EXERCICES SUR LES COURBES PARAMETREES

1. Etudier les courbes représentatives des fonctions f définies ci-dessous.

a) $f(t) = \left(\cos t\ ,\ \sin\dfrac{t}{3}\right)$ b) $f(t) = \left(\sin t\ ,\ \dfrac{\sin t}{2+\cos t}\right)$

c) $f(t) = (\sin^3 t\ ,\ \cos 3t)$ d) $f(t) = (4\cos^2 t\,\sin^3 t\ ,\ (3-2\cos^2 t)\cos^2 t)$

2. Etudier localement les courbes représentatives des fonctions f définies ci-dessous.

a) lorsque t tend vers 1 :

$$f(t) = (1 + t(t-2)(t-1)^3\ ,\ -1 + (t^2-2t+5)(t-1)^3)$$

b) lorsque t tend vers 0 :

$$f(t) = \left(\frac{\sin^3 t}{1+t}\ ,\ (1+t)(\operatorname{sh} t - \sin t)\right)$$

c) lorsque t tend vers 1 :

$$f(t) = \left(t(3-2t)(t-1)^2\ ,\ t - 1 + \frac{1}{t}\right)$$

d) lorsque t tend vers l'infini :

$$f(t) = \left(-2 + \frac{2t^2+4t+3}{(t+1)^7}\ ,\ 1 - \frac{3t^2+6t+5}{(t+1)^7}\right)$$

3. Etudier la courbe représentative des fonctions f définies ci-dessous (on étudiera soigneusement le point singulier).

a) $f(t) = (\cos^2 t + \ln|\sin t|\ ,\ \sin t\,\cos t)$ b) $f(t) = \left(\sin t\ ,\ \dfrac{\cos^2 t}{2-\cos t}\right)$

4. Etudier les courbes représentatives des fonctions f définies ci-dessous (présence d'asymptotes).

a) $f(t) = \left(\tan\dfrac{t}{3}\ ,\ \sin t\right)$ b) $f(t) = \left(t^2 - \dfrac{2}{t}\ ,\ t^2 + \dfrac{16}{t}\right)$

c) $f(t) = \left(\dfrac{1}{t(t-1)}\ ,\ \dfrac{t^2}{1-t}\right)$ d) $f(t) = (\ln|t|\ ,\ \ln|t(t+1)|)$

Corrigé des exercices

1.a) $\boxed{\text{Période}}$

Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbf{R}$. Or $\cos t$ est de période 2π et $\sin(t/3)$ de période 6π. Comme 6π est un multiple entier de ces deux périodes, on étudie la courbe sur un intervalle de longueur 6π.

$\boxed{\text{Réduction du domaine d'étude}}$

Si l'on veut commencer par étudier la parité des fonctions, on prend l'intervalle $I_0 = [-3\pi,\, 3\pi]$.

L'application : $\Phi_1 : t \mapsto -t$ est une bijection de $I_1 = [0,\, 3\pi]$ sur $I_1' = [-3\pi,\, 0]$, et l'on a

$$x(-t) = x(t) \quad \text{et} \quad y(-t) = -y(t)\ .$$

La courbe est symétrique par rapport à Ox. On l'étudie sur I_1, et on complètera par la symétrie $\mathcal{S}_1$ par rapport à Ox.

L'application : $\Phi_2 : t \mapsto 3\pi - t$ est une bijection de $I_2 = [0,\, 3\pi/2]$ sur $I_2' = [3\pi/2,\, 3\pi]$, et l'on a

$$x(3\pi - t) = -x(t) \quad \text{et} \quad y(3\pi - t) = y(t)\ .$$

La courbe est symétrique par rapport à Oy. On l'étudie sur I_2, et on complètera par la symétrie $\mathcal{S}_2$ par rapport à Oy.

$\boxed{\text{Dérivées}}$

On a de manière immédiate

$$x'(t) = -\sin t \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{1}{3}\cos\frac{t}{3}\ .$$

Sur l'intervalle I_2, x' s'annule en 0 et en π, et y' en $3\pi/2$.

$\boxed{\text{Tableau de variation}}$

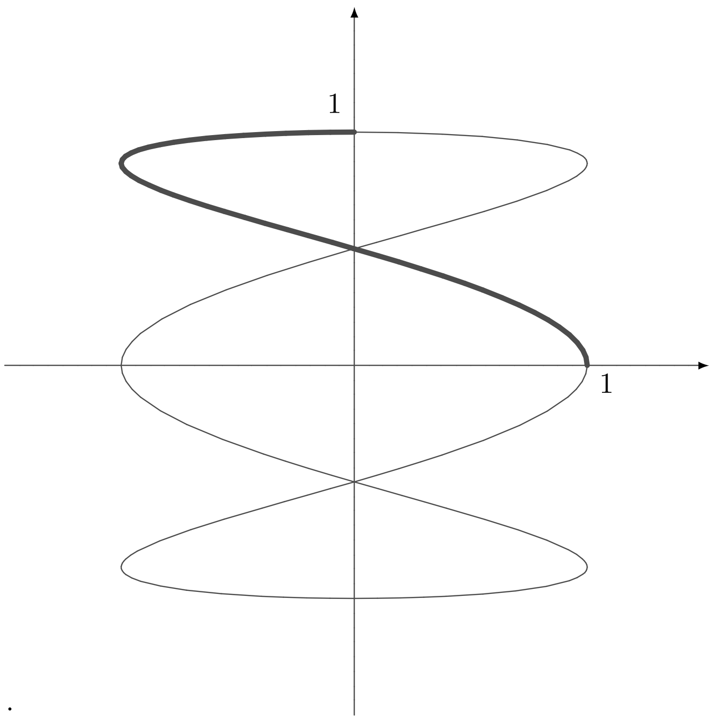
t	0		π		$3\pi/2$
x'	0	$-$	0	$+$	
x	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}/2$	$\nearrow$	1
y'			$+$		0
y'/x'	∞		∞		0

Intersection avec Oy

L'équation $x(t) = 0$ a comme solutions $t = 3\pi/2$ et $t = \pi/2$. Cette deuxième valeur donne, par symétrie, un point double de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Tracé de la courbe

On trace l'arc de courbe obtenu lorsque t varie de 0 à $3\pi/2$, et on complète par les symétries $\mathcal{S}_2$, puis $\mathcal{S}_1$.



1. b) Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbf{R}$ et de périodes 2π.

Réduction du domaine d'étude

Si l'on veut commencer par étudier la parité des fonctions, on prend l'intervalle $I_0 = [-\pi, \pi]$. L'application : $\Phi_1 : t \mapsto -t$ est une bijection de $I_1 = [0, \pi]$ sur $I_1' = [-\pi, 0]$, et l'on a

$$x(-t) = -x(t) \quad \text{et} \quad y(-t) = -y(t) .$$

La courbe est symétrique par rapport à l'origine. On l'étudie sur I_1, et on complètera par la symétrie $\mathcal{S}_1$ par rapport à O.

