour autant de la qualité des initiatives des enseignants de terrain. C'est dommage.

L'intégrale et le programme de 2002.

Avec l'âge on perd d'abord ses capacités de mémorisation. J'ai lu soigneusement les nouveaux programmes, mais, les mois passant, je ne retenais du calcul intégral que deux choses :

1) l'on fonde l'intégrale sur la notion intuitive d'aire

2) et l'on établit la dérivation par rapport à la borne supérieure dans le cas continu monotone.

Evidemment la démonstration du théorème de dérivation devait survenir très vite car c'est elle qui justifie l'introduction de l'intégrale. C'est encore une remarque que je faisais dans mon IREM il y a une semaine.

Avec l'exposé de Daniel Perrin j'ai redécouvert qu'entre ces balises, qu'il avait d'ailleurs présentées à l'ADIREM comme un conseil de la CREM et dont nous nous félicitons tous les deux, le développement du programme est particulièrement mauvais.

C'est un ensemble incohérent de tentatives de compromis entre des partisans d'une approche heuristique et d'indécrottables rigoristes. Il a manqué quelqu'un ayant suffisamment d'autorité pour imposer une vision, quelle qu'elle soit. Il y en a pour tous et donc pour personne. Il semble même, d'après André Warusfel, que tel point ait été placé pour faire plaisir aux physiciens. Il faut absolument tenir compte des besoins de la physique. Ce n'est pas se contenter de faire plaisir à des collègues physiciens en leur concédant tel détail sans avoir cherché à comprendre avec eux ce qu'il leur fallait vraiment. Là aussi il a manqué quelqu'un ayant le courage d'aller plus loin qu'un accord de facade acquis à la va-vite.

Le gros défaut de ces programmes est la tendance à vouloir dicter la progression dans ses détails, ce qui ne laisse plus aucune liberté pédagogique aux collègues. La contre-proposition de Daniel Perrin présente le même défaut. Elle s'étale sur deux pages complètes.

Or en mentionnant simplement

- l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment vue comme une aire,
- l'extension aux fonctions réelles et aux intégrales définies, la relation de Chasles,
- la dérivation par rapport à la borne supérieure dans le cas continu monotone,
- et la linéarité de l'intégrale,

on ne doit pas être loin du compte.

Le point non évident est l'additivité. Cependant pour définir l'intégrale d'une fonction réelle, il suffit de montrer l'additivité pour une fonction et une constante positives. Le cas général a besoin du lien entre intégrale et dérivée, donc du fait qu'une fonction de dérivée nulle est constante.

Axiomatiques.

Daniel Perrin s'est servi d'une magnifique citation de Dieudonné qui fustige ces gens qui ont besoin de construire explicitement des modèles pour les axiomatiques considérées. L'un et l'autre ont certainement raison. Là où je ne suis pas Daniel Perrin c'est lorsqu'il nous présente une axiomatique des parties quarrables du plan qui est impeccable à un détail près, celui où il est dit que sont quarrables les parties usuelles.

Dans un discours nous présentant les propriétés de base des aires sur lesquelles on va s'appuyer, sans prétendre nécessairement à l'exhaustivité, cette dernière affirmation me conviendrait. Sinon j'y vois comme une réminiscence de ce théorème d'existence des primitives qu'on trouvait dans les programmes d'il y a une ou deux décennies et qui renvoyait aux fonctions rencontrées par les élèves, lesquelles figuraient au B.O.

Pour que l'axiomatique soit complète, ce qui est important pour une axiomatique mais *n'est pas* mon exigence dans la présentation de l'aire, il faudrait connaître toutes les constructions autorisées et non pas quelques unes qui ne suffisent même pas à parler de l'aire d'un disque.

Au passage on peut parler d'aire sans qu'il soit besoin d'introduire la mesure de l'aire. Certes l'aire a une dimension physique; il faut le savoir — l'aire n'est pas un nombre réel — et parfois aussi l'oublier momentanément. S'il faut parler de la mesure de l'aire, de la mesure de l'aire de la surface, alors il faut aussi parler de la mesure de la longueur, de la mesure de la longueur du côté du carré. Où va-t-on?

