

Exercices sur le chapitre 4 : SERIES NUMERIQUES

57. Déterminer la nature de la série de terme général u_n , lorsque u_n est égal à

a) $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

b) $\frac{(n!)^2}{2n^2}$

c) $\frac{n^2}{n^3 + 1}$

d) $\frac{1}{(\ln n)^n}$

e) $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

f) $\frac{1}{\ln(n^2 + n + 1)}$

g) $\frac{n^2}{(1 + \delta)^n}$, $|\delta| < 1/2$

h) $\frac{1 + 2 + \dots + n}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$

i) $1 - \cos \frac{1}{n}$

j) $2^{-\sqrt{n}}$

k) $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

l) $e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+a}}$, $a > 0$

m) $\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1$

n) $f\left(a + \frac{1}{n}\right) + f\left(a - \frac{1}{n}\right) - 2f(a)$, (f de classe C^2 au voisinage de a)

58. Déterminer l'ensemble des triplets $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tels que la série de terme général $u_n = \frac{1}{an + b} - \frac{c}{n}$ soit convergente.

59. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) avec $a > 0$ et $b > 0$, tels que la série de terme général $u_n = \frac{2^n + a^n}{2^n + b^n}$ soit convergente.

60. On pose $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

a) Montrer que pour tout entier $n > 0$, on a

$$(1) \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

b) En déduire que e est irrationnel. (Si $e = a/q$, appliquer la formule (1) avec $n = q$).

61. On pose $u_n = \sin(n!\pi e)$.

a) Quelle est la parité de l'entier $A_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$?

b) A l'aide de (1), établir que $n!\pi e = \pi A_n + \frac{\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

c) En déduire que la série de terme général u_n est semi-convergente.

62. Montrer que la série de terme général $u_n = \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^n dx$ est convergente.

(Calculer les sommes partielles à l'aide d'une série géométrique).

63. Soit P et Q deux polynômes de $\mathbf{C}[X]$ de degré p et q respectivement, avec Q non identiquement nul. Soit $u_n = P(n)/Q(n)$. Montrer que

a) $\sum u_n$ converge si et seulement si $q \geq p + 2$,

b) $\sum (-1)^n u_n$ converge si et seulement si $q \geq p + 1$.

64. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ converge et vaut $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$. Utiliser la formule

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k + \frac{a^n}{1-a}.$$

65. Soit $\alpha \neq 0$. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^{n+1}}$. (Utiliser un développement limité).

66. Construire deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ l'une convergente, l'autre divergente, telles que $u_n \sim v_n$ (s'inspirer de l'exercice 55).

67. Démontrer la règle de Cauchy : soit $u_n \geq 0$, on suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell,$$

alors, si $0 \leq \ell < 1$ la série $\sum u_n$ converge (Se ramener à une série géométrique). Que se passe-t-il si $\ell > 1$, ou si $\ell = 1$?

68. Etudier la convergence de la série $\sum u_n$ dont le terme général est défini par $u_{2p} = (2/3)^p$ et $u_{2p+1} = 2(2/3)^p$, par la règle de Cauchy et par la règle de l'Alembert.

69. Soit $u_n > 0$. On pose $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ et $w_n = \frac{u_n}{1+u_n^2}$.

a) Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

b) Comparer la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$.

70. Calculer $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$.

71. Soit le polynôme de degré k : $P_k(X) = X(X-1)\cdots(X-(k-1))$.

a) Calculer $\sigma_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_k(n)}{n!}$, en utilisant la série $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

b) En déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + n^2 + n + 1}{n!} = 9e$.

72. Déterminer un entier n tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > 10^5$ (Comparer la somme avec une intégrale).

73. (Difficile) Montrer par le critère de Cauchy que la série $\sum \frac{\cos \ln n}{n}$ diverge.