$\boxed{\text{Dérivées et tableau de variation}}$

On obtient

$$x'(t) = \cos t \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{(2+\cos t)\cos t + \sin^2 t}{(2+\cos t)^2} = \frac{2\cos t + 1}{(2+\cos t)^2}\ .$$

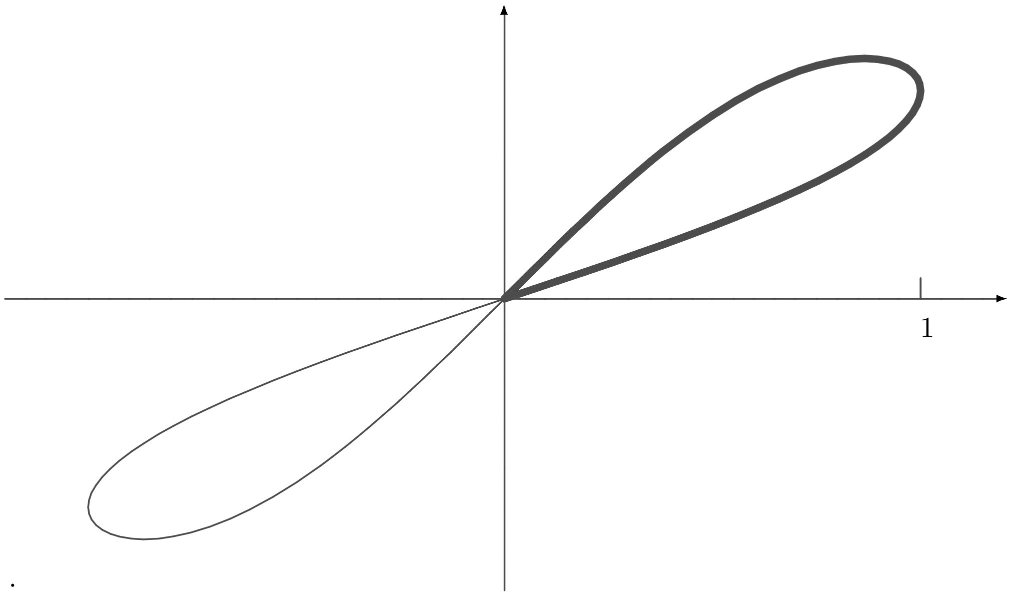
La fonction x' s'annule dans I_1 en $\pi/2$ et la fonction y' en $2\pi/3$. On obtient facilement le tableau de variation suivant :

t	0		$\pi/2$		$2\pi/3$		π
x'		$+$	0	$-$		$-$	
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y'/x'	$1/3$		∞		0		1

On remarque que la courbe passe deux fois par l'origine avec comme pentes $1/3$ et 1.

$\boxed{\text{Tracé de la courbe}}$

On trace l'arc de courbe obtenu lorsque t varie de 0 à π, puis on complète par la symétrie $\mathcal{S}_1$.



1. c) $\boxed{\text{Période}}$

Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbf{R}$. Or $\sin t$ est de période 2π donc x est de période 2π et $\cos t$ est de période 2π, donc y est de période $2\pi/3$. Alors 2π est une période commune aux deux fonctions. On étudie la courbe sur un intervalle de longueur 2π.

$\boxed{\text{Réduction du domaine d'étude}}$

Si l'on veut commencer par étudier la parité des fonctions, on prend l'intervalle $I_0 = [\,-\pi,\,\pi\,]$.

L'application : $\Phi_1 : t \mapsto -t$ est une bijection de $I_1 = [\,0,\,\pi\,]$ sur $I_1' = [\,-\pi,\,0\,]$, et l'on a

$$x(-t) = -x(t) \quad \text{et} \quad y(-t) = y(t)\ .$$

La courbe est symétrique par rapport à Oy. On l'étudie sur I_1, et on complètera par la symétrie $\mathcal{S}_1$ par rapport à Oy.

L'application $\Phi_2 : t \mapsto \pi - t$ est une bijection de $I_2 = [\,0,\,\pi/2\,]$ sur $I_2' = [\,\pi/2,\,\pi\,]$, et l'on a

$$x(\pi - t) = x(t) \quad \text{et} \quad y(\pi - t) = -y(t)\ .$$

La courbe est symétrique par rapport à Ox. On l'étudie sur I_2, et on complètera par la symétrie $\mathcal{S}_2$ par rapport à Ox.

$\boxed{\text{Dérivées}}$

On obtient

$$x'(t) = 3\sin^2 t\cos t \quad \text{et} \quad y'(t) = -3\sin 3t\ .$$

La fonction x' s'annule en 0 et $\pi/2$, et y' en 0 et $\pi/3$.

En zéro, on a

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-3\sin 3t}{3\sin^2 t\cos t} \sim \frac{-9t}{3t^2} = -\frac{3}{t}\ ,$$

et cette expression tend vers l'infini. On a donc une tangente verticale pour $t = 0$.

$\boxed{\text{Tableau de variation}}$

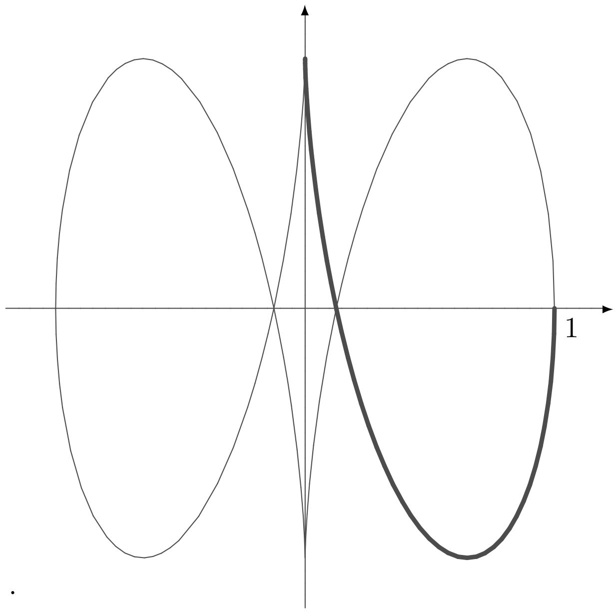
t	0		$\pi/3$		$\pi/2$
x'	0		$+$		0
x	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\nearrow$	1
y	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
y'	0	$-$	0	$+$	
y'/x'	∞		0		∞

$\boxed{\text{Intersection avec } Ox}$

L'équation $y(t) = 0$ a comme solutions $t = \pi/2$ et $t = \pi/6$. Cette seconde valeur donne, par symétrie, un point double de coordonnées $\left(\frac{1}{8}, 0\right)$.

$\boxed{\text{Tracé de la courbe}}$

On trace l'arc de courbe obtenu lorsque t varie de 0 à $\pi/2$, puis on complète par la symétrie $\mathcal{S}_2$, puis $\mathcal{S}_1$.



1. d) $\boxed{\text{Période}}$

Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbf{R}$. Or $\cos^2 t$ est de période π donc y est de période π et $\sin t$ est de période 2π, donc également x. On étudie la courbe sur un intervalle de longueur 2π.

