Testament

Jean-Pierre Ferrier, IREM de Lorraine, novembre 2005

Ce petit compte-rendu est sans doute le dernier que j'écris pour la commission. Jusqu'ici je pensais que je finirais par être imité. Apparemment je me suis trompé.

Ma désillusion a une autre cause. J'ai constaté qu'on pouvait faire des propositions absolument non pertinentes, voire fausses bien que ce soit moins grave — je dit bien fausses et non pas incorrectes car ce n'est pas une question de rigueur du discours — donnant lieu à des activités demandant une mise en œuvre complexe et gaspillant du temps, mais finalement profitables aux élèves. Suis-je alors autorisé à émettre des réserves? Non sans doute. Cependant je ne conçois pas l'enseignement comme vecteur d'obscurantisme, même pour la "bonne cause".

Il n'y a rien de surprenant dans l'utilité de choses non pertinentes. Ce n'est que le symptôme de la décadence, de notre système pédagogique comme de notre société. Il est probablement moins douloureux d'accompagner la décadence que de tenter de l'enrayer. Comme les soins palliatifs sont préférables à l'acharnement thérapeutique. Mais, en matière d'enseignement, je ne peux pas m'y faire.

Les pieds dans le plat.

Toutes les interventions auxquelles j'ai assisté cette dernière année à la commission ont été extrêmement intéressantes. Dans le cas contraire mes remarques, jugées destructrices sans doute à bon escient par certains, auraient été du temps perdu.

Cependant, même dans une contribution passionnante, il arrive inévitablement que certains points soient discutables. Et c'est le rôle d'une commission digne de ce nom d'en débattre pour aboutir soit à préciser le discours de façon à ce qu'il soit admis par tous dans certains cas, soit à éclaircir les divergences de point de vue dans d'autres.

C'est pour cela que les IREM sont des instituts universitaires. Rappelons que tout animateur IREM est universitaire, quel que soit son statut. Cela veut dire que sa réflexion n'est pas soumise à des contraintes hiérarchiques ou de circonstance, dans une liberté de pensée qui est la dernière chose qui reste aux universités.

Maintenant le monde du lycée est soumis à des contraintes, celle des programmes et de l'inspection. Surtout, comme pour les autres degrés, il véhicule des habitudes qui ne sont pas toutes inspirées par la hiérarchie mais n'en sont pas moins contraignantes. Il est intéressant de comprendre en détail toutes ces contraintes et ce qui en résulte. C'est la raison pour laquelle j'ai été fort intéressé par la rédaction sur le "chariot fou" proposée par Besançon, dans "un vocabulaire compatible avec celui enseigné au cours de mathématiques". Comme des productions de Strasbourg ou de Limoges m'avaient intéressé avant.

Cependant, si la rédaction en question est un bon point de départ, un travail de type IREM ne peut pas en rester là. Il y a quand même le mot "recherche" dans IREM. Sans doute est-il abusif. Au moins pourrait-on en attendre quand même un minimum de réflexion.

L'adjectif “proportionnel” peut déstabiliser les élèves? Sans doute. Mais alors pourquoi? Peut-on parler de “vecteurs proportionnels”? Là on n'est plus dans la classe. Et la réponse est oui : on en parle en mathématiques. Est-ce judicieux? Là on peut toujours discuter.

On propose de remplacer “proportionnel” par “colinéaire”. Il me semble avoir insisté sur l'inconvénient de ce choix vis-à-vis de la physique. On peut bien sûr passer sur cette réserve, argumenter pour défendre l'adjectif “colinéaire”, ce que je saurais aussi faire d'ailleurs mais avec des arguments trop savants. Ailleurs qu'en France on dirait de ”direction opposée”. Cependant on ne peut pas ignorer une telle réserve. A quoi sert-il alors de se réunir? Ne faut-il débattre sur rien?

Voici maintenant quelques remarques sur le nouveau texte.

- Les forces et la vitesse sont “modélisées” par des vecteurs. Non : ce *sont* des vecteurs; voir Henri Poincaré et “les définitions en mathématiques”.

- Je ne comprends pas la critique sur le repère. Cette tendance à “définir” est assez insupportable. Il y a des lacunes plus graves. Par exemple il est absolument faux que $\vec{R}$ soit “colinéaire” à $\vec{v}$ si le chariot est semblable au dessin. Le frottement fluide aura tendance à faire décoller le chariot comme une aile d'avion. Il fallait intégrer à $\vec{R}$ la différence entre la pesanteur et les forces de réaction du rail sur les essieux. De plus n'y a pas de raison que la force de traction et les forces de frottement soient appliquées au même point. D'où la possibilité d'un couple etc.

- La distance x est bel et bien aussi une fonction de t. Ce n'est pas l'usage dans le cours de mathématiques du lycée, mais il me semblait avoir fait un laius et écrit un texte sur les fonctions pour expliquer cela. On a l'impression de découvrir le problème. Même chose pour la fonction et la variable de l'équation différentielle. Trouverait-on judicieux de dire : j'appelle y la solution de $x + 2 = 0$?