Je suis surtout gêné par la réaction qui consiste à dire : s'il le faut je prends toutes les parties car un théorème de Banach dit que c'est possible. N'est-ce pas très précisément tomber dans cette forme de rigorisme dont parle Dieudonné? Il faut toujours montrer qu'on peut bâtir une théorie qui n'ajoute pas de contradiction à celles que pourrait contenir la théorie des ensembles.

Oublions le fait que ce qui est possible en dimension 2 cesse de l'être en dimension 3. Le plus gênant est que les propriétés indiquées ne suffisent pas pour définir une aire. L'engouement actuel pour l'enseignement des probabilités devrait quand même faire penser à la propriété d'additivité dénombrable. Sans cette dernière on ne mesure tout simplement pas. Il se trouve qu'on peut troquer l'axiome du choix général contre un autre bien plus commode : toute partie du plan est mesurable pour la mesure de Lebesgue. Ne cédons cependant pas à la tentation : ce qui est logiquement correct n'est pas forcément judicieux.

A tout prendre, si l'on cherche une axiomatique rigoureuse, non pas pour les aires planes en général mais pour l'intégrale vue comme l'aire du sous-graphe, la présentation de Georges Lion est moins pédante.

Cela étant, l'intention de parler d'aires planes et d'en donner quelques propriétés intuitives est quand même louable. Lorsqu'il faudra parler d'une aire, il serait quand même dommage de la "définir" comme une intégrale. Mais cela rejoint le thème de la modélisation.

Calcul approché d'intégrales.

L'adjectif *approché* devrait être utilisé de façon très prudente dans l'enseignement des mathématiques. Dans une locution comme *valeur approchée*, il renvoie aux "mathématiques numériques". Les "méthodes numériques", qui sont omniprésentes dans l'industrie, utilisent des concepts de l'Analyse mathématique, mais elles constituent un monde à part. Lorsqu'on associe, comme l'a fait Daniel Perrin, le calcul approché d'intégrales aux calculatrices, c'est bien à ce monde que l'on est censé référer. Accessoirement les algorithmes réellement implantés dans les machines, petites ou grosses, sont souvent très sophistiqués; il n'est peut-être pas mauvais qu'un enseignant en ait une petite idée à l'occasion; cependant cela ne concerne en rien l'apprentissage des notions de base.

Or ce n'est pas du tout ce monde que Daniel Perrin a en vue pour les intégrales. Le même adjectif *approché* est aussi employé à l'intérieur des mathématiques les plus pures. Lorsqu'il procède par approximation pour calculer l'aire sous la parabole, Daniel Perrin fait un calcul exact, dont le résultat est la limite d'une suite. Lorsqu'il évalue la fonction $n!$, c'est un encadrement exact qu'il obtient. D'ailleurs la formule asymptotique de Stirling est aussi parfaitement exacte.

Donc il ne faut pas tricher. Il y a beaucoup de mathématiques dans l'industrie. Mais il ne faut pas laisser croire qu'on va entrer dans ce monde à l'occasion des calculs de sommes de Darboux. On en sera plus proche en prenant $\pi = 3$ pour évaluer le nombre de pots de peinture nécessaires à la réfection d'une coupole.

Les vrais calculs approchés relèvent des mathématiques dites mixtes. L'erreur doit bien sûr petite, le plus souvent en valeur relative, mais le sens de ce qui est petit relève essentiellement du contexte. Le monde des mathématiques pures n'a pas ce genre de souci. La répugnance des mathématiciens à considérer à l'occasion de vraies valeurs approchées est coinsidérable. En général ils entendent par calcul approché le calcul d'un encadrement, qui est exact. Ce n'est pas étonnant d'entendre Jean-Pierre Kahane parler de calcul "à la louche" quand il en est autrement. De même a-t-on décrété, au collège ou au lycée, ce qu'est l'ordre de grandeur d'un nombre, avec l'article défini. C'est proprement monstrueux : il faut laisser de la souplesse, accepter 10^{-3} et 2.10^{-3} par exemple. Avec une définition rigide l'ordre de grandeurs du produit n'est pas le produit des ordres de grandeur.

