

## EXERCICES SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES FONCTIONS

1. Calculer, lorsque c'est possible, les limites des fonctions  $f$  définies ci-dessous en  $+\infty$  et  $-\infty$  :

$$a) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + x + 3} \quad b) f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - x + 3} \quad c) f(x) = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} + 2}$$

$$d) f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x^2+x+1}} \quad e) f(x) = \frac{|x+1|}{|x|-2} \quad f) f(x) = \frac{e^x - x^2}{e^x + x^2}$$

$$g) f(x) = \frac{\ln \ln x}{x^2} \quad h) f(x) = \frac{x^3 (\ln x)^2}{3^x} \quad i) f(x) = 2 \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh} 2x$$

2. Dans chacun des cas ci-dessous, trouver une fonction simple équivalente en  $+\infty$  à la fonction proposée. En déduire sa limite en  $+\infty$  si elle existe. (Dans cet exercice,  $a$  désigne un nombre réel quelconque, et  $n$  un entier naturel).

$$a) f(x) = \frac{a+2x}{2+ax} - \sqrt{x+1} \quad b) f(x) = x + a\sqrt{x^2+1} \quad c) f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x^4 + 2x^n + 3}}{x}$$

$$d) f(x) = \frac{x^2 \sin x + \ln x}{x^3 \ln x + x} \quad e) f(x) = x^2 + \exp((\ln x)^2) \quad f) f(x) = \frac{x}{(\ln x)^5 + \sqrt{x}}$$

3. Calculer le développement limité en 0 des fonctions suivantes

$$a) (1 + 2 \arctan x)(2e^x - \sin x) \quad \text{ordre 3} \quad b) (x+1)(x-2)(x-3) \quad \text{ordre 2}$$

$$c) \frac{2 + \arctan x}{\operatorname{ch} x} \quad \text{ordre 4} \quad d) \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{ordre 3}$$

$$e) \frac{\ln(1+x^3)}{\tan x - x} \quad \text{ordre 3} \quad f) \sqrt{2 + \cos x} \quad \text{ordre 2}$$

$$g) e^{\sqrt{2+\cos x}} \quad \text{ordre 2} \quad h) (1+2x)^{1/x} \quad \text{ordre 2}$$

$$i) \ln \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{ordre 2} \quad j) \sqrt[3]{1 + \sin x} \quad \text{ordre 3}$$

$$k) \cos(e^x) \quad \text{ordre 2} \quad l) \operatorname{argsh} \sqrt{1+x} \quad \text{ordre 2}$$

4. En utilisant la formule de Taylor-Young, calculer le *d.l.* de  $\arctan x$  à l'ordre 3 au voisinage de 1. Puis retrouver ce résultat à partir du *d.l.* de la dérivée d' $\arctan x$  au voisinage de 1 sans utiliser la formule de Taylor-Young.



## Corrigé

1. a) A l'infini, le limite de  $f$  est celle du rapport des termes de plus haut degré, donc

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}.$$

b) Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , il n'y a pas de forme indéterminée, et l'on obtient immédiatement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Par contre, en  $-\infty$ , il y a une forme indéterminée, et on utilise la quantité conjuguée du numérateur :

$$f(x) = \frac{-x - 2}{x - 1 - \sqrt{x^2 - x + 3}}.$$

On met alors  $x$  en facteur, en remarquant que

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x$$

puisque  $x$  est négatif. Alors

$$f(x) = \frac{-1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

c) La fonction n'est définie que sur l'intervalle  $]1, +\infty[$ . Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , on met  $\sqrt{x}$  en facteur, donc

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{x}}},$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

d) Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , on obtient, en mettant  $x$  en facteur

$$f(x) = \frac{x \left(1 + \frac{4}{x}\right)}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1 + \frac{4}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}},$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ , on obtient, en mettant  $x$  en facteur, et puisque  $\sqrt{x^2} = -x$  pour  $x < 0$ ,

$$f(x) = -\frac{1 + \frac{4}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}},$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

e) Quand  $x$  tend vers l'infini, on écrit

$$f(x) = \frac{\left|1 + \frac{1}{x}\right|}{1 - \frac{1}{|x|}}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1.$$

f) En  $+\infty$ , on met  $e^x$  en facteur, d'où

$$f(x) = \frac{1 - x^2 e^{-x}}{1 + x^2 e^{-x}},$$

et comme la limite de  $x^2 e^{-x}$  est nulle, on en déduit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

En  $-\infty$ , on met  $x^2$  en facteur, d'où

$$f(x) = \frac{-1 + \frac{e^x}{x^2}}{1 + \frac{e^x}{x^2}},$$

et comme la limite de  $e^x/x^2$  est nulle, on en déduit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

g) La fonction  $f$  est définie sur  $]1, +\infty[$ . On écrit

$$f(x) = \frac{\ln \ln x}{\ln x} \frac{\ln x}{x} \frac{1}{x}.$$

On sait que la fonction  $u \mapsto \frac{\ln u}{u}$  admet pour limite 0 en  $+\infty$ . Donc par composition des limites  $x \mapsto \frac{\ln \ln x}{\ln x}$  admet pour limite 0, et  $f$  également, comme produit de fonctions ayant pour limite 0.

h) La fonction  $f$  est définie sur  $]0, +\infty[$ . On écrit

$$f(x) = \frac{x^5}{3^x} \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2,$$

Et comme  $x \mapsto \frac{x^5}{3^x}$  et  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  admettent pour limite 0 en  $+\infty$ , il en est de même de la fonction  $f$ .

i) En développant, on obtient

$$f(x) = 2 \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 - \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = -1 + e^{-2x}.$$

Et  $f$  admet pour limite  $-1$  en  $+\infty$  et  $+\infty$  en  $-\infty$ .