- A l'instant $t = 0$ on a $x = 0$ simplement; où alors $x(0) = 0$. Les autres écritures sont redondantes.

- Ecrire $\vec{R} = -k\vec{v}$ suffirait. Sinon, avec la seule “colinéarité”, on manque l'essentiel, à savoir que la résistance est proportionnelle à la vitesse, ce qui signifie concrètement que si la vitesse est doublée la résistance l'est aussi, chose qu'on peut interpréter de façon pédante comme une proportionnalité vectorielle dans un espace fonctionnel. C'est le point important. De plus on ne peut justifier ce choix pour les frottements qu'a posteriori, parce qu'on trouve une vitesse limite de 2m/s = 7,2 km/h assez faible.

Pour le reste la nouvelle rédaction ne change rien aux critiques de fond sur l'exercice. La “partie physique” était juste là pour la frime. Tout élève qui prenait le soin de la lire ne pouvait qu'être déstabilisé. Alors, plus ou moins bien rédigée, plus ou moins correcte, quelle importance! A tout prendre, se mettre à corriger un pareil énoncé sur des points de détail se révèle un remède encore pire que le mal.

Modélisation.

L'exposé d'Annette Leroy sur la modélisation par D. Bernouilli de l'épidémie de la variole a été passionnant. Le sujet illustre parfaitement les deux définitions données par Jean Dhombres à propos de modélisation.

A ce sujet il faudra lui demander de renoncer à parler de "modèle" pour ce qu'il définit si bien avec la phase préparatoire. S'il ne veut pas me rejoindre en parlant "d'hypothèse" — comme pour les trois hypothèses de Bernouilli — peut-être pourrait-il utiliser un néologisme comme "prémodèle". Je fais ce choix en attendant mieux. En effet dès qu'on aborde une situation probabiliste où le modèle est $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sa terminologie est intenable. Par ailleurs, en français, le modèle est le résultat de l'acte de "modélisation", que je me suis hasardé à appeler "thèse".

On notera que, dans l'étude de la radioactivité, Jacques Treiner classe ses deux hypothèses (absence d'interaction, absence de vieillissement) dans le "prémodèle" qu'il appelle "modèle physique". La "modélisation" de Jean Dhombres est son "modèle mathématique".

Jusqu'où reste-t-on dans le "prémodèle"? Il peut consister en une analyse phénoménologique en langue courante ou comporter déjà des équations. Je n'ai pas d'idée arrêtée dans chaque cas. Faut-il y inclure les équations discrètes de Bernouilli? L'itération $\delta A = -\lambda A \delta t$ en radioactivité? En tout cas l'équation logistique est bien une "modélisation", comme l'équation $dN = -\lambda N dt$ ou la construction de l'exponentielle.

Un exemple très simple de modélisation a été fourni par le problème des trois urnes dans lesquelles on dépose au hasard deux boules et pour lequel on demande la probabilité pour que l'urne du milieu soit vide.

En l'absence de précision sur le protocole, il n'existe pas de "prémodèle", donc pas de "modélisation" ni de "modèle". Dans certains cas, comme dans le pseudo-problème de la corde de Bertrand, il faut s'arrêter là et refuser la question.

Cependant nous avons ici des hypothèses implicites assez naturelles, sachant qu'on peut bien sûr légitimement en préférer d'autres, auquel cas on attaquera un autre problème. En explicitant les hypothèses nous construisons un "prémodèle" et nous pouvons répondre. L'une des hypothèses sera l'interchangeabilité des urnes; l'autre l'indépendance des placements des deux boules.

On peut maintenant répondre sans construire de modèle. A chaque placement la probabilité que l'urne centrale soit évitée est $2/3$; la réponse est $2/3 \times 2/3 = 4/9$.

Notons qu'il y a d'autres exemples où le recours à la modélisation, à l'explicitation du modèle, est superflu. Dans le cas de la radioactivité, la l'utilisation de $\delta A = -\lambda A \delta t$ suffit à justifier les hypothèses. Il n'est besoin ni de $dN = -\lambda N dt$, ni de fonction exponentielle. Ne pas en déduire cependant que logarithme et exponentielle sont inutiles en physique; c'est tout le contraire.

Revenons aux urnes et aux boules et cherchons à expliciter quand même un modèle, c'est-à-dire un ensemble Ω etc. Contrairement à une idée reçue un tel ensemble ne peut être arbitraire, même si plusieurs possibilités équivalentes sont souvent offertes. Il faut en effet pouvoir y traduire nos hypothèses. Dans notre exemple, même si les boules sont indiscernables, il va nous falloir les discerner temporairement pour pouvoir parler d'indépendance des placements. Cela correspondrait au fait qu'elles ne sont pas placées simultanément, qu'il y a donc une première, ou alors qu'il y a deux placeurs, et qu'il y a celle d'untel. Le protocole expérimental introduira une distinction temporaire. A défaut il faudrait toujours placer les boules ensemble et le résultat serait $2/3$.

