Travaux personnels encadrés: deux exemples
(26/5/00)

Remarques générales.

Les deux exemples qui suivent mettent les mathématiques dans un contexte de physique pour l'un, et de biologie pour l'autre. Ils relèvent du thème de la **croissance**, positive ou négative, et suivent le même schéma en trois points:

- expérimentation et analyse des phénomènes,
- mise en place d'un modèle mathématique,
- comparaison des résultats du modèle avec les données expérimentales,

le dernier point permettant de confirmer ou d'infirmer les hypothèses émises lors de l'analyse phénoménologique. $\blacksquare$

Ce qui est proposé est d'une rare banalité. Mieux, le schéma ci-dessus devrait concerner la majorité des TPE scientifiques, du moins si l'on veut éviter les bavardages.

Pour autant, il est tout à fait exclu qu'un élève, même doué, puisse bâtir un schéma de ce type en se documentant seul. Il ne trouvera rien de directement utilisable sur le réseau ou dans les livres. La seule exigence raisonnable est donc la paraphrase d'un exemple, avec une aide sérieuse des enseignants. Ce faisant il aura déjà beaucoup plus appris qu'en collant des informations pêchées ici ou là.

Le professeur de physique pourrait s'approprier en totalité un exemple concernant sa discipline. Cele n'a rien d'étonnant: les mathématiques font partie de la physique et s'y nourrissent directement. Ce professeur pourra trouver des exemples en s'inspirant des exercices du lycée, et pourra proposer une véritable séance de TP.

Bien que le schéma soit le même pour l'exemple concernant sa discipline, le professeur de biologie s'y reconnaîtra moins facilement. Il n'est guère possible d'envisager l'expérimentation par l'élève, qu'on voit mal se lancer dans la culture, l'élevage ou l'expérimentation médicale. Le professeur devra donc aider l'élève à chercher des données dans une revue scientifique. L'excellent livre de

> *Mathématiques pour les sciences de la vie, de la nature et de la santé* de Jean-Paul et Françoise Bertrandias, paru aux PUG,

est une source irremplaçable de thèmes. L'exemple que nous proposons en est très directement tiré.

En fait il y a deux types de modèles: les modèles déterministes, qui se traduisent par exemple par des équations différentielles, et les modèles probabilistes. Les seconds sont hors de portée d'un élève de première, sauf à limiter l'intervention des mathématiques à l'application de recettes, ce qui serait bien dommage. Heureusement les premiers sont accessibles, et il n'est pas besoin de savoir ce qu'est une équation différentielle pour cela; un minimum de transcription à partir de la littérature sera juste nécessaire.

Mathématiques et physique: croissance de la tension de charge

1. Expérience et analyse.

Un générateur délivrant une tension $E = 100V$ est relié à l'instant $t = 0$ à un circuit comprenant en série une résistance $R = 500K\Omega$ et un condensateur non chargé de caractéristiques inconnues (de capacité $C = 100\mu F$ en réalité).

On mesure toutes les $10s$ la tension U en V aux bornes du condensateur et l'intensité I en mA qui traverse le circuit.

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
U	0	18	33	45	55	63	70	75	80	83
I	0,2	0,16	0,13	0,11	0,09	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03

(remplacer les valeurs ci-dessus par des valeurs expérimentales)

Cette expérience a pour but de valider de façon indirecte la loi physique suivante: *la tension U aux bornes d'un condensateur est proportionnelle à sa charge Q, le rapport Q/V définissant la capacité C.* La mesure directe de la charge Q serait en effet malaisée.

On suppose la loi d'Ohm déjà établie; la tension aux bornes de la résistance est égale à RI. Noter que la connaissance de la loi d'Ohm permet de justifier la mesure de la tension et de l'intensité avec le même appareil.

Analysons ce qui se passe à la lumière de notre hypothèse. Au début la tension aux bornes du condensateur est nulle. Celle aux bornes de la résistance est donc E. Par la loi d'Ohm un courant d'intensité $I = E/R$ traverse ainsi le circuit.

Ce courant est un déplacement d'électrons qui viennent charger le condensateur. Pendant un intervalle de temps Δt assez petit pour que les tensions aient peu évolué, le condensateur va recevoir la charge $\Delta Q = I\Delta t$.

La tension aux bornes du condensateur augmente de ΔU et celle aux bornes de la résistance diminue d'autant.