$\boxed{\text{Réduction du domaine d'étude}}$

Si l'on veut commencer par étudier la parité des fonctions, on prend l'intervalle $I_0 = [\,-\pi,\, \pi\,]$.

L'application : $\Phi_1 : t \mapsto -t$ est une bijection de $I_1 = [\,0,\, \pi\,]$ sur $I_1' = [\,-\pi,\, 0\,]$, et l'on a

$$x(-t) = -x(t) \quad \text{et} \quad y(-t) = y(t)\ .$$

La courbe est symétrique par rapport à Oy. On l'étudie sur I_1, et on complètera par la symétrie $\mathcal{S}_1$ par rapport à Ox.

L'application $\Phi_2 : t \mapsto \pi - t$ est une bijection de $I_2 = [\,0,\, \pi/2\,]$ sur $I_2' = [\,\pi/2,\, \pi\,]$, et l'on a

$$x(\pi - t) = x(t) \quad \text{et} \quad y(\pi - t) = y(t)\ .$$

La courbe est la même lorsque l'on parcourt I_2 et I_2'. Il suffit de l'étudier sur I_2.

$\boxed{\text{Dérivées}}$

On obtient

$$x'(t) = 4(-2\cos t\sin^4 t + 3\sin^2 t\cos^3 t) = 4\sin^2 t\cos t(3\cos^2 t - 2\sin^2 t) = 4\sin^2 t\cos t(3 - 5\sin^2 t)\ ,$$

et

$$y'(t) = -\sin t(6\cos t - 8\cos^3 t) = -2\sin t\cos t(3 - 4\cos^2 t)\ .$$

Dans l'intervalle I_2, la fonction x' s'annule en 0, $\pi/2$ et $T = \arcsin\sqrt{3/5}$, et y' en 0, $\pi/6$ et $\pi/2$. En 0 et $\pi/2$, on a donc des points singuliers. Par ailleurs

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{1}{2\sin t}\,\frac{3-4\cos^2 t}{3-5\sin^2 t}\ ,$$

tend vers l'infini en 0, et vers $3/4$ en $\pi/2$, ce qui donne la pente des tangentes en ces points singuliers.
Calculons les coordonnées du point de paramètre T. On a

$$\cos T = \sqrt{1-\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}\ ,$$

donc

$$x(T) = 4\,\frac{2}{5}\,\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{24}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} \approxeq 0,74\ ,$$

et

$$y(T) = \frac{2}{5}\left(3-2\,\frac{2}{5}\right) = \frac{22}{25}\ .$$

On a également

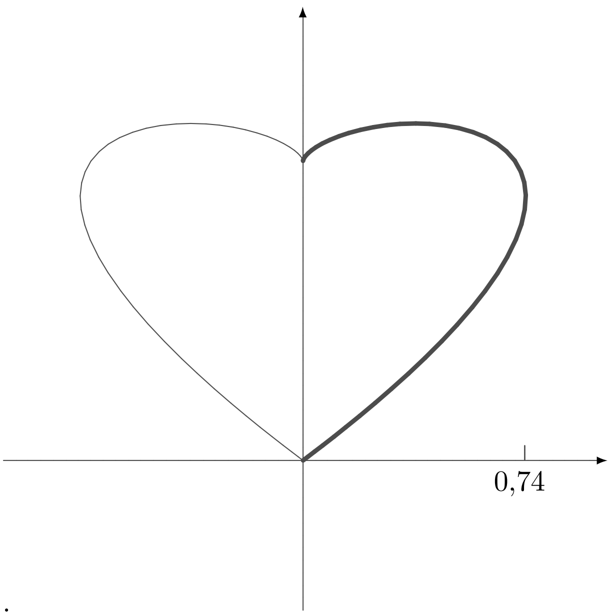
$$x\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{8} = \frac{3}{8} \quad \text{et} \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}\left(3-2\,\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{8}\ .$$

$\boxed{\text{Tableau de variation}}$

t	0		$\pi/6$		T		$\pi/2$
x'	0	$+$		$+$	0	$-$	0
x	0	$\nearrow$	$\frac{3}{8}$	$\nearrow$	$\frac{24}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\searrow$	0
y	1	$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	$\frac{22}{25}$	$\searrow$	0
y'	0	$+$	0	$-$		$-$	0
y'/x'	∞		0		∞		$3/4$

$\boxed{\text{Tracé de la courbe}}$

On trace l'arc de courbe obtenu lorsque t varie de 0 à $\pi/2$, puis on complète par la symétrie $\mathcal{S}_1$.



2.a) En posant $u = t - 1$, on obtient

$$\begin{aligned} x(1+u) &= 1 + (u+1)(u-1)u^3 = 1 - u^3 + u^5 \\ y(1+u) &= -1 + (u^2+4)u^3 = -1 + 4u^3 + u^5 \end{aligned}$$

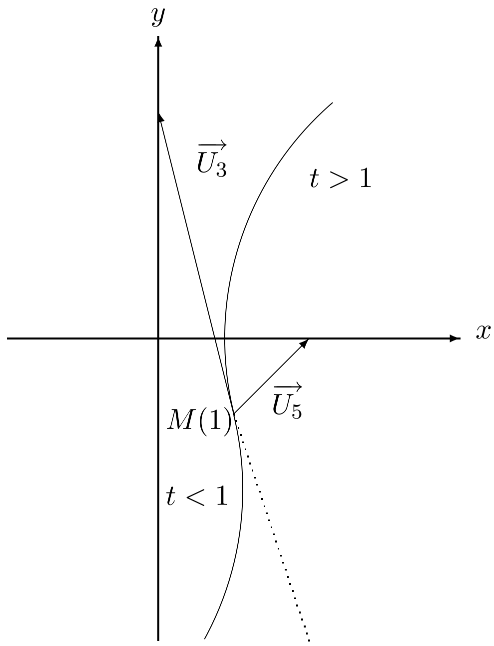
Ceci s'écrit vectoriellement

$$\overrightarrow{OM}(1+u) = \overrightarrow{OM}(1) + u^3\,\overrightarrow{U_3} + u^5\,\overrightarrow{U_5}\ ,$$

où

$$\overrightarrow{U_3} = -\,\overrightarrow{i} + 4\,\overrightarrow{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{U_5} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\ .$$

Les vecteurs $\overrightarrow{U_3}$ et $\overrightarrow{U_5}$ ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan. La courbe admet un point d'inflexion au point $M(1) = (1, -1)$ ($p = 3$ et $q = 5$ sont impairs). La tangente à la courbe a comme vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{U_3}$.