Corrigé :

57. Remarque les séries de a) à l) sont positives.

a) Formons u_{n+1}/u_n . On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(2n+2)! (n!)^2} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \frac{(2n)!}{(2n+2)!}.$$

et en simplifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)^2 \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2}.$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} < 1.$$

La série de terme général u_n converge donc.

b) Formons u_{n+1}/u_n . On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2 2^{n^2}}{2^{(n+1)^2} (n!)^2} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \frac{2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}}.$$

et en simplifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)^2 \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1.$$

La série de terme général u_n converge donc.

c) On a

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

Comme la série de terme général $1/n$ diverge, la série de terme général u_n diverge également.

d) Formons u_{n+1}/u_n . On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\ln n)^n}{(\ln(n+1))^{n+1}} = \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^n \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Donc

$$0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Et il résulte du théorème d'encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1.$$

La série de terme général u_n converge donc.

e) On a

$$(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \ln \ln n} = n^{\ln \ln n}.$$

Comme $\ln \ln n$ tend vers $+\infty$, on a, à partir d'un certain rang

$$\ln \ln n \geq 2 ,$$

donc

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2} .$$

Comme la série de terme général $1/n^2$ converge, il en résulte que la série de terme général u_n converge également.

f) On a

$$\ln(n^2 + n + 1) = 2 \ln n + \ln \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) ,$$

et

$$\frac{\ln(n^2 + n + 1)}{2 \ln n} = 1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{2 \ln n} .$$

Comme cette expression converge vers 1, on en déduit que

$$u_n \sim \frac{1}{2 \ln n} .$$

Mais, on a quel que soit $x > 0$,

$$\ln x \leq x ,$$

donc

$$\frac{1}{2 \ln n} \geq \frac{1}{2n} .$$

Et comme la série de terme général $1/(2n)$ diverge, il en est de même de celle de terme général $1/(2 \ln n)$ puis de celle de terme général u_n .

g) Formons u_{n+1}/u_n . On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(1+\delta)^{n+1}} \frac{(1+\delta)^n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \frac{1}{1+\delta} .$$

Cette expression converge vers $1/(1+\delta)$. On a alors les trois cas suivants :

si $-1/2 < \delta < 0$, on a $1/2 < \delta+1 < 1$, donc $1/(1+\delta) > 1$ et la série de terme général u_n diverge.

si $0 < \delta < 1/2$ on a $\delta+1 > 1$, donc $1/(1+\delta) < 1$ et la série de terme général u_n converge.

si $\delta = 0$, on a $u_n = n^2$. Le terme général ne tend pas vers zéro, et la série de terme général u_n diverge.

h) Si l'on connaît les sommes

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ,$$

on obtient immédiatement

$$u_n = \frac{3}{2n+1} \sim \frac{3}{2n} ,$$

et la série de terme général u_n diverge.

Si l'on ne connaît pas les sommes, on peut utiliser les sommes de Riemann. En effet

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = n^{p+1} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^p \right] \sim n^{p+1} \int_0^1 x^p dx = \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

Donc

$$u_n \sim \frac{n^2}{2} \frac{3}{n^3} = \frac{3}{2n}.$$

i) En utilisant un développement limité en 0 de $\cos x$, on a immédiatement

$$u_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{2n^2}\right) \right) \sim \frac{1}{2n^2},$$

et la série de terme général u_n converge.

j) Comme la suite $(n^2 2^{-\sqrt{n}})$ converge vers 0, on a, à partir d'un certain rang

$$n^2 2^{-\sqrt{n}} \leq 1,$$

donc

$$2^{-\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2},$$

et la série de terme général $1/n^2$ converge. On en déduit que la série de terme général u_n converge.

k) On a immédiatement l'équivalent

$$u_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Comme la série de terme général $1/n^{3/2}$ converge, on en déduit que la série de terme général u_n converge.

l) On peut effectuer un développement limité. Tout d'abord

$$\frac{1}{n+a} = \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{a}{n}},$$

donc

$$\frac{1}{n+a} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{1}{n} - \frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{n+a}} &= 1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{a}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{a}{n^2} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{a}{n^2} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Comme

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

On a finalement

$$u_n = \frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{a}{n^2},$$

Comme la série de terme général $1/n^2$ converge, on en déduit que la série de terme général u_n converge.