Modélisations.

Beaucoup de grandeurs géométriques ou physiques, comme un volume ou un moment d'inertie s'expriment à l'aide d'intégrales. Le document d'accompagnement des programmes utilise ainsi la formule

$$V(z) = \int_a^z S(u)du$$

pour exprimer le volume "jusqu'à z" d'un pilier de révolution autour de l'axe vertical $0z$, où $S(z)$ est l'aire de la section à la hauteur z. Vouloir expliquer cette formule, dont on a déjà parlé, est le moins qu'on puisse faire.

Cette fois-ci on considère un cône droit, autrement dit de révolution, ou alors un cône oblique. Il est par exemple posé sur sa pointe. Dans les deux cas, et dans bien d'autres, le physicien écrit

$$dV = Sdz\ .$$

Dans le cas du cône droit le mathématicien écrit, pour $h > 0$, l'encadrement

$$S(z).h \leq V(z+h) - V(z) \leq S(z+h).h$$

et il divise par h pour passer à la limite. Faisant de même pour $h < 0$ il en tire la dérivée $V'(z) = S(z)$. Dans le cas du cône incliné il ne sait pas quoi faire. Bien sûr une transvection ramène au cas droit, mais il faudrait le montrer; et il y a d'autres solides que les cônes.

Un consensus semble se dessiner entre les deux communautés scientifiques. La version du physicien serait la version courte d'une version longue qui serait celle du mathématicien. On ne pourrait pas exiger en permanence la version longue, mais il faudrait la montrer en une ou deux occasions.

Malheureusement ce n'est pas cela. Les deux versions ne relèvent pas de la même philosophie. Elles ne sont pas porteuses du même "sens". L'une n'est pas la version courte et l'autre la longue. Elles ne sont pas commensurables.

Commençons par la version du mathématicien avec l'exemple du cône droit. On part d'un encadrement exact, fondé sur le seul principe que le tout est plus grand que la partie. On en déduit l'encadrement

$$S(z) \leq \frac{V(z+h) - V(z)}{h} \leq S(z+h)$$

où l'on reconnaît le formalisme de la dérivation, suivant lequel la dérivée est la limite d'une pente, en s'appuyant sur la continuité de la fonction S. Le sens est ici porté par le formalisme.

Dans la version du physicien

$$dV = Sdz$$

c'est très différent. On s'appuie sur le fait que l'erreur, qui consiste à assimiler à la section en z les sections voisines, est en valeur relative d'autant plus petite que dz, pensé comme petit et non pas infinitésimal, l'est. Le sens est ici primitif. D'ailleurs il y a quelques difficultés. Cela ne vaut pas pour la pointe. D'un autre côté le cône peut être incliné sans réel dommage.

La bonne règle voudrait qu'en matière d'enseignement on s'appuie sur le sens primitif avant de faire le choix du formalisme. C'est bien pour cette raison que les opérations sur les nombres concrets doivent être introduites avant celles sur les nombres abstraits. De la même façon il faudrait habituer les élèves à l'écriture de $dv = Sdz$ avant de donner la définition officielle d'une dérivée. Si on veut bien en convenir, alors je suis prêt à accepter qu'on présente la manip de Jacques Treiner sur la désintégration radioactive avant de parler de dérivée en mathématiques.

Maintenant qui doit se charger du $dv = Sdz$? Si l'horaire de mathématiques le permettait il faudrait que le mathématicien s'en charge, parce qu'il a déjà trop eu tendance à se débarrasser de son environnement. Sinon ce peut être aussi le travail du physicien, puisqu'il n'y a pas de notion mathématique nouvelle en jeu.