**2.** a) Si  $a = 0$ ,

$$f(x) = x - \sqrt{x+1} = x \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right),$$

et l'expression entre parenthèses admet pour limite 1. Donc  $f(x) \sim x$ , et  $f$  admet  $+\infty$  comme limite.

Si  $a \neq 0$ , on a, en divisant par  $x$  dans la fraction,

$$f(x) = \frac{2 + \frac{a}{x}}{\frac{2}{x} + a} - \sqrt{x+1},$$

puis en mettant  $\sqrt{x}$  en facteur

$$f(x) = \sqrt{x} \left( -\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{2 + \frac{a}{x}}{\frac{2}{x} + a} \right).$$

L'expression entre parenthèses admet pour limite  $-1$ , donc est équivalente à la fonction constante  $x \mapsto -1$ . Alors  $f(x) \sim -\sqrt{x}$  et  $f$  admet  $-\infty$  comme limite.

b) Si  $a \neq -1$ , en mettant  $x$  en facteur

$$f(x) = x \left( 1 + a \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right),$$

et l'expression entre parenthèses admet pour limite  $a+1$ , donc  $f(x) \sim (a+1)x$ , et  $f$  admet  $+\infty$  comme limite si  $a > -1$ , et  $-\infty$  si  $a < -1$ .

Si  $a = -1$ , on utilise la quantité conjuguée, puis on met  $x$  en facteur.

$$f(x) = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)},$$

et l'expression entre parenthèses admet pour limite 2, donc

$$f(x) \sim -\frac{1}{2x},$$

et  $f$  admet pour limite 0.

c) Si  $n > 4$ , on met  $x^{n/2}$  en facteur au numérateur

$$f(x) = \frac{x^{n/2} \left( \frac{1}{x^{n/2-2}} - \sqrt{2 + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{3}{x^n}} \right)}{x} = x^{n/2-1} \left( \frac{1}{x^{n/2-2}} - \sqrt{2 + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{3}{x^n}} \right).$$

Et l'expression entre parenthèses admet pour limite  $-\sqrt{2}$ , donc

$$f(x) \sim -\sqrt{2} x^{n/2-1}.$$

La fonction  $f$  admet  $-\infty$  comme limite.

Si  $n = 4$ , on met  $x^2$  en facteur au numérateur

$$f(x) = \frac{x^2 \left(1 - \sqrt{3 + \frac{3}{x^4}}\right)}{x} = x \left(1 - \sqrt{3 + \frac{3}{x^4}}\right).$$

L'expression entre parenthèses admet pour limite  $1 - \sqrt{3}$ , donc

$$f(x) \sim (1 - \sqrt{3})x,$$

et  $f$  admet  $-\infty$  pour limite.

Si  $n < 4$ , on utilise la quantité conjuguée

$$f(x) = \frac{-2x^n - 3}{x(x^2 + \sqrt{x^4 + 2x^n + 3})},$$

puis on met  $x^n$  en facteur au numérateur et  $x^3$  au dénominateur

$$f(x) = \frac{x^n \left(-2 - \frac{3}{x^n}\right)}{x^3 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x^{4-n}} + \frac{3}{x^4}}\right)} = x^{n-3} \left( \frac{-2 - \frac{3}{x^n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x^{4-n}} + \frac{3}{x^4}}} \right).$$

L'expression entre parenthèses admet pour limite  $-1$  donc

$$f(x) \sim -x^{n-3},$$

et  $f$  admet  $-\infty$  pour limite si  $n > 3$ ,  $-1$  si  $n = 3$ , et  $0$ , si  $n < 3$ .

d) On met  $x^3 \ln x$  en facteur au dénominateur

$$f(x) = \frac{x^2 \sin x + \ln x}{x^3 \ln x} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2 \ln x}}.$$

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2 \ln x}$  admet pour limite zéro, donc

$$f(x) \sim \frac{x^2 \sin x + \ln x}{x^3 \ln x},$$

que l'on peut encore écrire, en divisant par  $x^3$

$$f(x) \sim \frac{\sin x}{x \ln x} + \frac{1}{x^3}.$$

Mais la fonction sinus est bornée sur  $\mathbb{R}$ , et la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$  admet comme limite  $0$ . Donc la fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{x \ln x}$  admet pour limite  $0$  à  $+\infty$ . On en déduit que  $f$  admet pour limite  $0$ .

Remarque : on n'a pas l'équivalence

$$x^2 \sin x + \ln x \sim x^2 \sin x,$$

sinon, il existerait un intervalle  $[a, +\infty[$  sur lequel les fonctions seraient simultanément nulles. Or  $\sin x$  s'annule pour tout multiple entier de  $\pi$ , et pas  $x^2 \sin x + \ln x$ .

e) Remarquons que

$$\exp((\ln x)^2) = e^{\ln x \ln x} = x^{\ln x}.$$

Mettons  $x^{\ln x}$  en facteur

$$f(x) = x^{\ln x} (1 + x^{2-\ln x}).$$

L'expression entre parenthèses admet  $1$  pour limite, donc

$$f(x) \sim x^{\ln x},$$

et  $f$  admet  $+\infty$  comme limite.

f) On écrit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \frac{(\ln x)^5}{\sqrt{x}}}.$$

Mais

$$\frac{(\ln x)^5}{\sqrt{x}} = \left( \frac{\ln x}{x^{1/10}} \right)^5,$$

et cette expression admet comme limite 0. Donc

$$f(x) \sim \sqrt{x},$$

et  $f$  admet comme limite  $+\infty$ .