On aurait pu également utiliser le théorème des accroissements finis : il existe $c \in [1/n, 1/(n+1)]$, donc dans $[0, 1]$, tel que

$$u_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+a} \right) e^c ,$$

donc

$$0 \leq u_n \leq \frac{a}{n(n+a)} e \leq \frac{ea}{n^2} .$$

Et l'on conclut avec le théorème de comparaison.

m) Remarquons que u_n est toujours négative. On peut écrire

$$\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} = e^{-\frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} ,$$

et donc

$$\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} = e^{-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

Finalement

$$u_n = -\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2} .$$

Comme la série de terme général $-1/n^2$ converge, il en est de même de la série de terme général u_n .

n) En utilisant la formule de Taylor-Young, on a les développements limités

$$f\left(a + \frac{1}{n}\right) = f(a) + \frac{f'(a)}{n} + \frac{f''(a)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) ,$$

et

$$f\left(a - \frac{1}{n}\right) = f(a) - \frac{f'(a)}{n} + \frac{f''(a)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

Donc

$$u_n = \frac{f''(a)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

Comme la suite $(n^2 u_n)$ converge vers $f''(a)$, il existe N tel que $n \geq N$ implique

$$|n^2 u_n - f''(a)| \leq 1 .$$

Alors

$$|n^2 u_n| \leq 1 + |f''(a)| ,$$

et donc

$$|u_n| \leq \frac{1 + |f''(a)|}{n^2} .$$

Comme la série de terme général $1/n^2$ converge, la série de terme général u_n converge absolument, donc converge.

On peut dire également que $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

58. On suppose que a et b ne sont pas nuls simultanément. On a

$$u_n = \frac{n(1-ac) - bc}{n(an+b)} .$$

Si $ac \neq 1$, ou bien $a \neq 0$ et $u_n \sim \frac{1-ac}{an}$, ou bien $a = 0$ (donc $b \neq 0$) et $u_n \sim \frac{1}{b}$. Dans les deux cas la série diverge.

Si $ac = 1$ (donc $a \neq 0$), on a $u_n \sim -\frac{bc}{an^2}$. Dans ce cas la série converge.

L'ensemble des triplets (a, b, c) pour lesquels la série converge est donc $\{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \mid ac = 1\}$.

59. Donnons les équivalents de u_n sous forme de tableau. Le résultat dépend de la position de a et b par rapport à 2. Les équivalents sont des suites géométriques.

	$a < 2$	$a = 2$	$a > 2$
$b < 2$	1	2	$\left(\frac{a}{2}\right)^n$
$b = 2$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^n$
$b > 2$	$\left(\frac{2}{b}\right)^n$	$2 \left(\frac{2}{b}\right)^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n$

Le tableau suivant donne la nature de la série de terme général u_n :

	$a < 2$	$a = 2$	$a > 2$
$b < 2$	DV	DV	DV
$b = 2$	DV	DV	DV
$b > 2$	CV	CV	$\frac{a \geq b}{a < b} \begin{matrix} \text{DV} \\ \text{CV} \end{matrix}$

En résumé l'ensemble des couples (a, b) pour lesquels la série converge est

$$\{(a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid b > 2, 0 < a < b\}.$$

60. a) On a

$$e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

Donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \geq \frac{1}{(n+1)!} > 0 .$$

D'autre part

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1) \cdots k} .$$

Mais, si $k \geq n+2$, on a $k > n+1$, et

$$(n+1) \cdots k > (n+1) \cdots (n+1) = (n+1)^{k-n} ,$$

puisque'il y a $k-n$ facteurs dans ce produit. Donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} ,$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!} \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n-1}} .$$

Mais on reconnaît alors la somme de la série géométrique de raison $1/(n+1)$.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n} .$$

