Ch1 Fonctions dérivables d'une variable réelle. Graphe d'une fonction. Formule de Taylor. Développement limité.

I Dérivée d'une fonction en un point.

a) pente, taux d'accroissement, coefficient directeur, vitesse moyenne.

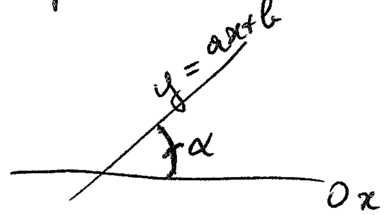
1) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ou $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ est la pente de

la corde passant par les points

$(x, f(x))$ et $(x+h, f(x+h))$ ou bien $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$

de la courbe, ou du graphe de la fonction f.

(Rappel sur la pente a de la droite d'équation
$y = ax+b$



$a = \operatorname{tg} \alpha$)

Rappel : les droites "verticales" i.e. $/\!/$ à Oy

- n'ont pas une équation de type $y = ax+b$
- ont (en quelque sorte) une pente a "infinie"

"$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = +\infty$" "$\operatorname{tg} -\frac{\pi}{2} = -\infty$"

(parler de limite en $\frac{\pi}{2}$ à dte ou à gauche pour tangente)

2) Si $f(t+h)$ est la position d'un mobile sur la droite réelle au temps $t+h$ (resp. $f(t)$ la position au temps t) alors $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ est aussi

la vitesse moyenne du mobile sur l'intervalle de temps $[t, t+h]$

b) Derivée en un point.

Defn On dit que la fonction f est dérivable au point x_0 si

$$h \to \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

possède une limite quand $h \to 0$

cette limite est la dérivée de f en x_0, notée $f'(x_0)$

Interprétation :

① pente de la tangente à la courbe $y=f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$ GRAPHIQUE

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

donc $f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + h\,\varepsilon(h)$

$$h\,\varepsilon(h) \ll h f'(x_0) \qquad h \to 0$$

$$h\,\varepsilon(h) \ll f(x_0) \qquad h \to 0$$

donc $f(x_0+h) \simeq f(x_0) + h f'(x_0)$

$$y = f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ equation de la tangente
la droite passant par $(x_0, f(x_0))$ et qui approche le mieux la courbe $y=f(x)$
(la tangente)

② Meilleure approximation de f par une fonction affine (autour de x_0)   NUMERIQUE

③ Vitesse instantanée :   PHYSIQUE

Utilisation : * Physique : dériver 2 fois $\Leftrightarrow$ accélération
lié $\updownarrow$ à la force

* Tracé de courbe
* Recherche de maximum ou de minimum
* Majoration, minoration, estimation.

c) Graphique : Si la fonction f admet une dérivée en x_0, son graphe admet une tangente en $(x_0, f(x_0))$, tq elle qui est non parallèle à Oy.

Exemple $f(x) = \sqrt{x}$ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\forall x > 0$

Par contre $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h} - 0}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow[h \to 0]{} +\infty$

→ tangente verticale
(les pentes des cordes tendent vers $+\infty$)
f n'est pas dérivable en 0
(et f est pourtant continue en 0.

d) Approximation de f

Propriété f est dérivable en x_0 ssi $\left|\begin{array}{l} \exists h_0 > 0 \\ \exists \text{ une fonction} \end{array}\right.$ (la dérivée $f'(x_0) = a$)

ε, définie sur l'intervalle $[x_0 - h_0, x_0 + h_0]$, telle que

a) $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$ b) $\forall x \in [x_0 - h_0, x_0 + h_0]$,

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x - x_0)$$

c) $\forall h \in [-h_0, h_0]$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\,\varepsilon(h)$$

On peut alors dire que, pour $x - x_0$ ou h petit,

$$f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + ah$$

$$f(x) \simeq f(x_0) + a(x - x_0)$$

Le choix $a = f'(x_0)$ fournit la meilleure approximation de f.
(de ce type, ie par une fonction affine, autour de x_0)

II Calcul des dérivées

opérations

$\boxed{d1}$ $(u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$

$\boxed{d2}$ $(uv)'(x_0) = u'(x_0)\,v(x_0) + u(x_0)\,v'(x_0)$

$\boxed{d3}$ $(au)'(x_0) = a\,u'(x_0)$ ($a \in \mathbb{R}$ une constante)

$\boxed{d4}$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x_0) = \dfrac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$ si $v(x_0) \neq 0$

$\boxed{d5}$ $(au+bv)'(x_0) = a\,u'(x_0) + b\,v'(x_0)$ (d_1 et $d_3 \to d_5$)

$(\sum d_i u_i)'(x_0) = \sum d_i\, u_i'(x_0)$ (a, b, d_i constantes)

$\boxed{d6}$ $(u \circ v)'(x_0) = u'(v(x_0)) \times v'(x_0)$

$\boxed{d7}$ $(u^{-1})'(x_0) = \dfrac{1}{u'(u^{-1}(x_0))}$ si $u'(u^{-1}(x_0)) \neq 0$!!!

fonctions classiques

f	f'
C	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	$n x^{n-1}$
polynome	→ polynôme dérivé $\boxed{d5}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{2}{x^3}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$ (sauf si ($\alpha<0$ et $x=0$))

f	f'
$\sqrt{x}$	$1/2\sqrt{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$1+\operatorname{tg}^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{Arcsin} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arccos} x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x
$\operatorname{Log} x$	$1/x$

III Fonction dérivable sur un intervalle

* f est dite dérivable sur $]a, b[$ si f est dérivable en tout point de $]a, b[$
* – – $[a, b]$ si f est dérivable en tout point de $]a, b[$, et de plus, dérivable à dte en a et dérivable à gauche en b.