3. a) On part des *d.l.* de  $\arctan x$ ,  $e^x$  et  $\sin x$  à l'ordre 3 en zéro.

$$1 + 2 \arctan x = 1 + 2x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3),$$

et

$$2e^x - \sin x = \left(2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) = 2 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

On effectue le produit en tronquant à l'ordre 3.

$$(1 + \arctan x)(2e^x - \sin x) = 2 + 5x + 3x^2 + \frac{7x^3}{6} + o(x^3).$$

b) On développe et on tronque à l'ordre 2.

$$(x + 1)(x - 2)(x - 3) = 6 + x - 4x^2 + x^3 = 6 + x - 4x^2 + o(x^2).$$

c) Le dénominateur de la fraction ne s'annulant pas en zéro, on effectue la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 4.

2	+x	-x <sup>3</sup> /3	1	+x <sup>2</sup> /2	+x <sup>4</sup> /24
-2	-x <sup>2</sup>	-x <sup>4</sup> /12	2	+x	-x <sup>2</sup>
	x	-x <sup>2</sup>		-5x <sup>3</sup> /6	+5x <sup>4</sup> /12
	-x	-x <sup>3</sup> /3			
		-x <sup>3</sup> /2			
	-x <sup>2</sup>	-5x <sup>3</sup> /6			
	x <sup>2</sup>	-x <sup>4</sup> /12			
		+x <sup>4</sup> /2			
		-5x <sup>3</sup> /6			
		+5x <sup>4</sup> /12			
		5x <sup>3</sup> /6			

Et donc

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)}.$$

On effectue la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 suivante :

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 \quad +x/2 \quad +x^2/6 \quad +x^3/24 \\ -1 \quad -x/2 \quad -x^2/6 \quad -x^3/24 & 1 \quad -x/2 \quad +x^2/12 \\ \hline & -x/2 \quad -x^2/6 \quad -x^3/24 \\ & x/2 \quad +x^2/4 \quad +x^3/12 \\ \hline & x^2/12 \quad +x^3/24 \\ & -x^2/12 \quad -x^3/24 \\ \hline & 0 \end{array}$$

On a donc finalement

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^3).$$

e) Le premier terme non nul du *d.l.* du dénominateur est de degré 3. On part donc de *d.l.* à l'ordre 6.

$$\tan x - x = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6),$$

et

$$\ln(1 + x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + o(x^6).$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1 + x^3)}{\tan x - x} &= \frac{x^3 - \frac{x^6}{2} + o(x^6)}{\frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)} \\ &= 3 \frac{1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{1 + \frac{2x^2}{5} + o(x^3)} \\ &= 3 \left(1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{2x^2}{5} + o(x^3)\right) \\ &= 3 - \frac{6x^2}{5} - \frac{3x^3}{2} + o(x^3). \end{aligned}$$

f) On a tout d'abord

$$2 + \cos x = 3 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

Donc

$$\sqrt{2 + \cos x} = \sqrt{3 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \sqrt{3} \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^{1/2}.$$

On utilise le *d.l.* de  $(1 + u)^m$  en zéro avec  $m = 1/2$ . Donc

$$\sqrt{2 + \cos x} = \sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = \sqrt{3} \left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right).$$

g) En utilisant l'exercice précédent

$$e^{\sqrt{2 + \cos x}} = e^{\sqrt{3} \left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)} = e^{\sqrt{3}} e^{\left(-\frac{\sqrt{3}x^2}{12} + o(x^2)\right)}.$$

On utilise alors le *d.l.* de  $e^x$  en zéro, d'où

$$e^{\sqrt{2 + \cos x}} = e^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{\sqrt{3}x^2}{12}\right) + o(x^2).$$

h) On écrit

$$(1 + 2x)^{1/x} = e^{\left(\frac{\ln(1 + 2x)}{x}\right)}.$$

Puisque l'on divise par  $x$ , on part d'un *d.l.* de  $\ln(1 + 2x)$  à l'ordre 3.

$$\ln(1 + 2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + o(x^3).$$

On obtient

$$e^{\left(\frac{\ln(1 + 2x)}{x}\right)} = e^{\left(2 - 2x + \frac{8x^2}{3} + o(x^2)\right)} = e^2 e^{\left(-2x + \frac{8x^2}{3} + o(x^2)\right)}.$$

On utilise alors le *d.l.* de  $e^x$  à l'ordre 2 en zéro.

$$e^{\left(\frac{\ln(1 + 2x)}{x}\right)} = e^2 \left[1 + \left(-2x + \frac{8x^2}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(-2x + \frac{8x^2}{3}\right)^2\right] + o(x^2) = e^2 \left(1 - 2x + \frac{14x^2}{3}\right) + o(x^2).$$

i) Puisque l'on divise par  $x$ , on part d'un *d.l.* de  $\ln(1 + x)$  à l'ordre 3.