Finalement

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!} \frac{1}{n} .$$

On a donc bien obtenu les inégalités

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!} .$$

b) Tout d'abord, en prenant $n=1$ dans (1), on trouve

$$2 < e < 3 ,$$

et e n'est donc pas entier. Supposons que e soit rationnel. Il s'écrirait donc $e = a/q$ avec $a > 0$ et $q > 1$ entiers. Alors

$$\sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} < \frac{a}{q} < \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} + \frac{1}{q \cdot q!} .$$

Multiplions ces inégalités par $q!$. On a

$$\sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} < a(q-1)! < \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} + \frac{1}{q} .$$

Mais

$$\alpha = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} = 1 + \sum_{k=0}^{q-1} (k+1) \cdots q ,$$

donc c'est un nombre entier. Alors

$$0 < a(q-1)! - \alpha < \frac{1}{q} < 1,$$

et $a(q-1)! - \alpha$ serait un entier de l'intervalle $]0, 1[$ ce qui est impossible. On a donc une contradiction et e est irrationnel.

61. a) On écrit

$$A_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \cdots (n-1)n + n + 1.$$

Mais la somme $\sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \cdots (n-1)n$ est divisible par le produit $(n-1)n$ qui est un nombre pair. Donc A_n a la même parité que $n+1$. Il en résulte que A_n est pair si n est impair, et impair si n est pair.

b) En multipliant les inégalités (1) par $\pi n!$, on trouve

$$\pi A_n < n! \pi e < \pi A_n + \frac{\pi}{n},$$

donc

$$0 < n! \pi e - \pi A_n < \frac{\pi}{n}.$$

D'autre part

$$0 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Donc

$$0 < n! \pi e - \pi A_n < \frac{\pi}{n+1} + \frac{\pi}{n^2}.$$

On en déduit que

$$n! \pi e = \pi A_n + \frac{\pi}{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

c) Alors

$$u_n = \sin(n! \pi e) = \sin\left(\pi A_n + \frac{\pi}{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Tout d'abord

$$|u_n| = \sin\left(\frac{\pi}{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \frac{\pi}{n},$$

et cette série ne converge pas. Donc u_n n'est pas absolument convergente.

D'autre part, d'après la formule des accroissements finis

$$|\sin(a+b) - \sin a| = |b| |\cos c| \leq |b|,$$

donc

$$\sin(a+b) = \sin a + \mathcal{O}(b).$$

Alors

$$\sin\left(\frac{1}{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement

$$u_n = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument. D'autre part la suite $\left(\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$ est décroissante et converge vers 0. La série alternée de terme général $(-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$ converge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n converge. Elle est bien semi-convergente.

62. On a

$$\sum_{k=0}^m u_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^m (1 - \sqrt{x})^k dx.$$

Mais, si $x \neq 0$,

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^m (1 - \sqrt{x})^k \right) dx = \int_0^1 \frac{1 - (1 - \sqrt{x})^{m+1}}{1 - (1 - \sqrt{x})} dx = \int_0^1 \frac{1 - (1 - \sqrt{x})^{m+1}}{\sqrt{x}} dx.$$

En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{x}$, on a $du = dx/(2\sqrt{x})$, et

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m u_k &= \int_0^1 (1 - (1 - u)^{m+1}) 2du \\ &= 2 \left[u + \frac{(1 - u)^{m+2}}{m+2} \right]_0^1 \\ &= 2 - \frac{2}{m+2}. \end{aligned}$$

Comme cette suite converge vers 2, on en déduit que la série de terme général u_n converge, et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m u_k = 2.$$

63. Montrons tout d'abord les propriétés dans le cas où P et Q sont dans $\mathbf{R}[X]$.

a) Si $a_p X^p$ est le terme de plus haut degré de P et $b_q X^q$ celui de Q , on a alors

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \sim \frac{a_p}{b_q} \frac{1}{n^{q-p}},$$

et il résulte du critère de Riemann que cette série converge si et seulement si $q - p \geq 2$.

b) Pour que la série converge, il faut que le terme général tende vers 0. Or

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \sim \frac{a_p}{b_q} \frac{1}{n^{q-p}},$$

et cette expression tend vers zéro si et seulement si $q > p$, soit $q \geq p + 1$. Donc, pour que la série converge, il faut que $q \geq p + 1$.