2. b) En effectuant un développement limité en zéro :

$$x(t) = (t^3 + \circ(t^4))(1 - t + \circ(t)) = t^3(1 + \circ(t))(1 - t + \circ(t)) = t^3(1 - t + \circ(t)) = t^3 - t^4 + \circ(t^4)$$

et

$$y(t) = (1+t)\left(\left(t + \frac{t^3}{6}\right) - \left(t - \frac{t^3}{6}\right) + \circ(t^4)\right) = (1+t)\left(\frac{t^3}{3} + \circ(t^4)\right) = t^3(1+t)\left(\frac{1}{3} + \circ(t)\right) \ ,$$

et donc

$$y = t^3\left(\frac{1}{3} + \frac{t}{3} + \circ(t)\right) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{3} + \circ(t^4)$$

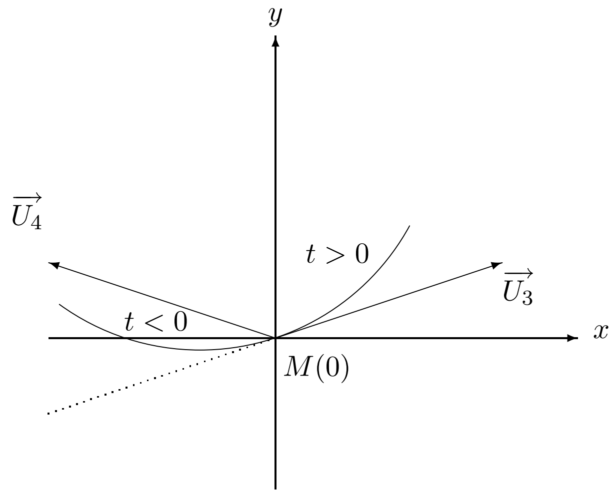
Ceci s'écrit vectoriellement

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(0) + t^3\,\overrightarrow{U_3} + t^4\,\overrightarrow{U_4} + \circ(t^4) \ ,$$

où

$$\overrightarrow{U_3} = \overrightarrow{i} + \frac{1}{3}\overrightarrow{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{U_4} = -\overrightarrow{i} + \frac{1}{3}\overrightarrow{j} \ .$$

Les vecteurs $\overrightarrow{U_3}$ et $\overrightarrow{U_4}$ ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan. La courbe admet un point ordinaire au point $M(0) = (0,\, 0)$ ($p = 3$ est impair et $q = 4$ est pair). La tangente à la courbe a comme vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{U_3}$.



2. c) En posant $u = t - 1$, on a

$$x(1+u) = (1+u)(1-2u)u^2 = u^2 - u^3 - 2u^4 \ ,$$

et

$$y(1+u) = u + \frac{1}{1+u} = 1 + u^2 - u^3 + u^4 + \circ(u^4) \ .$$

Donc

$$\overrightarrow{OM}(1+u) = \overrightarrow{OM}(1) + u^2\,\overrightarrow{U_2} + u^3\,\overrightarrow{U_3} + u^4\overrightarrow{U_4} + \circ(u^4) \ ,$$

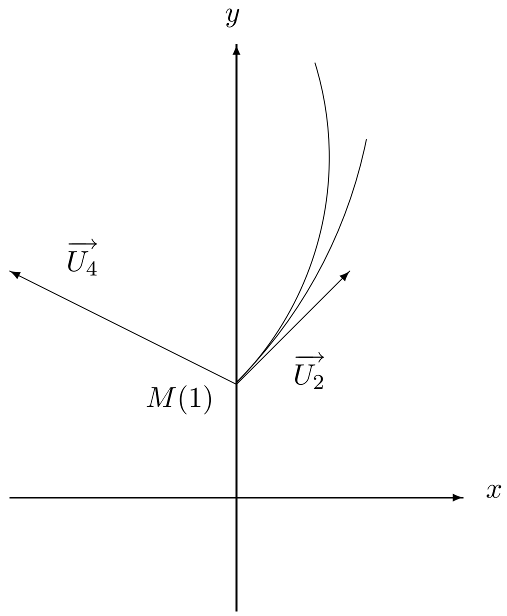
où

$$\overrightarrow{U_2} = -\overrightarrow{U_3} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{U_4} = -2\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \ .$$

Les vecteurs $\overrightarrow{U_2}$ et $\overrightarrow{U_4}$ ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan. Par contre $\overrightarrow{U_2}$ et $\overrightarrow{U_3}$ sont colinéaires. On a donc

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(1) + u^2(1-u)\,\overrightarrow{U_2} + u^4\,\overrightarrow{U_4} + \circ(u^4) \ ,$$

La courbe admet un point de rebroussement de deuxième espèce au point $M(1) = (0,\,1)$ ($p = 2$ et $q = 4$ sont pairs). La tangente à la courbe a comme vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{U_2}$



2. d) Vu le rôle joué par $t+1$, on a intérêt à se ramener en zéro en posant $u = \frac{1}{t+1}$, et puisque

$$2t^2 + 4t + 3 = 2(t+1)^2 + 1 \quad \text{et} \quad 3t^2 + 6t + 5 = 3(t+1)^2 + 2 \ ,$$

on obtient

$$x(t) = -2 + 2u^5 + u^7 \quad \text{et} \quad y(t) = 1 - 3u^5 - 2u^7 \ .$$

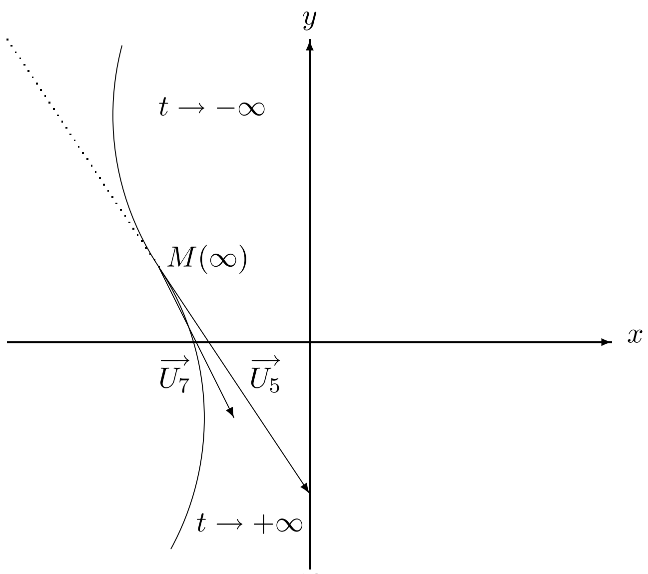
Donc

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(\infty) + u^5\,\overrightarrow{U_5} + u^7\,\overrightarrow{U_7} \ ,$$

où

$$\overrightarrow{U_5} = 2\,\overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{U_7} = \overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j} \ .$$

Les vecteurs $\overrightarrow{U_5}$ et $\overrightarrow{U_7}$ ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan. La courbe admet un point d'inflexion au point $M(\infty) = (-2,\,1)$ ($p = 5$ et $q = 7$ sont impairs). La tangente à la courbe a comme vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{U_5}$.



3.a) $\boxed{\text{Période}}$

On a $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$. Donc y est une fonction de période π. De même, $\cos^2 t$ et $|\sin t|$ sont de période π. Il en est donc de même de x. On étudie la courbe sur un intervalle de longueur π. De plus la fonction x n'est pas définie lorsque $\sin t$ est nul, c'est-à-dire pour $t = k\pi$ où k est entier.