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Donc

$$\ln \frac{\ln(1 + x)}{x} = \ln \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right).$$

On utilise alors le *d.l.* à l'ordre 2 en zéro de  $\ln(1 + x)$ .

$$\ln \frac{\ln(1 + x)}{x} = \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2 + o(x^2) = -\frac{x}{2} + \frac{5x^2}{24} + o(x^2).$$

j) En partant du *d.l.* à l'ordre 3 en zéro de  $\sin x$ , on a donc

$$\sqrt[3]{1 + \sin x} = \left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^{1/3}.$$

On utilise le *d.l.* de  $(1+u)^{1/3}$  à l'ordre 3 en zéro :

$$(1+u)^{1/3} = 1 + \frac{u}{3} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} - 1 \right) \frac{u^2}{2} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} - 1 \right) \left( \frac{1}{3} - 2 \right) \frac{u^3}{6} + o(u^3) = 1 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + \frac{5u^3}{81} + o(u^3).$$

Alors

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1 + \sin x} &= 1 + \frac{1}{3} \left( x - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{1}{9} \left( x - \frac{x^3}{6} \right)^2 + \frac{5}{81} \left( x - \frac{x^3}{6} \right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{3} \left( x - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{162} + o(x^3). \end{aligned}$$

k) On part du *d.l.* en zéro à l'ordre 2 de  $e^x$ .

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Alors

$$\cos(e^x) = \cos \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right).$$

On en déduit

$$\cos(e^x) = \cos 1 \cos \left( x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - \sin 1 \sin \left( x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right).$$

En utilisant le *d.l.* en zéro à l'ordre 2 du cosinus et du sinus, on a

$$\begin{aligned} \cos(e^x) &= \cos 1 \left( 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - \sin 1 \left( x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \\ &= \cos 1 - x \sin 1 - \frac{\cos 1 + \sin 1}{2} x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

l) On cherche un *d.l.* de la dérivée à l'ordre 1 :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \frac{1}{\sqrt{2+x}} = \frac{1}{2} (2+3x+x^2)^{-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( 1 + \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{2} \right)^{-1/2}.$$

Donc

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( 1 - \frac{3x}{4} + o(x) \right).$$

Puis en calculant la primitive, qui vaut  $\operatorname{argsh} 1 = \ln(1 + \sqrt{2})$  en 0,

$$\operatorname{argsh} \sqrt{1+x} = \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4} x - \frac{3\sqrt{2}}{32} x^2 + o(x^2).$$

4. On calcule les dérivées successives de la fonction  $x \mapsto \arctan x$ .

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = (-2x)(1+x^2)^{-2},$$

puis

$$f^{(3)}(x) = -2(1+x^2)^{-2} + (-2x)(-2)(2x)(1+x^2)^{-3}.$$

On en déduit

$$f(1) = \pi/4, \quad f'(1) = 1/2, \quad f''(1) = -1/2, \quad f^{(3)}(1) = 1/2,$$

d'où, en utilisant la formule de Taylor,

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + o_1((x-1)^3),$$

on trouve

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{12} + o_1((x-1)^3).$$

Partons d'un *d.l.* à l'ordre 2 de  $f'$ . En posant  $x = 1 + u$ , on obtient

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2+2u+u^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+u+u^2/2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \left(u + \frac{u^2}{2}\right) + \left(u + \frac{u^2}{2}\right)^2 + o_1(u^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \left(u + \frac{u^2}{2}\right) + u^2 + o_1(u^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - u + \frac{u^2}{2} \right) + o_1(u^2) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} + o_1(u^2). \end{aligned}$$

Alors, en intégrant terme à terme

$$f(x) = f(1) + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{4} + \frac{u^3}{12} + o_1(u^3),$$

ce qui redonne le même résultat.

5. a) On se ramène à un *d.l.* en zéro en posant  $h = x - \pi/3$ . On a alors

$$f(x) = \cos\left(h + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cos h - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin h,$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{h^2}{2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left( h - \frac{h^3}{6} \right) + o(h^3),$$

et finalement

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right).$$

b) On se ramène à un *d.l.* en zéro en posant  $h = x + 1$

$$f(x) = h(h+1)(h+2) = 2h + 3h^2 + h^3 = 2h + 3h^2 + o(h^2),$$

donc

$$f(x) = 2(x+1) + 3(x+1)^2 + o((x+1)^2).$$

c) On se ramène à un *d.l.* en zéro en posant  $h = x - 3$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(3+h) = \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{h}{3}\right) \\ &= \ln 3 + \frac{h}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{3}\right)^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = \ln 3 + \frac{x-3}{3} - \frac{(x-3)^2}{18} + o((x-3)^2).$$

d) On se ramène à un *d.l.* en zéro en posant  $h = x - \pi/4$ . On obtient alors

$$\tan x = \tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan h + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \tan h}{1 - \tan h}.$$

Par ailleurs,

$$\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2h\right) = \frac{1}{\tan(-2h)} = -\frac{1}{\tan 2h}.$$

Donc

$$f(x) = f\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1 + \tan h}{1 - \tan h}\right)^{-1/\tan 2h} = e^{-g(h)},$$

où

$$g(h) = \frac{1}{\tan 2h} \ln\left(\frac{1 + \tan h}{1 - \tan h}\right).$$

Comme  $\tan 2h$  s'annule en zéro, et que le premier terme non nul de son *d.l.* est de degré 1, il faut donc commencer le calcul avec un *d.l.* d'ordre 4 en zéro de  $\tan h$  :

$$\tan h = h + \frac{h^3}{3} + o(h^4).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \ln(1 + \tan h) &= \ln\left(1 + h + \frac{h^3}{3} + o(h^4)\right) \\ &= \left(h + \frac{h^3}{3}\right) - \frac{1}{2} \left(h + \frac{h^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(h + \frac{h^3}{3}\right)^3 - \frac{1}{4} \left(h + \frac{h^3}{3}\right)^4 + o(h^4) \\ &= h + \frac{h^3}{3} - \frac{1}{2} \left(h^2 + \frac{2h^4}{3}\right) + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + o(h^4) \\ &= h - \frac{h^2}{2} + \frac{2h^3}{3} - \frac{7h^4}{12} + o(h^4). \end{aligned}$$