Supposons maintenant cette condition satisfaite. Calculons la dérivée de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

On a

$$f'(x) = \frac{Q(x)P'(x) - P(x)Q'(x)}{Q(x)^2} .$$

Le numérateur est un polynôme. Si ce n'est pas le polynôme 0, il est équivalent à son terme de plus haut degré et donc de signe constant pour x assez grand. Il en résulte que f est monotone pour x assez grand, et donc que la suite (u_n) est monotone à partir d'un certain rang. Le critère des séries alternées montre que la série de terme général (u_n) converge.

Si le numérateur de la fraction est le polynôme zéro, c'est que f est constante, donc que $P(x) = \lambda Q(x)$. Mais comme $q \geq p + 1$, on ne peut avoir $q = p$, ce qui implique que $\lambda = 0$, donc $P = 0$, et alors la série est nulle et converge également.

La condition $q \geq p + 1$ est donc suffisante pour avoir la convergence.

Si l'on suppose maintenant les polynômes à coefficients complexes, on peut écrire

$$P = P_1 + iP_2 \quad \text{et} \quad Q = Q_1 + iQ_2 ,$$

avec P_1, P_2, Q_1, Q_2 dans $\mathbf{R}[X]$. D'autre part, un des polynômes P_1 et P_2 au moins est de degré p , et un des polynômes Q_1 et Q_2 au moins est de degré q . Alors

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1 + iP_2}{Q_1 + iQ_2} ,$$

et en rendant le dénominateur réel

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} &= \frac{(P_1 + iP_2)(Q_1 - iQ_2)}{Q_1^2 + Q_2^2} \\ &= \frac{P_1Q_1 + P_2Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2} + i \frac{P_2Q_1 - P_1Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2} . \end{aligned}$$

Un au moins des polynômes Q_1 et Q_2 est de degré q . Alors le degré du dénominateur $C = Q_1^2 + Q_2^2$ vaut au plus $2q$, mais les termes de plus haut degré de Q_1^2 et Q_2^2 étant positifs, le degré de C vaut exactement $2q$.

Les polynômes $P_1Q_1 + P_2Q_2$ et $P_2Q_1 - P_1Q_2$ sont de degré $p + q$ au plus, et un des deux au moins est exactement de degré $p + q$, sinon la fraction P/Q serait de degré plus petit que $(p + q) - 2q = p - q$ ce qui est faux.

Cela signifie que un au moins des polynômes $A = P_1Q_1 + P_2Q_2$ et $B = P_2Q_1 - P_1Q_2$ est de degré $p + q$, et l'autre de degré au plus $p + q$. On peut alors appliquer les résultats obtenus dans le cas réel.

a) si $q \geq p + 2$, alors $2q \geq p + q + 2$, donc les séries $\sum \frac{A(n)}{C(n)}$ et $\sum \frac{B(n)}{C(n)}$ convergent toutes les deux. Alors $\sum u_n$ converge.

si $q < p + 2$, alors $2q < p + q + 2$, donc une des deux séries $\sum \frac{A(n)}{C(n)}$ et $\sum \frac{B(n)}{C(n)}$ diverge. Alors $\sum u_n$ diverge.

b) si $q \geq p + 1$, alors $2q \geq p + q + 1$, donc les séries $\sum (-1)^n \frac{A(n)}{C(n)}$ et $\sum (-1)^n \frac{B(n)}{C(n)}$ convergent toutes les deux. Alors $\sum (-1)^n u_n$ converge.

si $q < p + 1$, alors $2q < p + q + 1$, donc une des deux séries $\sum (-1)^n \frac{A(n)}{C(n)}$ et $\sum (-1)^n \frac{B(n)}{C(n)}$ diverge. Alors $\sum (-1)^n u_n$ diverge.