$\boxed{\text{Réduction du domaine d'étude}}$

Si l'on veut commencer par étudier la parité des fonctions, on prend l'intervalle $I_0 = [\,-\pi/2,\, \pi/2\,]$. L'application : $\Phi_1 : t \mapsto -t$ est une bijection de $I_1 = [\,0,\, \pi/2\,]$ sur $I_1' = [\,-\pi/2,\, 0\,]$, et l'on a

$$x(-t) = x(t) \quad \text{et} \quad y(-t) = -y(t)\ .$$

La courbe est symétrique par rapport à Ox. On l'étudie sur I_1, et on complètera par la symétrie $\mathcal{S}_1$ par rapport à Ox.

$\boxed{\text{Dérivées}}$

On a

$$x'(t) = -2\sin t\cos t + \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\cos t(1 - 2\sin^2 t)}{\sin t} = \frac{\cos t\cos 2t}{\sin t}\ ,$$

et

$$y'(t) = \cos 2t\ .$$

La première fonction s'annule dans I_1 aux points $\pi/4$ et $\pi/2$, et la seconde, en $\pi/4$. On aura donc un point singulier pour $t = \pi/4$.

$\boxed{\text{Point singulier}}$

On effectuant un *d.l.* d'ordre 3 de x et de y au voisinage de $\pi/4$. Posons $u = t - \pi/4$. On a

$$\cos^2 t = \cos^2\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(2u + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}(1 - \sin 2u)\ .$$

Donc

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}\left(1 - 2u + \frac{4u^3}{3} + \circ(u^3)\right) = \frac{1}{2} - u + \frac{2u^3}{3} + \circ(u^3)\ .$$

Par ailleurs

$$\sin t = \sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin u + \cos u) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + \circ(u^3)\right)\ ,$$

alors

$$\begin{aligned}
\ln|\sin t| &= \ln\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}+\circ(u^3)\right)\right]\\
&= -\frac{\ln 2}{2}+\ln\left(1+u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}+\circ(u^3)\right)\\
&= -\frac{\ln 2}{2}+\left(u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}\right)-\frac{1}{2}\left(u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\left(u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}\right)^3+\circ(u^3)\\
&= -\frac{\ln 2}{2}+\left(u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}\right)-\frac{1}{2}(u^2-u^3)+\frac{u^3}{3}+\circ(u^3)\\
&= -\frac{\ln 2}{2}+u-u^2+\frac{2u^3}{3}+\circ(u^3)\ .
\end{aligned}$$

Donc

$$x(t)=\frac{1}{2}(1-\ln 2)-u^2+\frac{4u^3}{3}+\circ(u^3)\ .$$

Mais on a également

$$y(t)=\frac{1}{2}\sin 2t=\frac{1}{2}\sin\left(2u+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos 2u=\frac{1}{2}-u^2+\circ(u^3)\ .$$

Cela s'écrit vectoriellement

$$\overrightarrow{OM}(t)=\overrightarrow{OM}\left(\frac{\pi}{4}\right)+u^2\overrightarrow{U_2}+u^3\overrightarrow{U_3}+\circ(u^3)\ ,$$

où

$$\overrightarrow{U_2}=-\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}\quad\text{et}\quad\overrightarrow{U_3}=\frac{4}{3}\overrightarrow{i}\ .$$

Les vecteurs $\overrightarrow{U_2}$ et $\overrightarrow{U_3}$ n'étant pas colinéaires, on obtient un point de rebroussement de première espèce. La pente de la tangente en ce point vaut 1.

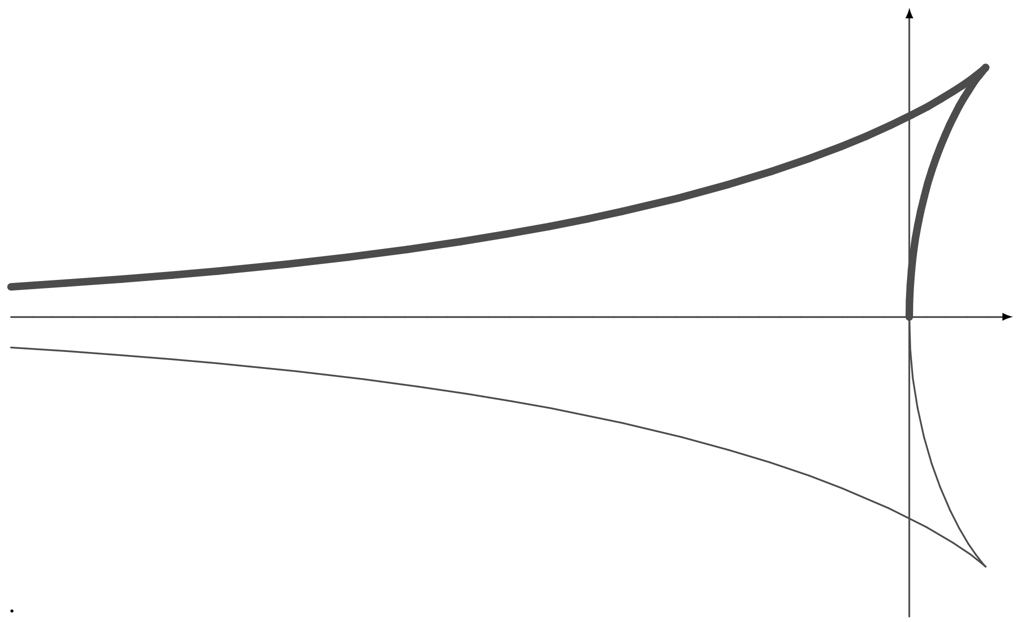
$\boxed{\text{Tableau de variation}}$

$$\begin{array}{c|ccccc}
t & 0 & & \pi/4 & & \pi/2 \\
\hline
x' & & + & 0 & - & 0 \\
\hline
 & & & \frac{1-\ln 2}{2} & & \\
x & & \nearrow & & \searrow & \\
 & -\infty & & & & 0 \\
\hline
 & & & \frac{1}{2} & & \\
y & & \nearrow & & \searrow & \\
 & 0 & & & & 0 \\
\hline
y' & & + & 0 & - & \\
\hline
y'/x' & & & 1 & & \infty
\end{array}$$

La courbe possède l'axe des x comme asymptote horizontale lorsque t tend vers 0.

$\boxed{\text{Tracé de la courbe}}$

On trace l'arc de courbe obtenu lorsque t varie de 0 à $\pi/2$, puis on complète par la symétrie $\mathcal{S}_1$.



3. b)
Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbf{R}$ et de périodes 2π.

$\boxed{\text{Réduction du domaine d'étude}}$

Si l'on veut commencer par étudier la parité des fonctions, on prend l'intervalle $I_0 = [\,-\pi,\, \pi\,]$.

L'application : $\Phi_1 : t \mapsto -t$ est une bijection de $I_1 = [\,0,\, \pi\,]$ sur $I_1' = [\,-\pi,\, 0\,]$, et l'on a

$$x(-t) = -x(t) \quad \text{et} \quad y(-t) = y(t)\ .$$

La courbe est symétrique par rapport à Oy. On l'étudie sur I_1, et on complètera par la symétrie $\mathcal{S}_1$ par rapport à Oy.