Alors en changeant  $h$  en  $-h$ ,

$$\ln(1 - \tan h) = -h - \frac{h^2}{2} - \frac{2h^3}{3} - \frac{7h^4}{12} + o(h^4),$$

et finalement

$$\ln \frac{1 + \tan h}{1 - \tan h} = \ln(1 + \tan h) - \ln(1 - \tan h) = 2h + \frac{4h^3}{3} + o(h^4).$$

(Remarque : la fonction qui à  $h$  associe  $\ln \frac{1 + \tan h}{1 - \tan h}$  étant impaire, il est normal que son *d.l.* le soit également).

Par ailleurs

$$\tan 2h = 2h + \frac{8h^3}{3} + o(h^4).$$

On a alors

$$\begin{aligned} g(h) &= \frac{2h + \frac{4h^3}{3} + o(h^4)}{2h + \frac{8h^3}{3} + o(h^4)} \\ &= \frac{1 + \frac{2h^2}{3} + o(h^3)}{1 + \frac{4h^2}{3} + o(h^3)} \\ &= \left(1 + \frac{2h^2}{3}\right) \left(1 - \frac{4h^2}{3}\right) + o(h^3) \\ &= 1 - \frac{2h^2}{3} + o(h^3). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} f\left(h + \frac{\pi}{4}\right) &= e^{-g(h)} \\ &= e^{\left(-1 + \frac{2h^2}{3} + o(h^3)\right)} \\ &= e^{-1} e^{\left(\frac{2h^2}{3} + o(h^3)\right)}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à utiliser le *d.l.* de  $e^x$  en zéro pour obtenir

$$f\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = e^{-1} \left(1 + \frac{2h^2}{3}\right) + o(h^3).$$

Finalement

$$f(x) = e^{-1} \left(1 + \frac{2}{3} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right) + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right).$$

6. a) Pour  $x > 0$ , on a la relation

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\arctan \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan x^2 = \frac{\pi}{2} - x^2 + \frac{x^6}{3} - \frac{x^{10}}{5} + o(x^{13}).$$

b) On a

$$\operatorname{th} \frac{1}{x^2} = \frac{1 - e^{-2/x^2}}{1 + e^{-2/x^2}},$$

donc

$$\operatorname{th} \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{-2e^{-2/x^2}}{1 + e^{-2/x^2}}.$$

Alors

$$x^{-n} \left( \operatorname{th} \frac{1}{x^2} - 1 \right) = \frac{-2x^{-n}e^{-2/x^2}}{1 + e^{-2/x^2}}.$$

b) En posant  $u = 2/x^2$ ,

$$x^{-n}e^{-2/x^2} = 2^{-n/2} e^{-u} u^{n/2},$$

et cette expression admet pour limite 0 lorsque  $u$  tend vers  $+\infty$  donc lorsque  $x$  tend vers 0. Alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-n} \left( \operatorname{th} \frac{1}{x^2} - 1 \right) = 0,$$

donc

$$\operatorname{th} \frac{1}{x^2} - 1 = o(x^n),$$

et l'on a bien

$$\operatorname{th} \frac{1}{x^2} = 1 + o(x^n).$$

7. Remarque : dans cet exercice on ne peut savoir *a priori* à quel ordre choisir les *d.l.* que l'on utilise, les démonstrations sont données avec l'ordre nécessaire pour obtenir l'équivalent cherché. En général, on choisit un ordre de départ, et, s'il est insuffisant pour conclure, on recommence les calculs en augmentant l'ordre.

a) En effectuant un *d.l.* à l'ordre 3,

$$x(2 - \cos x) - \arctan x = x \left( 2 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - \left( x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = \frac{5x^3}{6} + o(x^3) \sim \frac{5x^3}{6}.$$

b) En effectuant un *d.l.* à l'ordre 4,

$$\begin{aligned}
 e^{\cos x} &= e \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \\
 &= e e \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \\
 &= e \left[ 1 + \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right)^2 + o(x^4) \right] \\
 &= e \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} \right) + o(x^4).
 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
 e^{\operatorname{ch} x} &= e \left( 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \\
 &= e e \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \\
 &= e \left[ 1 + \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right)^2 + o(x^4) \right] \\
 &= e \left( 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} \right) + o(x^4).
 \end{aligned}$$

Alors

$$e^{\cos x} + e^{\operatorname{ch} x} - 2e = \frac{ex^4}{3} + o(x^4) \sim \frac{ex^4}{3}.$$

c) Pour  $x$  tendant vers  $0^+$ , on a

$$\sqrt{\tan x} = \sqrt{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \sqrt{x} \left( 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right)^{1/2}.$$

Donc, en utilisant le *d.l.* en zéro de  $(1 + u)^{1/2}$ ,

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{x} \left( 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right).$$

De même,

$$\sqrt[4]{x \sin x} = \sqrt[4]{x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)} = \sqrt{x} \left( 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)^{1/4}.$$