64. On peut appliquer le critère des séries alternées, puisque la suite $(1/(3n + 1))$ décroît et tend vers 0. La série converge donc.

Appliquons la formule donnée avec $a = -x^3$, on obtient

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{3k} + \frac{(-1)^n x^{3n}}{1+x^3}.$$

Donc en intégrant

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{3n}}{1+x^3} dx.$$

Mais en appliquant la première formule de la moyenne, il existe c_n dans $[0, 1]$ tel que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{3n}}{1+x^3} dx = \frac{1}{1+c_n^3} \int_0^1 x^{3n} dx = \frac{1}{1+c_n^3} \frac{1}{1+3n} \leq \frac{1}{1+3n}.$$

Il résulte du théorème d'encadrement que la suite de terme général $\int_0^1 \frac{x^{3n}}{1+x^3} dx$ converge et a pour limite 0. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{3n}}{1+x^3} dx = 0,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}.$$

65. On étudie différents cas.

Si $\alpha < 0$, alors

$$|u_n| = \frac{1}{|1 + (-1)^{n+1} n^\alpha|},$$

et cette expression tend vers 1. Le terme général de la série ne tend pas vers zéro. La série diverge.

Si $\alpha > 0$, on a cette fois

$$|u_n| = \frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}} \sim \frac{1}{n^\alpha},$$

La série converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.

Si $0 < \alpha \leq 1$. En utilisant le développement limité en zéro

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u),$$

on a

$$\frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}} = \frac{1}{n^\alpha} \left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} + o\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\right) \right),$$

d'où

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \left[\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \right].$$

On a donc $u_n = v_n + w_n$, où

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

La série de terme général v_n est alternée et converge donc.

Par ailleurs

$$w_n \sim \frac{1}{n^{2\alpha}},$$

et d'après le critère de Riemann, la série de terme général w_n converge si et seulement si $2\alpha > 1$. Alors, il en sera de même de la série de terme général u_n . En résumé on a la situation suivante :

- Convergence absolue si $\alpha > 1$
- Semi-convergence si $1 \geq \alpha > 1/2$
- Divergence si $1/2 \geq \alpha$.

66. Il suffit de prendre

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

On a

$$u_n = v_n + v_n^2 = v_n(1 + v_n),$$

et comme v_n tend vers 0, on a $u_n \sim v_n$.

La série de terme général v_n est alternée et converge. La série de terme général u_n est somme d'une série alternée et d'une série divergente, donc diverge.

67. Supposons que $\sqrt[n]{u_n}$ tende vers $\ell \in [0, 1[$. Si l'on choisit $\varepsilon < 1 - \ell$, il existe N tel que $n \geq N$ implique

$$\sqrt[n]{u_n} - \ell < \varepsilon,$$

donc

$$\sqrt[n]{u_n} < (\ell + \varepsilon),$$

et finalement

$$0 \leq u_n < (\ell + \varepsilon)^n.$$

Mais $\ell + \varepsilon < 1$. La série de terme général $(\ell + \varepsilon)^n$ est donc une série géométrique convergente. Il en résulte que la série de terme général u_n converge également.

Supposons que $\sqrt[n]{u_n}$ tende vers $\ell > 1$ (éventuellement infinie), ou tende vers 1^+ . Alors $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ à partir d'un certain rang, donc $u_n \geq 1$ à partir d'un certain rang, et la suite (u_n) ne peut

converger vers 0. La série diverge donc.