On sent bien que la tension U va croître et l'intensité I diminuer. L'expérience semble indiquer que l'intensité tend vers 0 et la tension vers E, propriétés naturellement équivalentes. Peut-on déjà déduire l'une ou l'autre de cas propriétés de notre hypothèse?

Le modèle mathématique.

Appelons U, I et Q la tension aux bornes du condensateur, l'intensité traversant le circuit et la charge du condensateur, à un instant t. Si Δt est assez petit pour que U ait peu varié entre les temps t et $t + \Delta t$, l'intensité restera à peu près égale à

$$I = \frac{E - U}{R}$$

et la charge aura varié de $\Delta Q = I\Delta t$, ce qui donnera

$$\Delta U = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{I}{C}\Delta t = \frac{E - U}{RC}\Delta t$$

pour la variation de la tension U.

Ici nous ne connaissons pas C; nous ne savons même pas si notre modèle est valide. Pour en décider, nous devons d'abord calculer sur le modèle. Il y a plusieurs manières de s'y prendre; nous commençons par la plus élémentaire.

Choisissons un intervalle de temps $\tau = \Delta t$ assez petit, par exemple la seconde. Appelons U_n et I_n la tension et l'intensité au temps $t = n\tau$. On a

$$I_n = \frac{E - U_n}{R} \tag{1a}$$

et la variation ΔU à partir de U_n est encore

$$U_{n+1} - U_n = \frac{I_n}{C}\tau = (E - U_n)\frac{\tau}{T} \tag{1b}$$

où $T = RC$, ce qui définit U_n à partir de la valeur initiale $U_0 = 0$ par récurrence.

La définition d'une suite récurrente suffit pour les calculs. **A titre facultatif**, on peut aussi donner à la loi une forme mathématique plus aboutie.

Au lieu de choisir Δt petit, on le choisira infiniment petit. On remplace $\Delta U/\Delta t$ par sa limite dU/dt lorsque Δt tend vers 0. La loi prend la forme

$$\frac{dU}{dt} = \frac{E - U}{T} \tag{2}$$

ou

$$U' = \frac{E - U}{T} \tag{2$'$}$$

d'une équation différentielle. Cette équation se ramène à l'équation $x' = x$ avec donnée initiale $x(0) = 0$, laquelle définira la *loi exponentielle*. Ce n'est pas au programme de première; on se contentera donc de raisonner sur des suites.

Faisons une étude mathématique des suites I_n et U_n. Notons que

$$I_{n+1} - I_n = -\frac{\tau}{T}I_n$$

de sorte que

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \frac{\tau}{T}$$

aussitôt. Ainsi la suite I_n apparaît comme une suite géométrique de raison $1 - \tau/T$. On a donc

$$I_n = I_0\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^n$$

par une récurrence facile. La valeur de U_n s'en déduit.

Déjà il apparaît que I_n décroît vers 0 et que U_n croît vers E.

Validation.

On va effectuer des calculs sur tableur à partir des relations (1a) et (1b).

On réservera la cellule E1 à la constante C en mF.

On placera dans les colonnes A et C de A1 à A91 et de C1 à C91 les nombres de 0 à 90. Les colonnes B et D auront la mission de donner les valeurs de U et I correspondantes. Pour cela on placera la valeur 0 en B1, on mettra en B2 la formule

= B1 + D1/E$1

et en D1 la formule

= (100 - B1)/500 ,

formules qui résultent de l'application des relations de récurrence pour $n = 0$.

En recopiant vers le bas B2 jusqu'en B91 et D1 jusqu'en D91 on calcule les suites récurrentes. Noter le dollar dans E$1 pour une référence absolue et l'absence de dollar dans B1 et D1 pour des références relatives. Le passage d'une ligne à l'autre laisse telles quelles les références absolues et modifie automatiquement les références relatives. On emploie les premières pour les grandeurs constantes et les secondes pour les grandeurs indexées.

Il reste à placer une valeur d'essai en E1. Si l'intensité était restée à $0,2mA$, la charge au bout de $100s$ aurait été de $Q = 0,02C$. Pour une tension de $U = 100V$ cela aurait donné $C = Q/U = 0,2mF$. On met cette valeur en E1 pour commencer. On demande un graphique cartésien pour les valeurs des colonnes A et B d'une part et C et D d'autre part.

En fait l'intensité diminue, de sorte que la valeur $C = 0,2mF$ est surestimée. En tâtonnant on retient $C = 0,1mF$ et obtient ce qui suit.