Donc, en utilisant le *d.l.* en zéro de  $(1 + u)^{1/4}$ ,

$$\sqrt{\tan x} = \sqrt{x} \left( 1 - \frac{x^2}{24} + o(x^2) \right).$$

Alors

$$\sqrt{\tan x} - \sqrt[4]{x \sin x} = \sqrt{x} \left( \frac{5x^2}{24} + o(x^2) \right) = \frac{5x^{5/2}}{24} + o(x^{5/2}) \sim \frac{5x^{5/2}}{24}.$$

d) On part de *d.l.* à l'ordre 4.

$$\begin{aligned}\ln \cos x &= \ln \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \\ &= \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) - \frac{1}{2} \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right)^2 + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\ln \operatorname{ch} x &= \ln \left( 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \\ &= \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right)^2 + o(x^4) \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{\ln \operatorname{ch} x}{\ln \cos x} &= \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)}{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)} \\ &= -\frac{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \\ &= -\left( 1 - \frac{x^2}{6} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{6} \right) + o(x^2) \\ &= -1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2).\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$1 + \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\ln \cos x} = \frac{x^2}{3} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{3}.$$

**8.** a) Le *d.l.* du dénominateur ayant son premier terme non nul de degré 3, on cherche un *d.l.* d'ordre 3 du numérateur. Pour obtenir le *d.l.* d' $\arcsin x$ , on part du *d.l.* d'ordre 2 de la dérivée.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Donc en intégrant, et puisque  $\arcsin 0 = 0$ ,

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Alors

$$\sin x - \arcsin x = -\frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim -\frac{x^3}{3},$$

et

$$\sin^3 x \sim x^3,$$

d'où

$$\frac{\sin x - \arcsin x}{\sin^3 x} \sim -\frac{1}{3},$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} = -\frac{1}{3}.$$

b) Comme  $\sin x$  a un *d.l.* en zéro dont le premier terme non nul est de degré 1, et que l'on effectue une division par  $x^2$ , on partira de *d.l.* d'ordre 3. On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \text{sh } x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\text{sh } x}{\sin x} &= \frac{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= \frac{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \\ &= \left(1 + \frac{x^2}{6}\right) \left(1 + \frac{x^2}{6}\right) + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2). \end{aligned}$$

Alors

$$\ln \frac{\text{sh } x}{\sin x} = \ln \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

Puis

$$\frac{1}{x^2} \ln \frac{\text{sh } x}{\sin x} = \frac{1}{3} + o(1).$$

Finalement

$$\left(\frac{\text{sh } x}{\sin x}\right)^{1/x^2} = e^{\left(\frac{1}{x^2} \ln \frac{\text{sh } x}{\sin x}\right)}$$

tend vers  $e^{1/3}$ .

c) On part du *d.l.* d'ordre 1 en zéro de  $\alpha^x = e^{x \ln \alpha}$  qui vaut  $1 + x \ln \alpha + o(x)$ . On a donc

$$5^x - 3^x = (1 + x \ln 5) - (1 + x \ln 3) + o(x) = x \ln \frac{5}{3} + o(x) \sim x \ln \frac{5}{3},$$

et

$$4^x - 2^x = (1 + x \ln 4) - (1 + x \ln 2) + o(x) = x \ln 2 + o(x) \sim x \ln 2,$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 3^x}{4^x - 3^x} = \frac{\ln(5/3)}{\ln 2}.$$

d) On pose tout d'abord  $h = x - e$ , et l'on cherche la limite lorsque  $h$  tend vers zéro de

$$g(h) = \frac{(e+h)^e - e^{e+h}}{h^2}.$$

On cherche un *d.l.* d'ordre 2 du numérateur. Tout d'abord

$$(h+e)^e = e^e \left(1 + \frac{h}{e}\right)^e.$$

On utilise le *d.l.* de  $(1+x)^\alpha$  en zéro, pour  $\alpha = e$ , et  $x = h/e$ . Donc

$$\begin{aligned} (h+e)^e &= e^e \left(1 + e \frac{h}{e} + \frac{e(e-1)}{2} \left(\frac{h}{e}\right)^2 + o(h^2)\right) \\ &= e^e \left(1 + h + \frac{e-1}{2e} h^2\right) + o(h^2). \end{aligned}$$

En utilisant le *d.l.* de l'exponentielle, on aura

$$e^{h+e} = e^e e^h = e^e \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) + o(h^2).$$

D'où

$$(h+e)^e - e^{h+e} = -\frac{e^{e-1}}{2} h^2 + o(h^2).$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{x^e - e^x}{(x-e)^2} = -\frac{e^{e-1}}{2}.$$

e) Comme dans le calcul figure une division par  $x$ , on part de *d.l.* à l'ordre 1. On a tout d'abord

$$\frac{1+x}{1-x} = (1+x)(1+x+o(x)) = 1 + 2x + o(x),$$

puis

$$\frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{x} \ln(1 + 2x + o(x)) = \frac{1}{x} (2x + o(x)) = 2 + o(1).$$

Alors

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x} = \exp \left[ \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} \right]$$

tend vers  $e^2$  lorsque  $x$  tend vers zéro.

f) On écrit

$$\cotan^2 x - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\tan^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \tan^2 x}{x^2 \tan^2 x} = \frac{(x + \tan x)(x - \tan x)}{x^2 \tan^2 x}.$$

Or

$$x - \tan x = x - \left( x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = -\frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim -\frac{x^3}{3},$$
$$x + \tan x = 2x + o(x) \sim 2x,$$

et

$$x^2 \tan^2 x \sim x^4.$$

Alors

$$\cotan^2 x - \frac{1}{x^2} \sim \frac{2x \left( -\frac{x^3}{3} \right)}{x^4} = -\frac{2}{3}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \cotan^2 x - \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{2}{3}.$$