Remarquons que les nouveaux programmes parlent de la "notation" $df = f'(x)dx$. Mais il s'agit juste d'un placage. C'est un peu comme ces nouveaux programmes du collège qui réintroduisent les calculs sur les nombres concrets.

Par ailleurs il ne faudrait pas donner l'impression que chaque sujet, comme les volumes ou les moments d'inertie, donne miraculeusement lieu à un traitement rigoureux parce qu'on aura introduit une petite axiomatique autour. Il existe un cadre mathématique rigoureux pour tous. Ce dernier n'est pas du niveau de terminale. On se contentera donc d'un peu moins de rigueur en attendant.

Le logarithme et la notion de fonction.

Avec son exposé sur l'histoire de la fonction exponentielle et sur l'apport de Grégoire de Saint-Vincent, Jean Dhombres nous a fait découvrir la genèse de la notion de fonction.

Une fonction n'est pas une courbe, comme l'hyperbole, quand on ne s'est pas donné un repère; l'idée de repère n'existait pas à l'époque. Ce n'est surtout pas un tableau; les tables de logarithme existaient mais ce n'étaient que des tables. Une fonction est une variable qui dépend d'une autre, comme y est lié à x pour garantir que le rectangle construit sur x et y ait une surface donnée, i.e. que $xy = k$.

Qu'on cesse donc de parler de fonctions, ce qu'on prétend faire dès le collège, alors qu'on n'en n'a pas encore vu et a fortiori vu l'utilité. Et que l'on se garde bien, à tous les niveaux, de chercher à définir une fonction par un graphe ou un tableau.

Il y avait tellement de choses par ailleurs que j'attends une version écrite pour continuer de réfléchir. Je ne sais pas si je dois me réjouir ou me plaindre de la richesse de ces exposés historiques. D'un côté nous manquons tellement de repères pour choisir un fil directeur pour notre enseignement que c'est une chance de pouvoir regarder l'histoire, sans que ce soit bien sûr pour la singer. D'un autre il faudrait beaucoup de temps pour établir des ponts entre l'histoire des mathématiques et les préoccupations de l'enseignement d'aujourd'hui. Chaque minute de la première demanderait une heure de débat.

Retour sur la radioactivité.

Depuis la sortie des programmes, un passage d'une dizaine de lignes des documents d'accompagnement me chagrinait, celui où l'on passe de l'étude physique de la radioactivité à l'équation différentielle de la fonction exponentielle. Maintenant j'ai la clef et tout s'éclaire.

Quand on y lit une relation du genre

$$\frac{\Delta N}{N\Delta t} = -\lambda \tag{1}$$

il faut savoir que c'est le physicien qui s'exprime. Pour lui, implicitement Δt est un *petit* accroissement, suffisamment petit pour que N ne soit pas sensiblement modifié. C'est la convention de Jacques Treiner, qui ne veut pas Δt pour un accroissement important : c'est le petit intervalle de temps mesuré par un chronomètre. J'ai déjà expliqué pourquoi je préfèrais écrire dt tout en pensant Δt dès lors que l'on passe en mathématiques : parce qu'on ne veut plus traîner avec soi les conditions sur la petitesse, lesquelles, comme les approximations, sont dépendantes du contexte.

Ainsi la relation (1) est-elle déjà une équation différentielle. J'aimerais en avoir la confirmation avec la relation de l'expérience dont Jacques Treiner a parlé.

Là où le passage pêche, c'est quand il donne à penser qu'il a été écrit comme un texte mathématique, avec un mode d'expression faisant appel à un "passage à la limite" ou à la locution "on écrit". Peu importe qui l'a rédigé. S'il s'agit de mathématiques, alors il faut préciser que Δt est petit et les égalités approximatives. Souvenons-nous de la façon dont Daniel Perrin traite la tranche de cône avec un encadrement exact quel que soit l'accroissement dans les seules limites du cône.