$\boxed{\text{Dérivées}}$

On obtient

$$x'(t) = \cos t \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{(2-\cos t)(-2\sin t\cos t) - \sin t\cos^2 t}{2-\cos t} = \frac{\sin t\cos t(\cos t - 4)}{(2-\cos t)^2}\ .$$

La fonction x' s'annule dans I_1 en $\pi/2$ et la fonction y' en 0, $\pi/2$ et π. On obtient facilement le tableau de variation suivant :

Tableau de variation

t	0		$\pi/2$		π
x'		$+$	0	$-$	
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$
y'	0	$-$	0	$+$	0
y'/x'	0		-1		0

Point singulier

La courbe présente un point singulier en $t = \pi/2$. Pour étudier sa nature, on pose $u = t - \pi/2$. Alors

$$x(t) = \cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + \circ(u^3) \ ,$$

et

$$y(t) = \frac{\sin^2 u}{2 + \sin u} = \frac{u^2 + \circ(u^3)}{2 + u + \circ(u)} = \frac{u^2}{2} \frac{1 + \circ(u)}{1 + \frac{u}{2} + \circ(u)} = \frac{u^2}{2} \left(1 - \frac{u}{2} + \circ(u)\right) = \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{4} + \circ(u^3) \ .$$

On a donc

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \overrightarrow{U_2} + \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3 \overrightarrow{U_3} + \circ\left(\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3\right) \ ,$$

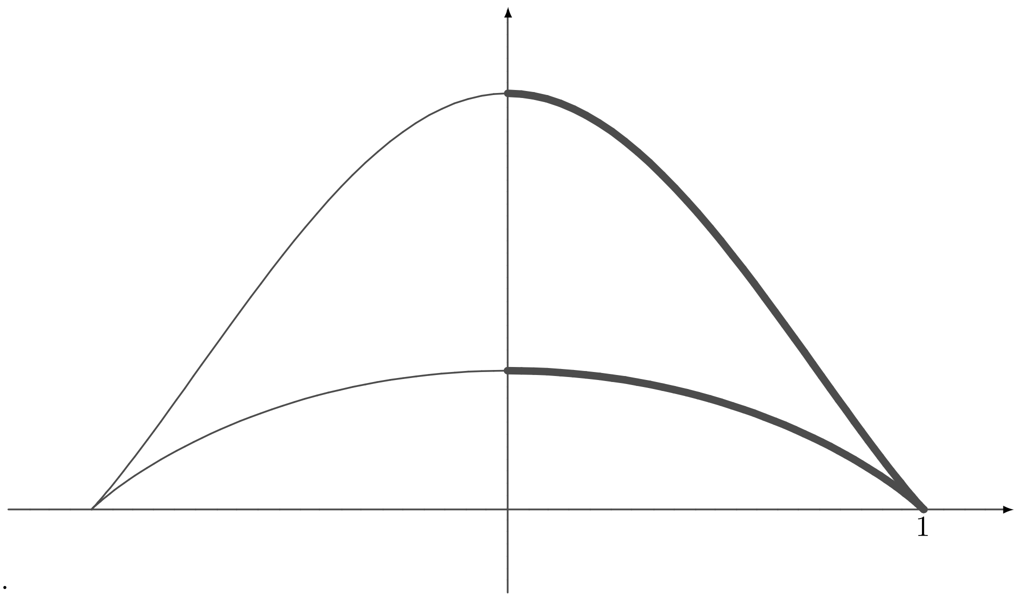
où

$$\overrightarrow{U_2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{U_3} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{j} \ .$$

La courbe admet un point de rebroussement de 1° espèce, au point $(0, 1)$.

$\boxed{\text{Tracé de la courbe}}$

On trace l'arc de courbe obtenu lorsque t varie de 0 à π, puis on complète par la symétrie $\mathcal{S}_1$.



.

4. a) $\boxed{\text{Période}}$

Comme $\tan t$ est de période π, on en déduit que x est de période 3π. Par ailleurs y est de période 2π. Alors 6π est un multiple entier de ces deux périodes, On étudie la courbe sur un intervalle de longueur 6π.

$\boxed{\text{Réduction du domaine d'étude}}$

Si l'on veut commencer par étudier la parité des fonctions, on prend l'intervalle $I_0 = [-3\pi, 3\pi]$. Dans cet intervalle, x n'est pas défini si $t = 3\pi/2$.

L'application : $\Phi_1 : t \mapsto -t$ est une bijection de $I_1 = [0, 3\pi]$ sur $I_1' = [-3\pi, 0]$, et l'on a

$$x(-t) = -x(t) \quad \text{et} \quad y(-t) = -y(t) \ .$$

La courbe est symétrique par rapport à l'origine. On l'étudie sur I_1, et on complètera par la symétrie $\mathcal{S}_1$ par rapport à Ox.

L'application : $\Phi_2 : t \mapsto 3\pi - t$ est une bijection de $I_2 = [0, 3\pi/2]$ sur $I_2' = [3\pi/2, 3\pi]$, et l'on a

$$x(3\pi - t) = -x(t) \quad \text{et} \quad y(3\pi - t) = y(t) \ .$$

La courbe est symétrique par rapport à Oy. On l'étudie sur I_2, et on complètera par la symétrie $\mathcal{S}_2$ par rapport à Oy.

Dérivées et tableau de variation

On a

$$x'(t) = \frac{1}{3}\left(1 + \tan^2 \frac{t}{3}\right) \quad \text{et} \quad y'(t) = \cos t\ .$$

On a immédiatement le tableau de variation :

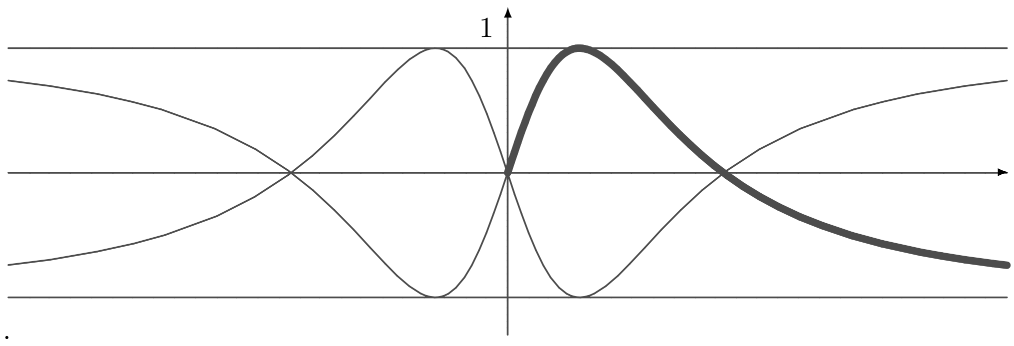
t	0		$\pi/2$		$3\pi/2$
x'			$+$		
x	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1
y'		$+$	0	$-$	0
y'/x'	3		0		

Asymptote - Intersection avec Ox

Quand t tend vers $\pi/2$ la courbe admet comme asymtote horizontale la droite d'équation $y = -1$. Les points d'intersection avec l'axe des x est obtenu pour $t = 0$, et $t = \pi$. Le premier donne l'origine O, le second le point $(\sqrt{3}, 0)$. Ces deux points sont, par symétrie, des points doubles.