9. a) On écrit

$$u_n = e^{n \ln(1+x/n)},$$

et en posant  $u = 1/n$ , on utilise le développement de  $\ln(1+u)$  en 0. On a donc

$$n \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) = n \left( \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = x + o(1).$$

d'où l'on déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^x.$$

b) Posons tout d'abord  $h = 1/n$ . On cherche donc la limite quand  $h$  tend vers zéro de

$$g(h) = \left( \frac{1}{2}(a^h + b^h) \right)^{1/h}.$$

Comme dans le calcul figure une division par  $h$ , on part de *d.l.* à l'ordre 1. Comme dans 8c) on a

$$\frac{1}{2}(a^h + b^h) = \frac{1}{2}(1 + h \ln a + 1 + h \ln b + o(h)) = 1 + \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)h + o(h) = 1 + h \ln \sqrt{ab} + o(h).$$

Donc

$$\frac{1}{h} \ln \left( \frac{1}{2}(a^h + b^h) \right) = \frac{1}{h} \left( h \ln \sqrt{ab} + o(h) \right) = \ln \sqrt{ab} + o(1),$$

et cette expression tend vers  $\ln \sqrt{ab}$ . Alors

$$g(h) = \exp \left[ \frac{1}{h} \ln \left( \frac{1}{2}(a^h + b^h) \right) \right]$$

tend vers  $e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = \sqrt{ab}.$$

10. a) On a

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

d'où

$$f(x) = -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + o(x^2),$$

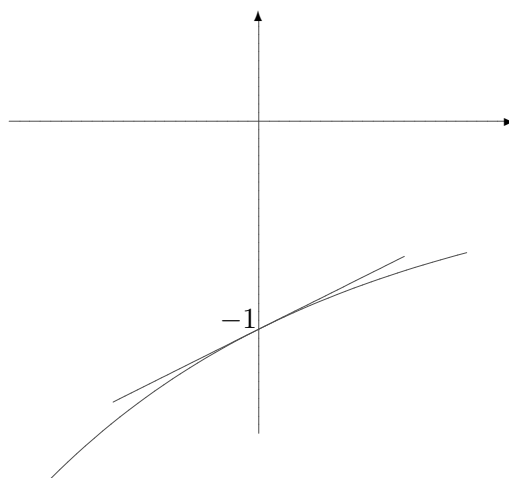
La fonction  $f$  se prolonge en zéro par la valeur  $-1$ . L'équation de la tangente à la courbe en 0 est donnée par le *d.l.* d'ordre 1 :

$$y = -1 + \frac{x}{2}.$$

Alors

$$f(x) - \left(-1 + \frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{6}.$$

Lorsque  $x$  tend vers 0 la différence est négative et la courbe est en dessous de sa tangente.



b) On a

$$3 \ln(1+x) - \ln(1+x^3) = 3 \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) - x^3 + o(x^4) = 3x - \frac{3x^2}{2} - \frac{3x^4}{4} + o(x^4),$$

d'où

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4} + o(x^3).$$

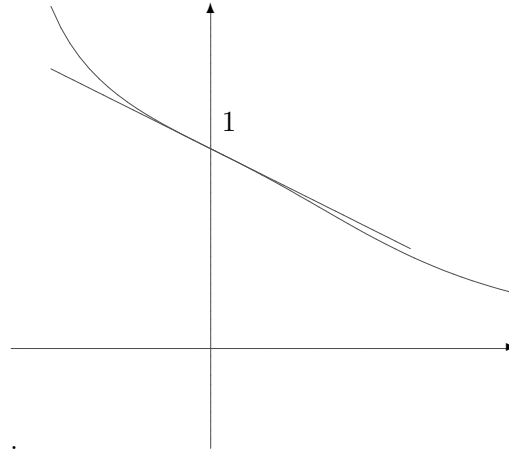
La fonction  $f$  se prolonge en zéro par la valeur 1. L'équation de la tangente à la courbe en 0 est donnée par le *d.l.* d'ordre 1 :

$$y = 1 - \frac{x}{2}.$$

Alors

$$f(x) - \left(1 - \frac{x}{2}\right) = -\frac{x^3}{4} + o(x^3) \sim -\frac{x^3}{4}.$$

Lorsque  $x$  tend vers  $0^+$  la différence est négative et la courbe est en dessous de sa tangente, lorsque  $x$  tend vers  $0^-$  la différence est positive et la courbe est au-dessus de sa tangente. La courbe admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.



11. a) En mettant  $x^2$  en facteur sous la racine, il vient

$$f(x) = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} e^{3/(2x)} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} e^{3/(2x)}.$$

Posons  $h = 1/x$ , et faisons un *d.l.* de

$$\frac{f(x)}{|x|} = |h| f\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt{1+h} e^{3h/2}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \sqrt{1+h} e^{3h/2} &= \left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8}\right) \left(1 + \frac{3h}{2} + \frac{9h^2}{8}\right) + o(h^2) \\ &= 1 + 2h + \frac{7h^2}{4} + o(h^2). \end{aligned}$$

Donc, si  $x$  est positif

$$f(x) = x + 2 + \frac{7}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

et si  $x$  est négatif

$$f(x) = -x - 2 - \frac{7}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe admet la droite d'équation  $y = x + 2$ , comme asymptote à  $+\infty$  et se trouve au-dessus de l'asymptote car

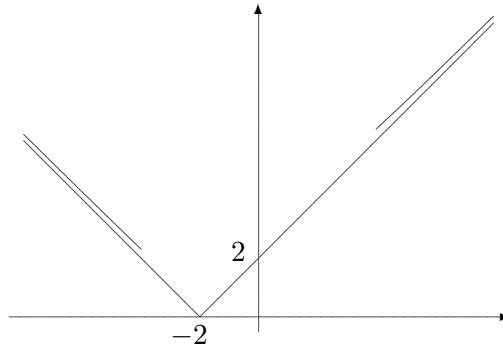
$$f(x) - (x + 2) = \frac{7}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{7}{4x}$$

est du signe de  $1/x$  donc positif.