Nous choisissons donc $\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$. Les hypothèses imposent que la probabilité P à y mettre, en l'absence de toute équiprobabilité a priori, soit invariante par l'action du groupe des permutations de chaque facteur et vérifie $P((i,j)) = P(i)P(j)$. Il y a une possibilité et une seule, qui conduit à l'équiprobabilité, mais comme conséquence des hypothèses.

Ensuite on peut introduire une tribu d'événements construite sur six événements élémentaires seulement pour traduire le fait qu'à l'arrivée les boules sont indiscernables ou qu'on cherche pas à les distinguer.

En cas de doute sur le modèle, rien ne sert de simuler. La simulation ne peut ni valider, ni invalider un modèle puisqu'elle s'appuie sur ce dernier.

En général rien ne sert d'expérimenter non plus. Une fois que le protocole expérimental est bien établi, il en sort en général les hypothèses et le modèle.

Notons toutefois qu'on peut simuler sans avoir de modèle explicite. Il suffit d'avoir précisé le protocole expérimental et de vérifier que la simulation "colle" à ce protocole. Dans notre exemple si l'expérience consiste à placer une boule au hasard, puis une autre, la façon de simuler la chose s'impose. C'est précisément celle que Jean-Alain Roddier nous a présentée, et que certains élèves n'ont pas pas choisie parce qu'il n'ont pas voulu préciser le protocole, préférant s'appuyer sur une stratégie "toute faite".

Temps caractéristique.

Le temps caractéristique est avant tout une notion physique. Tenter de lui donner un "sens mathématique" à côté de son "sens physique" serait vain. D'ailleurs il n'y a jamais double sens. Comme l'a bien dit Jean-Alain Roddier, il faut s'exprimer de la même façon partout dans l'enseignement, pas souci d'économie et d'efficacité d'abord.

Maintenant, avec les notions de régime transitoire et de régime établi, le temps caractéristique est l'une de ces notions physiques qu'il faut importer dans le cours de mathématiques pour *donner du sens* aux équations. J'ai entendu ce discours dans la bouche de Michel Merle quand il travaillait pour la CREM.

S'ils veulent importer des notions physiques, encore faut-il que les mathématiciens fassent un peu preuve d'ouverture. Ce n'est pas une question de compétences pointues mais d'état d'esprit. Ne pas oublier la cohérence des dimensions, les unités, ne pas être rebuté par l'utilisation de paramètres. Quand cela sera-t-il enfin compris?

Il m'est arrivé d'écrire qu'il ne convenait pas de "faire" de la physique dans le cours de mathématiques et inversement. Je maintiens mais, dans ce cas, je prends "faire" des mathématiques ou de la physique comme exercer l'activité *spécifique* de l'une ou l'autre discipline. Le physicien explique les lois physiques; le mathématicien les prend pour acquises, même s'il s'en sert pour introduire les concepts abstraits et a contrario les illustrer, les enrichir d'une autre vision. Le mathématicien forge les outils abstraits; le physicien les utilise en permanence et les introduit à l'occasion, de même qu'il les enrichit aussi à sa manière.

Revenons au temps caractéristique. Juste après avoir dit que c'était une notion physique, remarquons que c'est une notion qui sort des équations. Ce n'est pas courant au niveau du lycée mais la découverte par Max Planck des quantas en est une illustration célèbre.

Cela nous rapproche donc des mathématiques sans nous faire sortir de la physique pour autant. En effet aucun physicien sérieux n'oserait prétendre aujourd'hui que sa discipline peut être pratiquée, jusqu'à la façon même de la penser, sans le langage mathématique.

Dans le cas de la loi exponentielle, on écrira

$$Ce^{-k(t-t_0)}$$

sous la forme

$$Ce^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

où $\tau = 1/k$ est le temps caractéristique. Cette petite manipulation couvre beaucoup de choses.

1) D'abord l'exponentielle exige en argument un nombre, une grandeur sans dimension si l'on préfère. Avec la nouvelle écriture la correction saute aux yeux : t, t_0 et τ ont la dimension d'un temps.; même dans le cours de mathématiques on peut le remarquer.

2) Le changement d'échelle $(t-t_0)/\tau = u$ ramène toutes les exponentielles à e^{-u}. Cela justifie d'étudier plus spécialement e^{-u} ou plutôt encore e^x en mathématiques.

3) D'un point de vue numérique, tout doit être mis en regard du temps caractéristique. Comme cela est dit dans le texte de Jean-Alain Roddier si $\Delta t = \tau/10$ la loi discrète approche assez bien la loi exponentielle entre les temps 0 et τ. De même, au-delà de 7τ, on atteint la valeur limite à un millième de l'écart initial près.

Cependant pour les aspects qualitatifs, ce n'est que l'ordre de grandeur de τ qui compte. Comparer au temps de demi-vie aurait les mêmes avantages.

Il ne faut pas chercher plus loin. Interpréter le temps caractéristique comme la sous-tangente est peut-être pratique, mais c'est un gadget de didacticien transposeur. Quand on considère la constante de temps RC par exemple, il n'y a pas que la charge ou la décharge exponentielle d'un condensateur pour l'illustrer. On la trouve aussi dans l'impédance complexe $1 + iRC\omega$, soit encore dans une formule.