Tracé de la courbe

On trace l'arc de courbe obtenu lorsque t varie de 0 à $3\pi/2$, puis on complète successivement par les symétries $\mathcal{S}_2$, puis $\mathcal{S}_1$.



4. b) Les fonctions x et y sont définies sauf en $t = 0$. On étudie la courbe sur $\left]-\infty, \infty\right[$.

$\boxed{\text{Dérivées et tableau de variation}}$

On a

$$x'(t) = 2t + \frac{2}{t^2} = 2\,\frac{t^3+1}{t^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = 2t - \frac{16}{t^2} = 2\,\frac{t^3-8}{t^2}\ .$$

La première fonction s'annule pour $t = -1$ et la seconde pour $t = 2$. On a le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x'		$-$	0	$+$	‖		$+$		
x	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-15	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$
y'			$-$		‖	$-$	0	$+$	
y'/x'			∞		‖		0		

$\boxed{\text{Asymptotes}}$

Lorsque t tend vers $\pm\infty$, on a

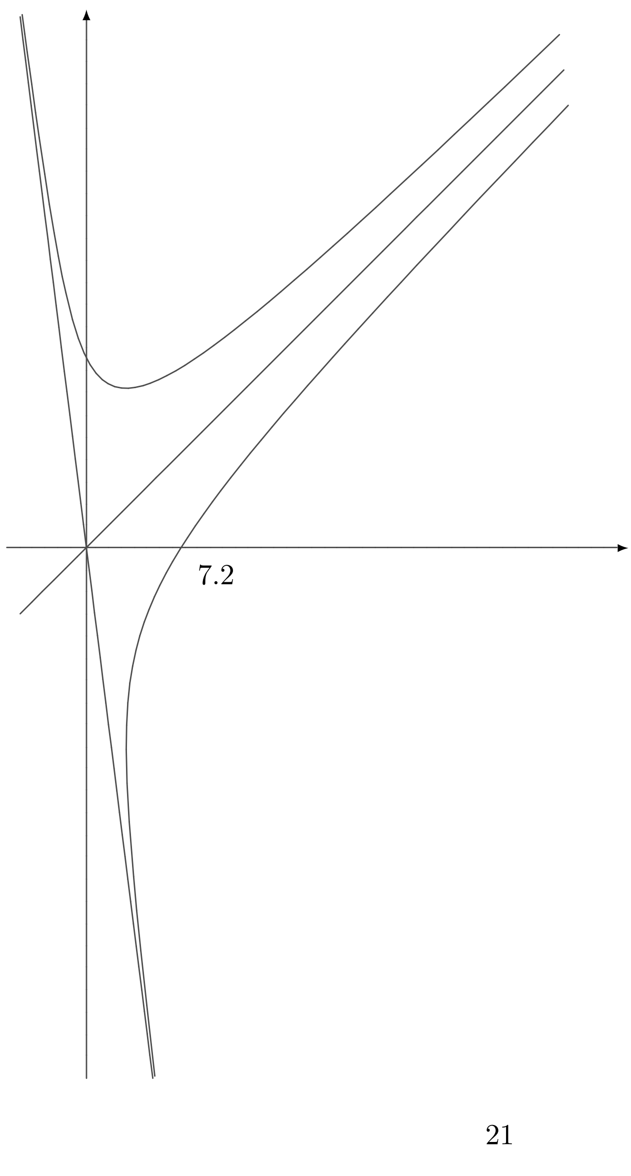
$$y(t) - x(t) = \frac{18}{t} \ ,$$

et cette expression tend vers zéro à l'infini. La courbe admet donc une asymptote oblique d'équation $y = x$. La différence $y(t) - x(t)$ est du signe de $1/t$. La courbe est au-dessus de l'asymptpte à $+\infty$ et en dessous à $-\infty$.

Lorsque t tend vers zéro, on a

$$y(t) + 8x(t) = 9t^2 \ ,$$

et cette expression tend vers zéro lorsque t tend vers zéro. La courbe admet donc une asymptote oblique d'équation $y = -8x$. La différence $y(t) + 8x(t)$ est du signe de $1/t^2$. La courbe est au-dessus de l'asymptpte à lorsque x tend vers 0^+ et vers 0^-.



Points d'intersection avec les axes

On peut déterminer les points d'intersection avec les axes. L'équation $x = 0$ a pour solution $t = \sqrt[3]{2}$, et l'on obtient

$$y = \frac{18}{\sqrt[3]{2}} \approxeq 14,2 \ .$$

L'équation $y = 0$ a pour solution $t = -2\sqrt[3]{2}$, et l'on obtient

$$x = \frac{9}{\sqrt[3]{2}} \approxeq 7.2 \ .$$

4. c) La fonction x n'est pas définie en $t = 0$, et $t = 1$. La fonction y n'est pas définie en $t = 1$. On étudie la courbe sur $\,]-\infty,\, \infty\,[$.

Réduction du domaine d'étude

L'application : $\Phi_1 : t \mapsto 1/t$ est une bijection de $I_1 = \,[-1,\, 1\,] - \{0\}$ sur $I_1' =]\,-\infty,\, -1\,] \cup [\,1,\, +\infty\,[$, et l'on a

$$x\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{\dfrac{1}{t}\left(\dfrac{1}{t} - 1\right)} = \frac{t^2}{1-t} = y(t) \ ,$$

et donc également

$$y\left(\frac{1}{t}\right) = x(t) \ .$$

La courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice. On l'étudie sur I_1, et on complètera par la symétrie $\mathcal{S}_1$ par rapport à la première bissectrice.

Dérivées

On a

$$x'(t) = -\frac{2t-1}{[t(t-1)]^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{(1-t)2t + t^2}{(1-t)^2} = \frac{t(2-t)}{(1-t)^2} \ .$$

Dans I_1, La première fonction s'annule pour $t = 1/2$ et la seconde pour $t = 0$.

Tableau de variation

t	-1		0		$1/2$		1
x'		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
x	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert \ -\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$
y	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$-$	0		$+$		
y'/x'	-1				∞		

$\boxed{\text{Asymptotes}}$

La courbe possède l'axe des x comme asymptote horizontale lorsque t tend vers zéro.