68. On a

$$\sqrt[2p]{u_{2p}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

D'autre part

$$\sqrt[2p+1]{u_{2p+1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{p/(2p+1)} 2^{1/(2p+1)} = \exp\left[\frac{p}{2p+1} \ln \frac{2}{3} + \frac{\ln 2}{2p+1}\right].$$

Les suites $(\sqrt[2p]{u_{2p}})$ et $(\sqrt[2p+1]{u_{2p+1}})$ des termes de rang pair et de rang impair extraites de la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ convergent donc toutes les deux vers $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Alors la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge aussi vers $\sqrt{\frac{2}{3}} < 1$. Il résulte de la règle de Cauchy que la série de terme général u_n converge.

Par contre

$$\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{u_{2p}}{u_{2p-1}} = \frac{1}{3}.$$

Les suites des termes de rang pair et de rang impair extraites de la suite (u_{n+1}/u_n) ont des limites différentes. Elle n'a donc pas de limite, et on ne peut utiliser la règle de d'Alembert.

69. a) Les séries sont positives. On peut donc appliquer le théorème sur les équivalents.

Si la série de terme général u_n converge, alors la suite (u_n) converge vers zéro, et $(1 + u_n)$ vers 1, donc $v_n \sim u_n$. Les séries sont de même nature, donc la série de terme général v_n converge.

Inversement si la série de terme général v_n converge, la suite (v_n) converge vers zéro. Mais on obtient

$$u_n = \frac{v_n}{1 - v_n},$$

et il en résulte que $u_n \sim v_n$. Les séries sont de même nature, donc la série de terme général u_n converge.

b) On a $0 \leq w_n \leq u_n$. Donc si la série de terme général u_n converge, il en est de même de la série de terme général w_n . Mais la réciproque est fautive. Remarquons que si u_n tend vers l'infini, on a

$$w_n \sim \frac{1}{u_n}.$$

Il suffit de prendre $u_n = n^2$, pour que la série de terme général w_n converge mais pas celle de terme général u_n .

70. On décompose la fraction en éléments simples

$$\frac{3}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+4}.$$

Alors

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{3}{(3k+1)(3k+4)} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3k+1} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{3k+4}.$$

Donc

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{3k+1}.$$

Il reste (c'est le procédé télescopique),

$$S_n = 1 - \frac{1}{3n+4},$$

et donc

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1.$$

71. On constate que

$$\frac{P_k(n)}{n!} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq k-1 \\ \frac{1}{(n-k)!} & \text{si } n \geq k \end{cases}$$

Donc

$$\sigma_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ est de degré 3. Les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 sont de degrés distincts et constituent une base de $\mathbf{R}_3[X]$. On peut donc décomposer P dans cette base :

$$P(X) = \alpha X(X-1)(X-2) + \beta X(X-1) + \gamma X + \delta.$$

Le coefficient du terme de degré 3, vaut $\alpha = 1$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} P(0) &= 1 = \delta \\ P(1) &= 4 = \gamma + \delta \\ P(2) &= 15 = 2\beta + 2\gamma + \delta. \end{aligned}$$

On en déduit $\delta = 1$, $\gamma = 3$ et $\beta = 4$. Donc

$$P(X) = P_0 + 3P_1 + 4P_2 + P_3.$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^3 + n^2 + n + 1}{n!} = \sigma_0 + 3\sigma_1 + 4\sigma_2 + \sigma_3 = 9e.$$

72. Puisque la fonction $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}},$$

donc en sommant

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Mais

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

Donc

$$2(\sqrt{n+1} - 1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Si l'on veut avoir

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > 10^5 ,$$

il suffit que

$$2(\sqrt{n+1} - 1) > 10^5 ,$$

soit

$$\sqrt{n+1} > 5001 ,$$

et donc

$$n > (5001)^2 - 1 .$$

La valeur $n = (5001)^2$ convient donc.