Dans ces conditions le passage en question ne pouvait pas être compris par un mathématicien ou un enseignant de mathématiques. Comment se fait-il que les mathématiciens du GEPS ne l'aient pas remarqué? Dès lors que le passage faisait "partie de la physique", cela ne regardait plus? Qu'en était-il alors de cette collaboration tant citée en exemple?

Jacques Treiner voulait simplement dire que la relation (1) se traduisait en une équation différentielle

$$\frac{dN}{Ndt} = -\lambda \tag{2}$$

en remplaçant les accroissements par des accroissements infinitésimaux, ce qu'il appelle "passer au modèle continu". C'est bien à peu près ce qu'il dit. Mais s'il avait eu des mathématiciens sérieux en face de lui il se serait exprimé d'une façon claire pour tous.

Noter que passant de (1) à (2) on n'a rien changé si ce n'est qu'on est passé d'une propriété (1) portant le sens et tirée de l'expérience à une relation (2) exprimée dans le formalisme abstrait du calcul différentiel.

Encore Euler.

Pour présenter l'expression

$$\lim_{n\to\infty}\big(1+\frac{x}{n}\big)^n$$

c'est à tort que l'on invoque la méthode d'Euler; il n'y a finalement qu'une analogie de facade. Dans la méthode d'Euler naturelle on se donne un petit accroissement et on déroule une évolution complète; on ne se donne pas une valeur de x à l'avance pour choisir un pas adapté.

En revanche, comme l'a fait remarquer André Warusfel, l'approche probabiliste de la désintégration donne du sens à la formule, sans qu'il soit besoin de passer tout de suite à la limite. Cependant Jacques Treiner n'aime pas les dés trafiqués par Zeus et la probabilité

$$p = 1 - \lambda\Delta t$$

de sortir un 6. Est-ce une question de notation? Le choix malencontreux d'un Δt? C'est une question à approfondir.

L'article d'André Warusfel enrichit le sujet de façon fort intéressante. Finalement il démontre encore un peu plus qu'on ne peut pas le choisir comme une introduction pour la classe. Trop de choses se mélangent avec la loi exponentielle. C'est magnifique mais en même temps antipédagogique.

Darty n'a plus le monopole

Pour lutter contre la constante macabre, reprenant sans le savoir une idée que Max Karoubi avait testée il y a quinze ans en DEUG à Paris 7 et qui n'avait rien d'original, André Antibi veut mettre en expérimentation à très grande échelle un "système d'évaluation par contrat de confiance" dont on ne va pas détailler le principe, les motivations et les avantages. On va seulement relever les écueils signalés en commission.

D'abord le but de l'enseignement des mathématiques n'est pas que l'élève sache reproduire des exercices déjà travaillés. Refaire ce qui a été déjà fait est certainement l'un des temps de l'apprentissage. Il faudrait déjà mettre un bémol à cet engouement pour les questions complètement ouvertes, pour l'attitude de recherche etc. Cependant comme toute instruction digne de ce nom, l'enseignement vise l'autonomie de l'élève.

Ensuite il peut y avoir de fausses vocations chez des élèves trop sérieux qui arrivent par leur travail à des notes flatteuses mais pourraient s'effondrer dans un contexte moins favorable. L'expérience confirmera ou démentira.

Surtout le système pourrait être victime de son succès. Si les notes s'améliorent sensiblement, certains, non contents de pouvoir ainsi valider le mérite des programmes, pourraient être tentés de délirer sans retenue. De la même façon certains pourraient penser que l'horaire actuel est plus que largement suffisant et proposer de le réduire.

Cet écueil ne risque pas d'apparaître dans la phase d'expérimentation. Mais si le système devait être généralisé, il faudrait absolument conserver un certain nombre d'épreuves "témoin", concues sur le modèle traditionnel, pour vérifier en permanence que le plus grand investissement chez l'élève mis en confiance se traduit par un meilleur niveau suivant les anciens critères.