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
U	0	18	33	45	55	63	70	75	80	83
I	0,2	0,16	0,13	0,11	0,09	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03

Il resterait à vérifier la concordance entre valeurs mesurées et valeurs calculées, ce qui validerait l'hypothèse et donnerait la valeur de la capacité C recherchée.

Mathématiques et biologie: croissance d'une population de mouches

1. Expérience et analyse.

Citons J.-P. et F. Bertrandias:
"Le biologiste P. PEARL a étudié une population de *drosophiles* (mouches) se reproduisant assez rapidement (cycle de 10 à 12 jours). Dans une bouteille dont le fond contenait une quantité suffisante de nourriture, il a introduit 22 mouches d'âges variés et il a noté chaque jour le nombre N de mouches. Le résultats ont été les suivants (t est le nombre de jours écoulés depuis le début de l'expérience):

t	0	9	12	18	21	25	29	33	36	39
N	22	39	105	225	390	499	618	791	877	938

"

Appelons ΔN la variation du nombre de mouches à partir de leur nombre N pendant le petit intervalle de temps Δt à partir du temps t. Faisons comme si N était une grandeur continue, ce qui n'est pas très réaliste pour une population de 22 individus, mais commence à le devenir par la suite.

L'intervalle Δt est supposé assez petit pour que la population N varie peu pendant cet intervalle. Les choses étant à peu près les mêmes au temps $t + \Delta t$ qu'au temps t, la variation pendant l'intervalle de temps Δt à partir du temps $t + \Delta t$ sera encore ΔN. Ainsi la variation pendant l'intervalle de temps $2\Delta t$ à partir du temps t sera $2\Delta N$.

En conséquence, pour Δt petit, la variation ΔN est proportionnelle à Δt.

Par ailleurs, on peut considérer qu'au début les limites de la bouteille ne jouent pas. Si l'on doublait la population de départ en ajoutant une population équivalente, on admettrait qu'au début les deux populations ne se gênent pas et que la variation serait double.

En conséquence, au début, la variation ΔN est proportionnelle à N.

En revanche, les limites de la bouteille finiront par se faire sentir. Clairement la population ne peut dépasser une certaine valeur N^*, difficile à déterminer a priori cependant. Plus N se rapprochera de N^*, plus la croissance de la population de mouches sera contrariée, au point d'être totalement impossible si l'on atteint la valeur N^*.

2. Le modèle mathématique.

On va considérer le quotient

$$k(N) = \frac{\Delta N}{N \Delta t}$$

qui est le *taux de croissance*. Ce taux est certainement positif au début. Pour exprimer le fait qu'il est nul pour $N = N^*$, le plus simple est de faire l'hypothèse que

$$k(N) = k(N^* - N)$$

où k est une vraie constante. La loi correspondante

$$\Delta N = kN(N^* - N)\Delta t$$

est appelée loi logistique.

Ici nous ne connaissons ni N^*, ni k; nous ne savons même pas si notre modèle est valide. Pour en décider, nous devons d'abord calculer sur le modèle. Il y a plusieurs manières de s'y prendre; nous commençons par la plus élémentaire.

Choisissons un intervalle de temps $\tau = \Delta t$, par exemple la journée. Appelons N_n le nombre total des mouches au bout du temps $n\tau$, par exemple de n journées. La variation ΔN à partir de N_n est encore

$$N_{n+1} - N_n = \kappa N_n (N^* - N_n) \tag{1}$$

où $\kappa = k\tau$, ce qui définit N_n à partir de la valeur initiale $N_0 = 22$ par récurrence.

La définition d'une telle suite récurrente suffit pour effectuer des calculs sur un tableur. **A titre facultatif**, on peut aussi donner à la loi une forme mathématique plus aboutie.

Au lieu de choisir Δt petit, on le choisira infiniment petit. On remplace $\Delta N/\Delta t$ par sa limite dN/dt lorsque Δt tend vers 0. La loi prend la forme

$$\frac{dN}{dt} = kN(N^* - N) \tag{2}$$

ou

$$N' = kN(N^* - N) \tag{2'}$$

d'une équation différentielle. Cependant on ne dispose pas en première des fonctions de base permettant de résoudre cette équation. On doit donc se contenter de la résolution approchée déjà donnée.