73. Soit k un entier fixé. comme $e^{\pi/2} - 1 \geq 3$, on a également

$$e^{2k\pi+\pi/2} - e^{2k\pi} = e^{2k\pi}(e^{\pi/2} - 1) \geq 3 ,$$

et si l'on pose

$$r = E(e^{2k\pi}) ,$$

il existe un entier $p \geq 2$ tel que

$$r + p = E(e^{2k\pi+\pi/2}) .$$

On a donc

$$r \leq e^{2k\pi} < r + 1 < r + p \leq e^{2k\pi+\pi/2} < r + p + 1 ,$$

et

$$\ln r \leq 2k\pi < \ln(r + 1) < \ln(r + p) \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \ln(r + p + 1) ,$$

et si j est un entier compris entre $r + 1$ et $r + p$, le nombre $\cos \ln j$ est positif. On va minorer la somme

$$\sigma_k = \sum_{j=r+1}^{r+p} \frac{\cos \ln j}{j} .$$

Posons

$$t_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0 \\ \ln(r + j) - 2k\pi & \text{si } 1 \leq j \leq p \\ \pi/2 & \text{si } j = p + 1 \end{cases}$$

On a donc

$$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_p = \frac{\pi}{2} .$$

Soit $0 \leq j \leq p$. Puisque la fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi/2]$, on a

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \cos x \, dx \leq (t_{j+1} - t_j) \cos t_j .$$

Mais, on vérifie que

$$t_{j+1} - t_j \leq \ln(r + j + 1) - \ln(r + j) .$$

En effet, il y a égalité si $1 \leq j \leq p - 1$, et, par ailleurs,

$$t_1 - t_0 = \ln(r + 1) - 2k\pi \leq \ln(r + 1) - \ln r ,$$

et

$$t_{p+1} - t_p = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \ln(r+p) \leq \ln(r+p+1) - \ln(r+p) .$$

On peut alors utiliser le théorème des accroissements finis pour la fonction logarithme. Il existe c_j dans $[r+j, r+j+1]$ tel que

$$\ln(r+j+1) - \ln(r+j) = \frac{1}{c_j} ,$$

et donc

$$\ln(r+j+1) - \ln(r+j) \leq \frac{1}{r+j} .$$

Finalement on en déduit

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \cos x \, dx \leq \frac{\cos t_j}{r+j} .$$

Alors en sommant ces inégalités pour j variant de 0 à p ,

$$\sum_{j=0}^p \int_{t_j}^{t_{j+1}} \cos x \, dx \leq \sum_{j=0}^p \frac{\cos t_j}{r+j} .$$

Le membre de gauche vaut

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 1 .$$

Le membre de droite s'écrit

$$\sum_{j=0}^p \frac{\cos t_j}{r+j} = \frac{1}{r} + \sum_{j=1}^p \frac{\cos(\ln(r+j) - 2k\pi)}{r+j} = \frac{1}{r} + \sum_{j=1}^p \frac{\cos \ln(r+j)}{r+j} ,$$

on en déduit donc

$$\sum_{j=1}^p \frac{\cos \ln(r+j)}{r+j} \geq 1 - \frac{1}{r} .$$

Mais

$$\sum_{j=1}^p \frac{\cos \ln(r+j)}{r+j} = \sum_{j=r+1}^{r+p} \frac{\cos \ln(j)}{j} = \sigma_k ,$$

donc

$$\sigma_k \geq 1 - \frac{1}{E(e^{2k\pi})} .$$

Lorsque k tend vers l'infini, le membre de droite tend vers 1. Alors à partir d'un certain rang K , il est supérieur à $1/2$, et donc, si $k \geq K$, on

$$\sum_{j=r+1}^{r+p} \frac{\cos \ln(j)}{j} \geq \frac{1}{2} .$$

Soit maintenant un entier N . Comme $E(e^{2k\pi})$ tend vers l'infini, il existe un entier $k \geq K$ tel que

$$r = E(e^{2k\pi}) \geq N ,$$

et dans ce cas

$$\sum_{j=r+1}^{r+p} \frac{\cos \ln(j)}{j} \geq \frac{1}{2} .$$

La condition de Cauchy n'est pas satisfaite et la série $\sum \frac{\ln \cos n}{n}$ diverge.