Lorsque t tend vers 1, on a $\dfrac{y(t)}{x(t)} = -t^3$ et cette quantité tend vers -1, puis

$$y(t) + x(t) = -\left(t + 1 + \frac{1}{t}\right) ,$$

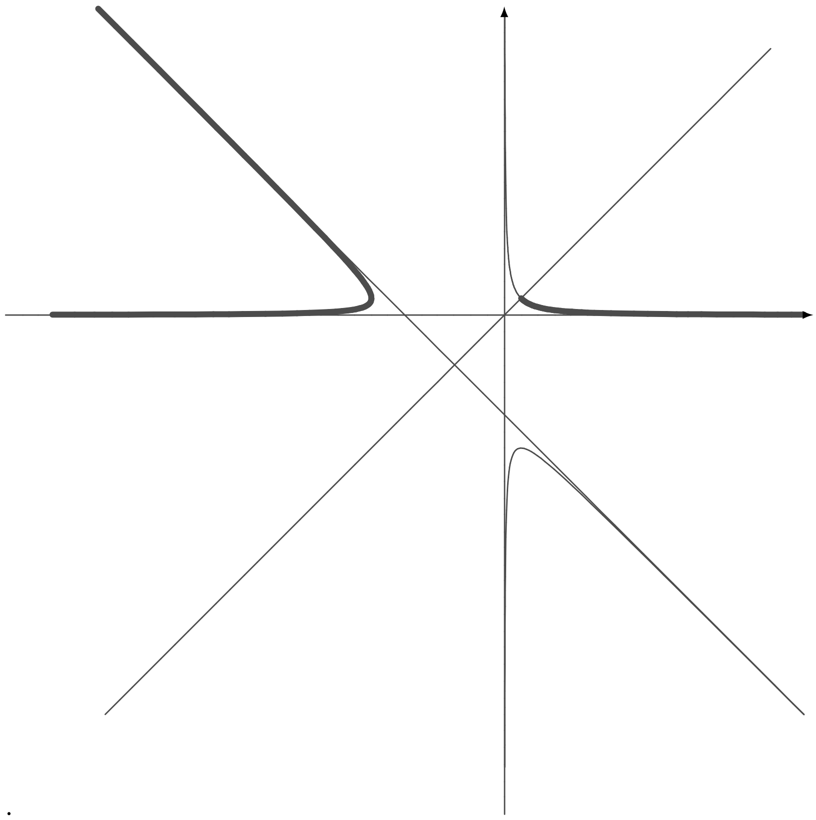
tend vers -3. Alors

$$y(t) + x(t) + 3 = -\frac{(t-1)^2}{t} ,$$

est du signe de $-t$. La courbe est au-dessus de l'asymptote si $t < 0$, et en dessous si $t > 0$, en particulier, quand t tend vers 1, elle est en dessous.

$\boxed{\text{Tracé de la courbe}}$

On trace l'arc de courbe obtenu lorsque t varie de -1 à 1, puis on complète par la symétrie $\mathcal{S}_1$.



.

4. d) La fonction x n'est pas définie en $t = 0$. La fonction y n'est pas définie en $t = -1$ et $t = 0$. On étudie la courbe sur $]-\infty, \infty[$.

$\boxed{\text{Dérivées et tableau de variation}}$

On a immédiatement

$$x'(t) = \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} = \frac{2t+1}{t(t+1)} ,$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$		-1		$-1/2$		0		$+\infty$
x'				$-$			‖	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\ln 4$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
y'/x'					0				

$\boxed{\text{Asymptotes}}$

Lorsque t tend vers -1, la courbe admet l'axe des y comme asymptote verticale. Elle coupe l'asymptote lorsque $t = 1$, donc au point de coordonnées $(0, \ln 2)$.

Lorsque t tend vers zéro, on a

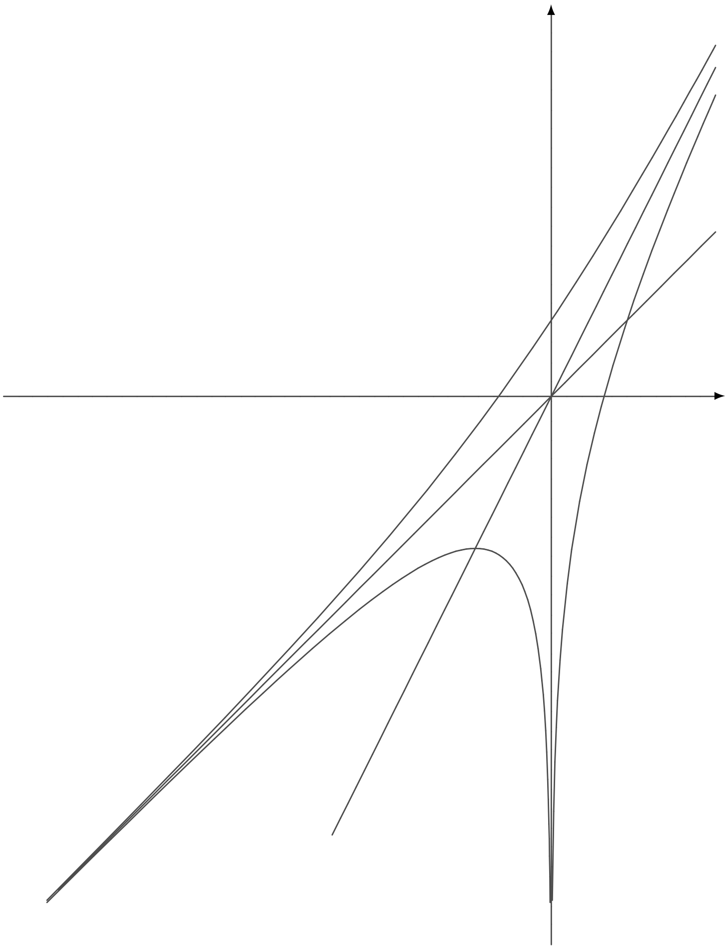
$$y(t) = \ln|t| + \ln|t+1| = x + \ln|t+1| \ .$$

et $\ln|t+1|$ tend vers zéro. La première bissectrice est asymptote, et $y(t) - x(t) = \ln|t+1|$ est du signe de t au voisinage de zéro. La courbe est au-dessus de l'asymptote lorsque t tend vers 0^+ et en dessous lorsque t tend vers 0^- . Elle coupe l'asymptote lorsque $|t+1| = 1$, c'est-à-dire si $t = -2$, donc au point de coordonnées $(\ln 2, \ln 2)$

Lorsque t tend vers $\pm\infty$, on a

$$y(t) = \ln\left|t^2\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right| = 2\ln|t| + \ln\left|1 + \frac{1}{t}\right| = 2x + \ln\left|1 + \frac{1}{t}\right| \ .$$

La courbe admet comme asymptote la droite d'équation $y = 2x$, et $y(t) - 2x(t) = \ln|1 + 1/t|$ est du signe de t au voisinage de l'infini. La courbe est au-dessus de l'asymptote à $+\infty$ et en dessous à $-\infty$. Elle coupe l'asymptote lorsque $|1 + 1/t| = 1$ c'est-à-dire si $t = -1/2$, donc au point de coordonnées $(-\ln 2, -2\ln 2)$.



$\boxed{\text{Intersection avec } Ox}$

La fonction y s'annule si

$$t(t+1) = \pm 1 \ .$$

On obtient des solutions uniquement dans le cas $+1$, qui sont

$$t = (-1 \pm \sqrt{5})/2 \ .$$

Ces valeurs de t sont, en valeur absolue, inverses l'une de l'autre. On a donc deux points d'abscisses opposées :
$x = \pm \ln \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approxeq 0.48$.