Sinon on peut faire une étude mathématique de la suite récurrente définie par (1). Changeant les notations, on se donne des constantes positives x^* et κ vérifiant $\kappa x^* < 1$ et une valeur x_0 telle que $0 < x_0 < x^*$.

On montre que la relation de récurrence

$$x_{n+1} - x_n = \kappa x_n (x^* - x_n) \tag{1'}$$

définit une suite (x_n) vérifiant $0 < x_n < x^*$, strictement croissante et convergeant vers x^* lorsque $n \to \infty$.

Les résultats de cette étude qualitative sont conformes aux constatations expérimentales.

3. Validation.

On va effectuer une étude numérique. Choisissant un intervalle τ d'une journée, on peut travailler directement à partir de la relation (1) avec un tableur.

On réservera les cellules C1 et C2 pour les constante N^* et κ.

On placera dans la colonne A de A1 à A40 les nombres de 0 à 39. La colonne B aura la mission de donner les valeurs de N correspondantes. Pour cela on placera la valeur 22 en B1 et on mettra en B2 la formule

= B1 + C$2*B1*(C$1 - B1)

qui résulte de l'application de la loi de récurrence (1) pour $n = 0$.

En recopiant vers le bas la cellule B2 de B3 à B40 on calcule la suite récurrente. Noter les dollars dans C$1 et C$2 pour des références absolues et l'absence de dollars dans B1 pour des références relatives. Le passage d'une ligne à l'autre laisse telles quelles les références absolues et modifie automatiquement les références relatives. On emploie les premières pour les grandeurs constantes et les secondes pour les grandeurs indexées.

Il reste à placer des valeurs d'essai en C1 et C2. Choisissant C1 entre 1000 et 1050 d'après le graphique, on peut commencer par C2=17/9/22/1000. On demande un graphique cartésien pour les données des colonnes A et B.

On essaiera en tâtonnant de trouver une courbe proche de celle résultant des données expérimentales. Voici ce que l'on obtient pour $N^* = 1035$ et $\kappa = 0,00015$.

t	0	9	12	18	21	25	29	33	36	39
N	22	76	114	239	332	481	640	781	863	922

La courbe calculée a même allure que la courbe expérimentale: la croissance s'accélère d'abord pour ralentir ensuite.

Cependant l'adéquation des valeurs calculées avec les données est imparfaite. C'est assez normal compte-tenu du petit nombre de mouches introduites initialement. Il faudrait effectuer bien d'autres expériences pour valider vraiment le modèle.

Noter qu'il serait aberrant de chercher une fonction, un polynôme par exemple, serrant de plus près les valeurs expérimentales, sans que le choix de cette fonction soit motivé par l'analyse des phénomènes.

Conclusion provisoire.

On peut tirer deux enseignements principaux de la présentation des deux exemples qui ont été choisis.

D'abord pourquoi le ministre a-t-il retenu la formule si prétentieuse du TPE? Stricto sensu toute l'activité de l'élève en classe relève du travail personnel encadré. Les TPE le seraient peut-être un peu moins que le reste. S'il s'agit de glaner des informations sur le réseau ou auprès d'autres camarades, le côté personnel peut raisonnablement se discuter. Quant à l'encadrement il restera toujours un peu plus flou pour un TPE que pour un exercice ordinaire en classe.

On aurait pu choisir la formule d'un travail pratique interdisciplinaire, avec sujet imposé et la présence conjointe de deux enseignants de disciplines différentes. On aurait réservé une seule demi-journée pour cela et demandé simplement aux élèves un compte-rendu.

Ensuite on remarquera que les deux exemples proposés font usage du tableur. Cependant il s'agit d'un usage intelligent, relevant de la programmation. Si les conditions le permettaient, rien n'empêcherait de remplacer le tableur par un programme en langage Pascal ou autre.

Cet appel au tableur ne doit pas camoufler le fait qu'utiliser un tableur en mathématiques, avec comme seul argument l'existence des tableurs, est à bannir définitivement. De même faut-il bannir l'usage des ordinateurs, des calculatrices, des logiciels de géométrie dynamique ou de calcul formel en dehors de quelques situations très particulières.

Puisqu'une variante plus modeste et plus formatrice de l'idée de TPE permet enfin une utilisation des machines qui ne soit pas trop débile, profitons-en pour circonscrire ces machines à ce cadre et pour les interdire aux interrogations écrites, examens et concours sans concession aucune.