Elle admet la droite d'équation  $y = -x - 2$ , comme asymptote à  $-\infty$  et se trouve également au-dessus de l'asymptote car

$$f(x) + (x + 2) = -\frac{7}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim -\frac{7}{4x}$$

est du signe de  $-1/x$  donc encore positif.



b) Posons  $h = 1/x$ . On a alors

$$\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt{\frac{1-3h}{1+h}}.$$

On effectue un *d.l.* à l'ordre 3.

$$\frac{1-3h}{1+h} = (1-3h)(1-h+h^2-h^3+\circ(h^3)) = 1-4h+4h^2-4h^3+\circ(h^3).$$

Alors, en utilisant le développement en 0

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + \circ(u^3),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1-3h}{1+h}} &= (1-4h+4h^2-4h^3+\circ(h^3))^{1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(-4h+4h^2-4h^3) - \frac{1}{8}(-4h+4h^2-4h^3)^2 + \frac{1}{16}(-4h+4h^2-4h^3)^3 + \circ(h^3) \\ &= 1 + (-2h+2h^2-2h^3) - 2(h^2-2h^3) - 4h^3 + \circ(h^3) \\ &= 1-2h-2h^3+\circ(h^3). \end{aligned}$$

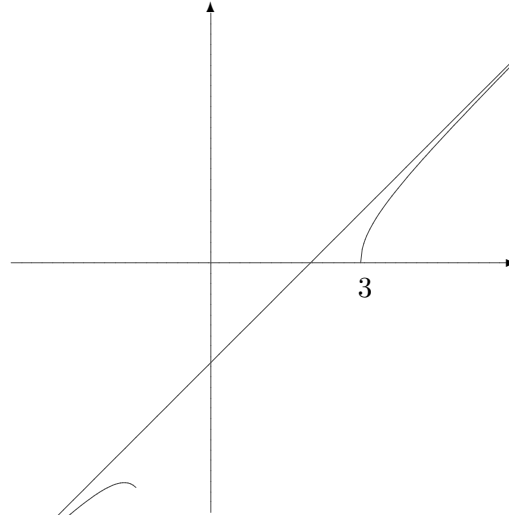
On a donc

$$f(x) = x - 2 - \frac{2}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

La courbe admet à  $\pm\infty$  l'asymptote d'équation  $y = x - 2$ . La différence

$$f(x) - (x - 2) = -\frac{2}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim -\frac{2}{x^2},$$

est négative. La courbe est en dessous de l'asymptote à  $+\infty$  et  $-\infty$ .



c) Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  le terme prépondérant à l'intérieur du logarithme est  $e^{2x}$ . On le met en facteur. Alors

$$f(x) = \ln[e^{2x}(1 - e^{-x} + 3e^{-5x} + e^{-3x} + e^{-2x})] = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + 3e^{-5x}).$$

Posons alors  $e^{-x} = h$ , cette quantité tend vers zéro. On peut effectuer un *d.l.* à l'ordre 1 en zéro de

$$\ln(1 - h + h^2 + h^3 + 3h^5) = \ln(1 - h + o(h)) = -h + o(h),$$

donc

$$f(x) = 2x - e^{-x} + o(e^{-x}).$$

La courbe admet comme asymptote la droite d'équation  $y = 2x$ . Et la différence

$$f(x) - 2x = -e^{-x} + o(e^{-x}) \sim -e^{-x},$$

est du signe de  $-e^{-x}$ . La courbe est en dessous de son asymptote à  $+\infty$ .

Lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$  le terme prépondérant à l'intérieur du logarithme est  $3e^{-3x}$ . On le met en facteur. Alors

$$f(x) = \ln \left[ 3e^{-3x} \left( 1 + \frac{1}{3} (e^{2x} + e^{3x} - e^{4x} + e^{5x}) \right) \right] = -3x + \ln 3 + \ln \left( 1 + \frac{1}{3} (e^{2x} + e^{3x} - e^{4x} + e^{5x}) \right).$$

Posons alors  $e^x = h$ , cette quantité tend vers zéro. On peut effectuer un *d.l.* à l'ordre 3 en zéro de

$$\ln \left( 1 + \frac{h^2}{3} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{3} + \frac{h^5}{3} \right) = \ln \left( 1 + \frac{h^2}{3} + o(h^2) \right) = \frac{h^2}{3} + o(h^2).$$

Donc

$$f(x) = -3x + \ln 3 + \frac{1}{3}e^{2x} + o(e^{2x}).$$

La courbe admet comme asymptote la droite d'équation  $y = -3x + \ln 3$ . Et la différence

$$f(x) - (-3x + \ln 3) = \frac{1}{3}e^{2x} + o(e^{2x}) \sim \frac{1}{3}e^{2x},$$

est du signe de  $e^{2x}/3$ . La courbe est au-dessus de son asymptote à  $-\infty$ .

