EXERCICES SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES FONCTIONS

1. Calculer, lorsque c'est possible, les limites des fonctions f définies ci-dessous en $+\infty$ et $-\infty$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+x+3}$ *b)* $f(x) = x-1+\sqrt{x^2-x+3}$ *c)* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+2}$

d) $f(x) = \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+x+1}}$ *e)* $f(x) = \dfrac{|x+1|}{|x|-2}$ *f)* $f(x) = \dfrac{e^x-x^2}{e^x+x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{\ln\ln x}{x^2}$ *h)* $f(x) = \dfrac{x^3(\ln x)^2}{3^x}$ *i)* $f(x) = 2\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh} 2x$

2. Dans chacun des cas ci-dessous, trouver une fonction simple équivalente en $+\infty$ à la fonction proposée. En déduire sa limite en $+\infty$ si elle existe. (Dans cet exercice, a désigne un nombre réel quelconque, et n un entier naturel).

a) $f(x) = \dfrac{a+2x}{2+ax} - \sqrt{x+1}$ *b)* $f(x) = x + a\sqrt{x^2+1}$ *c)* $f(x) = \dfrac{x^2-\sqrt{x^4+2x^n+3}}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2\sin x+\ln x}{x^3\ln x+x}$ *e)* $f(x) = x^2+\exp((\ln x)^2)$ *f)* $f(x) = \dfrac{x}{(\ln x)^5+\sqrt{x}}$

3. Calculer le développement limité en 0 des fonctions suivantes

a)	$(1+2\arctan x)(2e^x-\sin x)$	ordre 3	*b)*	$(x+1)(x-2)(x-3)$	ordre 2
c)	$\dfrac{2+\arctan x}{\operatorname{ch} x}$	ordre 4	*d)*	$\dfrac{x}{e^x-1}$	ordre 3
e)	$\dfrac{\ln(1+x^3)}{\tan x - x}$	ordre 3	*f)*	$\sqrt{2+\cos x}$	ordre 2
g)	$e^{\sqrt{2+\cos x}}$	ordre 2	*h)*	$(1+2x)^{1/x}$	ordre 2
i)	$\ln\dfrac{\ln(1+x)}{x}$	ordre 2	*j)*	$\sqrt[3]{1+\sin x}$	ordre 3
k)	$\cos(e^x)$	ordre 2	*l)*	$\operatorname{argsh}\sqrt{1+x}$	ordre 2

4. En utilisant la formule de Taylor-Young, calculer le *d.l.* de $\arctan x$ à l'ordre 3 au voisinage de 1. Puis retrouver ce résultat à partir du *d.l.* de la dérivée d'$\arctan x$ au voisinage de 1 sans utiliser la formule de Taylor-Young .

5. Trouver les développements limités des fonctions suivantes :

a)	$f(x) = \cos x$	à l'ordre 3	en $\pi/3$
b)	$f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$	à l'ordre 2	en -1
c)	$f(x) = \ln x$	à l'ordre 2	en 3
d)	$f(x) = (\tan x)^{\tan(2x)}$	à l'ordre 3	en $\pi/4$.

6. a) Déterminer le développement limité d'ordre 13 en 0 de $\arctan(1/x^2)$.

b) Montrer que, quel que soit $n > 0$, le développement limité d'ordre n en 0 de $\mathrm{th}(1/x^2)$ vaut $1 + \circ(x^n)$.

7. Trouver un équivalent simple, lorsque x tend vers zéro des fonctions suivantes :

a) $x(2-\cos x) - \arctan x$ *b)* $e^{\cos x} + e^{\mathrm{ch}\, x} - 2e$

c) $\sqrt{\tan x} - \sqrt[4]{x \sin x}$ *d)* $1 + \dfrac{\ln \mathrm{ch}\, x}{\ln \cos x}$

8. Calculer les limites des fonctions suivantes en utilisant les développements limités.

a) $\dfrac{\sin x - \arcsin x}{\sin^3 x}$ $(x \to 0)$ *b)* $\left(\dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\sin x}\right)^{1/x^2}$ $(x \to 0)$

c) $\dfrac{5^x - 3^x}{4^x - 2^x}$ $(x \to 0)$ *d)* $\dfrac{x^e - e^x}{(x-e)^2}$ $(x \to e)$

e) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}$ $(x \to 0)$ *f)* $\mathrm{cotan}^2 x - \dfrac{1}{x^2}$ $(x \to 0)$

9. Calculer les limites des suites suivantes.

a) $u_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ (x réel)

b) $u_n = \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ (a, b réels positifs).

10. Etudier au voisinage de zéro, les fonctions f suivantes

a) $f(x) = \dfrac{e^{-x} - 1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{3\ln(1+x) - \ln(1+x^3)}{3x}$

11. Etudier à l'infini, les fonctions suivantes

a) $f(x) = \sqrt{x(1+x)}\, e^{3/(2x)}$

b) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$

c) $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 3e^{-3x} + e^{-x} + 1)$