---

dérivable en x_0 $\Rightarrow$ continue en x_0

à dte $\Rightarrow$ cont à dte

à gche $\Rightarrow$ à gche

der. sur $[a,b]$ $\Rightarrow$ sur $[a,b]$

der $]a,b[$ $\Rightarrow$ cont sur $]a,b[$

IV Dérivées successives

La dérivée $n$ème $f^{(n)}$ de f sur $]a,b[$ est définie par récurrence ① $f^{(1)} = f'$, $f^{(0)} = f$

② $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$

<u>Exemple</u> $f(x) = \sin x \Rightarrow f^{(2n)}(x) = \ ?$

$f(x) = x^n \Rightarrow f^{(p)}(x) = \ --- \ ?$

degré de la dérivée $k$ème d'un polynome de degré n ?

Formule de Leibnitz :

①

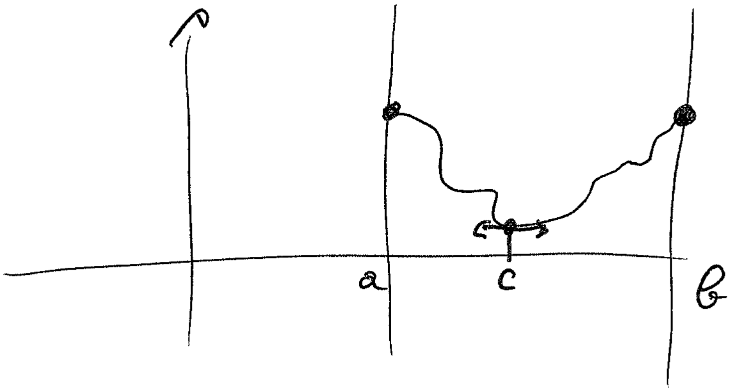
IV Formule des accroissements finis. Etude de la variation d'une fonction.

a) Théorème de Rolle

Si f est définie sur $[a, b]$ (et continue), si f y admet une dérivée (finie) sur $]a, b[$, et si $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins une valeur c telle que

a) $a < c < b$

et b) $f'(c) = 0$



b) Formule des accroissements finis.

H_F

Si {f est définie et continue sur $[a, b]$ et admet une dérivée finie sur $]a, b[$}, alors

$\exists c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

(Il y a un moment où la vitesse moyenne = la vitesse instantanée.)

(où la tangente est // à la corde)

<u>Conséquence 1</u> Sous H_F, f est constante sur $[a,b]$ si et seulement si $f'|_{]a,b[} \equiv 0$

<u>Dém^n</u> : Si f est constante alors $f' \equiv 0$ (appl^n de la déf^n)

si $f' \equiv 0$, comme $\forall x_0, x_1$ tq $a \leq x_0 < x_1 \leq b$ H_F est vérifiée sur $[x_0, x_1]$ alors $\exists c_{x_0,x_1} \in]x_0, x_1[\subset]a,b[$ tq

$$f(x_1) - f(x_0) = (x_1 - x_0)\, f'(c_{x_0 x_1}) = (x_1 - x_0) \times 0 = 0$$

donc $\forall x_0, x_1$ tq $a \leq x_0 < x_1 \leq b$, $f(x_0) = f(x_1)$ CQFD

<u>Csq2</u> * f est croissante sur $[a,b]$ ss H_F, ssi $f' \geq 0$ sur $]a,b[$

* f est strictement $\nearrow$ sur $[a,b]$ ssi $f' \geq 0$ sur $]a,b[$ et $\nexists I$ <u>ouvert</u> $\subset]a,b[$ tq $f'|_I \equiv 0$

<u>Csq3</u> décroissante $f' \leq 0$

déc str $f' \leq 0$ et $\nexists I$ —— $f'_I \equiv 0$.

<u>Démn</u> croissante $\Rightarrow f' \geq 0$ (définition)

croissante et $a < b$, $f(a) = f(b)$ $\Rightarrow$ $\forall c \in]a,b[$ $f(a) \leq f(c) \leq f(b) = f(a)$

$\Downarrow$

f constante sur $[a,b]$

$\Downarrow$

$f'|_{]a,b[} = 0$.

<u>Espace 3</u> * Si $\left. \begin{array}{l} f(x_0) = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \\ x_0 \in [a,b] \end{array} \right|$ et H_F

alors $f'(x_0) = 0$ ou bien $x_0 \in \{a, b\}$

* Même chose si $f(x_0) = \max\{ - \quad - \}$

* Si $f'\big|_{]a,x_0[} \leq 0$ et $f'\big|_{]x_0,b[} \geq 0 \Rightarrow f(x_0) = \min_{[a,b]} f$ $\boxed{\text{et } H_F(a,x_0) \text{ et } H_F(x_0,b)}$

Si ≥ 0 $\leq 0 \Rightarrow f(x_0) = \max_{[a,b]} f$

c) Etude de la variation d'une fonction, majoration, minoration, recherche d'extrêma.

<u>Plan de travail</u> : ① Domaine de définition, considération de parité et de periodicité → réduction du domaine

② Calcul de la dérivée, étude de son signe sur l'intervalle / le domaine } réduit

→ tableau de variation.

③ Etude des valeurs aux bornes

④ Tracé des points remarquables et des tgtes en ces points, puis tracé de la courbe.